

ウェーブレット変換と調和解析 (球面上の場合)

奈良女子大学理学部数学科 森藤紳哉 (SHINYA MORITOH)

以下は Professor Boris Rubin (Hebrew University) との共同研究である。 $\mathbb{R}^n$ 上の Riesz potential of order α を想起する。

$$(1) \quad (I^\alpha \phi)(x) = 1/\gamma_n(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) |x - y|^{\alpha-n} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < n$$

ここで $\gamma_n(\alpha) = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((n-\alpha)/2)$. $Y_{j,k} (j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, d_n(j))$ を球面調和多項式、 $d_n(j)$ を次数 j の球面調和多項式 $Y_{j,k}$ の個数とする。すると $\{Y_{j,k} | j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, d_n(j)\}$ は $L_2(S^n)$ の完全正規直交系をなす。単位球面 S^n 上の Riesz potential of order α は次のように定義され展開される。

$$(2) \quad (I^\alpha \phi)(x) = c_{n,\alpha} \int_{S^n} (1 - x \cdot y)^{(\alpha-n)/2} \phi(y) dy, \quad x \in S^n, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < n,$$

$$c_{n,\alpha} = \pi^{-n/2} 2^{-(n+\alpha)/2} \Gamma((n-\alpha)/2) / \Gamma(\alpha/2).$$

$$I^\alpha \phi \sim \sum_{j,k} m_j(\alpha) \phi_{j,k} Y_{j,k},$$

$$m_j(\alpha) = \Gamma(j + (n-\alpha)/2) / \Gamma(j + (n+\alpha)/2).$$

作用素 (2) に付随した球面上のウェーブレット変換の自然な構成を得たい。

Definition 1. 区間 $(0, \infty)$ 上の函数 w が

$$c_{\alpha,w} \equiv \int_0^\infty w(s) s^{-1+(n-\alpha)/2} ds \neq 0$$

を満たすとする。函数 ϕ の球面上のウェーブレット変換は

$$(W\phi)(x, t) = t^{-n/2} \int_{S^n} w((1 - x \cdot y)/t) \phi(y) dy, \quad x \in S^n, \quad t > 0$$

で定義される。函数 w をウェーブレットと呼ぶ。

すると

$$(3) \quad (I^\alpha \phi)(x) = c_{n,\alpha}/c_{\alpha,w} \int_0^\infty (W\phi)(x,t) dt/t^{1-\alpha/2}, \quad x \in S^n.$$

次が成立することが期待される。

$$(4) \quad \phi(x) = a_1 \int_0^\infty (W\phi)(x,t) dt/t, \quad x \in S^n,$$

$$(5) \quad (I^\alpha)^{-1} f(x) \equiv a_2 \int_0^\infty (Wf)(x,t) dt/t^{1+\alpha/2} = \phi(x), \quad x \in S^n \text{ for } f = I^\alpha \phi.$$

(4) は $\mathbb{R}^n$ 上の Calderón の再生公式の類似であり、(5) は fractional integral $f = I^\alpha \phi$ の逆である。我々の第一の問題は (4) と (5) の L_p -空間 ($1 \leq p \leq \infty$) のコンテキストでの正当化である。

Definition 2.

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = 1/\Gamma(\alpha) \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

$$(I_+^\alpha f)(x) = 1/\Gamma(\alpha) \int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy$$

を 1 次元 fractional integral operators とする。(5) の truncated integral を

$$(T_\epsilon^\alpha f)(x) = a_2 \int_\epsilon^\infty (Wf)(x,t) dt/t^{1+\alpha/2}$$

で定義する。

Theorem 1. 区間 $(0, \infty)$ 上の函数 w が次の条件 (C) を満たすとする。

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{\alpha,w} \equiv \int_0^\infty w(s) s^{-1+(n-\alpha)/2} ds \neq 0, \\ 1/s(I_{0+}^{\alpha/2+1} \tilde{w})(s) \in L_1(0, \infty), \text{ ここで } \tilde{w}(s) \equiv s^{n/2-1} w(s). \end{array} \right\}$$

すると

$$T_\epsilon^\alpha (I^\alpha \phi) \rightarrow \phi \text{ in } L_p \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

更に次の条件 (C') から 条件 (C) が導かれる。

$$(C') \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty s^\beta |\tilde{w}(s)| ds < \infty \text{ for some } \beta > 1/2 \operatorname{Re} \alpha \text{ そして} \\ \int_0^\infty s^j \tilde{w}(s) ds = 0 \text{ for } j = 0, 1, 2, \dots, [1/2 \operatorname{Re} \alpha]. \end{array} \right\}$$

球面上のソボレフ空間の特徴付けは次の通り。

Theorem 2. $0 < \alpha < n$ として $1 \leq p \leq \infty$ とする。次は同値。

- 1) $f \in W_p^\alpha(S^n)$,
- 2) $f = I^\alpha \phi$ for some $\phi \in L_p(S^n)$,
- 3) $\sup_{\epsilon > 0} \|\int_\epsilon^\infty (Wf)(x, t) dt / t^{1+\alpha/2}\|_{L_p(S^n)} < \infty$.

