

# 次数付き Noether 環の有限生成性について

日大文理 後藤 四郎

東京理科大 山岸規久道

1. 序. 次数付き可換環  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  が Noether 環である  
 $\Leftrightarrow A_0$  が Noether 環でかつ イデアル  $A_+ = \bigoplus_{n > 0} A_n$  が有限生成, さらにこのとき  $A$  は  $A_0$ -代数として有限生成である  
 ———— ということはよくご存じのことと思いますが, 本稿の目的はこゝの結果を (下で定義する)  $H$ -次数付き環へ拡張しようというものです。

以下, 考える環はすべて可換環とする。まず, 次数付き環の定義を振り返ろう。

定義.  $H$  は Abel 群 (演算は  $+$ ) とする。環  $A$  が  $H$ -次数付き環であるとは,  $A$  の加法に関する部分群の族  $\{A_h\}_{h \in H}$  で ①  $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$ , ②  $A_f A_g \subseteq A_{f+g}$  ( $f, g \in H$ ) をみたすものが存在することである。

この定義の下に我々の結果を述べると

定理.  $H$  は有限生成 Abel 群,  $A$  は  $H$ -次数付き環とせよ。すると次の3つの条件は同値である。

- (1)  $A$  は Noether 環である。
- (2)  $A_0$  は Noether 環であり, かつ  $A$  は  $A_0$ -代数として有限生成である。
- (3)  $A$  のすべての斉次イデアルが有限生成。

この定理から導かれる結果として

系.  $\mathfrak{s}$  は有限生成 Abel 群  $H$  の部分群で  $0 \in \mathfrak{s}$  とせよ。このとき,  $k[\mathfrak{s}]$  が Noether 環  $\Leftrightarrow k$  が Noether 環で  $\mathfrak{s}$  が有限生成。

$H = \mathbb{Z}$  の時, 定理の (1) と (3) の同値はすでに Matijević [M] によって示されている。

## 2. 定理の証明。

補題 1.  $R \subset \mathfrak{s}$  は環の拡大でさらに  $R \subsetneq \mathfrak{s}$  とせよ。 $I$  は  $R$  のイデアルとする。このとき, イデアル  $I\mathfrak{s}$  は  $\mathfrak{s}$  上有限生成  $\Leftrightarrow I$  は  $R$  上有限生成。

補題. 2.  $B = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} B_s$  は  $\mathbb{Z}$ -次数付き環  $\subset C$ ,  $B_+ = \bigoplus_{s \geq 0} B_s$ ,

$B_- = \bigoplus_{s < 0} B_s$  とおく。

(1) 0 次の元で生成された斉次イデアルがすべて有限生成な  
と,  $B_0$  は Noether 環である。

(2)  $B_+ B$ ,  $B_- B$ ,  $B_s B$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) がすべて有限生成イデアルな  
と,  $B$  は  $B_0$ -代数として有限生成である。

(証明) (1) は補題 1. (2) を示す。  $B_+ B$  は有限生成だ  
から,  $B_+ B = (f_1, \dots, f_s) B$  ( $\deg f_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq s$ ),  
同様に  $B_- B = (g_1, \dots, g_t) B$  ( $\deg g_j < 0$ ,  $1 \leq j \leq t$ )  
と表わせる。  $d = \max \{ \deg f_i \mid 1 \leq i \leq s \}$ ,  
 $d' = \min \{ \deg g_j \mid 1 \leq j \leq t \}$  とおき, さらに  
 $C = B_0 [ B_s \mid d' \leq s \leq d ]$

とおく。すると,

Claim.  $C \supset B_+$ .

$C \supset B_-$  も同様に示せるから,  $C = B$  を得る。一方  $B_s B$  が有  
限生成より,  $B_s$  は  $B_0$ -加群として有限生成 (参補題 1.), よって  
 $C$  は有限生成  $B_0$ -代数である。

定理の証明.