これらの定理の証明の概略を述べる。

Lemma 1. $\phi \in C(S^n)$ とし $(1-t^2)^{n/2-1}a(t) \in L_1(-1, 1)$ とする。すると

$$\int_{S^n} a(x \cdot y) \phi(y) dy = \sigma_{n-1} \int_{-1}^1 a(\tau) (M_\tau^0 \phi)(x) (1-\tau^2)^{n/2-1} d\tau,$$

ここで $\sigma_{n-1} = |S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ として $(M_t^0 \phi)(x) = (1-t^2)^{(1-n)/2}/\sigma_{n-1} \cdot \int_{x \cdot y = t} \phi(y) dy$.

このレマは spherical convolution type の積分を区間 $[-1, 1]$ 上の 1 次元の積分として表現するのに用いられる。球面上のウェーブレット変換は spherical convolution type の積分として定義されたことを想起する。

Lemma 2.

$$(M_t^0 \phi)(x) = \sum_{j,k} j! \Gamma(n/2) / \Gamma(j + n/2) P_j^{(n/2-1, n/2-1)}(t) \phi_{j,k} Y_{j,k}(x) \text{ in } L_2(S^n),$$

ここで $P_j^{(\cdot, \cdot)}$ は Jacobi 多項式を表す。

Definition 3. 作用素 M_t^0 を拡張して

$$(M_t^\gamma \phi)(x) = \sum_{j,k} j! \Gamma(n/2 + \gamma) / \Gamma(j + n/2 + \gamma) P_j^{(n/2+\gamma-1, n/2-\gamma-1)}(t) \phi_{j,k} Y_{j,k}(x),$$

ここで $t \in [-1, 1]$ として $\operatorname{Re} \gamma > -n/2$. これは $t \rightarrow 1$ の時 approximate identity とみなすことができる。

鍵になるレンマは次の通り。

Lemma 3. $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$, $1 \leq p \leq \infty$ そして $\phi \in L_p(S^n)$ に対して $f = I^\alpha \phi$ とする。この時

$$(1 + \tau)^{n/2-1} (M_\tau^0 f)(x) = (I_+^{\alpha/2} h_{x,\phi})(\tau),$$

ここで $h_{x,\phi}(t) = (\Gamma(n/2)/\Gamma((n+\alpha)/2))(t+1)^{(n-\alpha)/2-1} (M_t^{\alpha/2} \phi)(x)$.

Theorem 1 の証明は本質的にはこのレンマを用いて遂行される。条件 (C') から条件 (C) が従うことは fractional integral の一般論から分かる。

Remark 1. $\mathbb{R}^n$ 上の Calderón の再生公式を想起する。 $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$ を radial な実数値関数とし、条件 $\int_0^\infty [\hat{u}(t\xi)]^2 dt/t = 1$, $\xi \neq 0$ を満たすとする、

$$f(x) = \int_0^\infty (f * u_t * u_t)(x) dt/t \text{ in } L_2(\mathbb{R}^n),$$

ここで $u_t(x) = (1/t^n)u(x/t)$ とし、記号 $*$ は convolution を表す。Calderón の再生公式を用いて種々の函数空間のアトム分解が得られる。

次の文献表は完全からほど遠い。文献 1, 2, 3, 4 は本稿と密接な繋がりがある。文献 5 では超局所解析的な視点のもとにユークリッド空間上のウェーブレット変換が定義されている。文献 6, 7 では本稿とは異なった観点から球面上のウェーブレットが考察されている。

REFERENCES

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals, I*, Math. Z. **27** (1928), 565–606.
2. M. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space, I*, J. Math. Mech. **13** (1964), 407–480.
3. H. C. Greenwald, *Lipschitz spaces of distributions on the surface of unit sphere in Euclidean n -space*, Pacific J. Math. **70** (1977), 163–176.
4. B. Rubin, *Fractional integrals and potentials*, Addison Wesley Longman, Essex, England, 1996.
5. S. Moritoh, *Wavelet transforms in Euclidean spaces — their relation with wave front sets and Besov, Triebel-Lizorkin spaces —*, Tôhoku Mathematical Journal **47** (1995), 555–565.
6. S. Dahlke, *Multiresolution Analysis, Haar Bases and Wavelets on Riemannian Manifolds*, Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications (C. K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio, eds.), Academic Press, 1994.
7. S. Dahlke and P. Maass, *Continuous Wavelet transforms with applications to analyzing functions on spheres*, The Journal of Fourier Analysis and Applications **2** (1996), 379–396.