(3)  $\Rightarrow$  (2) のみを示す。  $H$  の torsion 群を  $T$  とおけば,  
 $H = \mathbb{Z}^m \oplus T$  ( $\exists m > 0$ ). 2つの場合に分けよう。

①  $T = (0)$  の場合。  $H = \mathbb{Z}^m$  なのだから,  $m$  に関する帰納法を用

いる。  $n=1$  のときは補題2の(2)。  $n \geq 2$  とせよ。

$h \in \mathbb{Z}^m$  に対し,  $|h| = \sum_{i=1}^m h_i$  とおく。今  $s \in \mathbb{Z}$  に対し

$$B_s = \bigoplus_{h \in \mathbb{Z}^m, |h|=s} A_h$$

とおけば, 族  $\{B_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$  は環  $A$  に  $\mathbb{Z}$ -次数付けを与える。

この  $\mathbb{Z}$ -次数付け環を  $B$  で表わせば,  $B$  のイデアル  $B+B, B-B, B_s B$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) は,  $A$  のイデアルとしても斉次であるから, どれも有限生成。補題2の(2)より,  $B$  は  $B_0$ -代数として有限生成である。

次に,  $L = \{h \in \mathbb{Z}^m \mid |h|=0\}$  とし,  $\alpha: \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow L$  は  $\alpha((g_1, g_2, \dots, g_{m-1})) = (g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, -\sum_{i=1}^{m-1} g_i)$  と定めよめる群同型とする。  $C_g = A_{\alpha(g)}$  ( $g \in \mathbb{Z}^{m-1}$ ) とおけば, 族  $\{C_g\}_{g \in \mathbb{Z}^{m-1}}$  は環  $C = B_0$  に  $\mathbb{Z}^{m-1}$ -次数付けを与える。

$C \subset A$  であり,  $C$  の斉次元は  $A$  においても斉次元であるから, 補題1より環  $C$  は定理の条件(3)を満たしている。 $m$  に関する帰納法から,  $C$  は有限生成  $C_0$ -代数。先の結果と合わせて,  $A$  が有限生成  $A_0$ -代数であることを知る。

① 一般の場合。射影  $p: H = \mathbb{Z}^m \oplus T \rightarrow T$  を考え,

$$D_t = \bigoplus_{h \in H, p(h)=t} A_h \quad (t \in T)$$

とおく。族  $\{D_t\}_{t \in T}$  は環  $A$  に  $T$ -次数付けを与える。この  $T$ -次数付け環を  $D$  とする。 $D$  の斉次元は  $A$  の斉次元でもあるから,  $D_t D$  ( $t \in T$ ) は有限生成。故に,  $D_t$  は有限

生成  $D_0$ -加群であるので,  $D$  自身有限生成  $D_0$ -加群 (④  $T$  は有限群). 一方  $D_0$  は  $\mathbb{Z}^m$ -次数付き環であることは明らかで, ①より  $D_0$  は  $A_0$ -代数として有限生成. このことから,  $A$  は有限生成  $A_0$ -代数であり, よって定理の証明を得る.

3. 例. この節で述べる例は, 遠藤氏が後藤氏にあてた手紙の中で教えてくれたもので, 多くの定理は Abel 群  $H$  が有限生成でないとき一般に正しくないことを示している.

$k$  は体,  $p > 0$  は素数とし, さらに  $H = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$  とおく. このとき次の ① ~ ④ をみたす  $H$ -次数付き環  $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$  が存在する. ①  $A$  は体で  $A_0 = k(x)$ , ここで  $x$  は  $k$  上の不定元. ②  $A$  は  $A_0$  上代数拡大.

③  $[A : A_0] = \infty$ . ④  $A_h \neq (0)$  ( $h \in H$ ).

(証明)  $x$  は  $k$  上の不定元とし, 関数体  $k(x)$  の代数的閉包を  $E$  とせよ.  $E$  の元の無限列

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

を,  $x_i^p = x_{i-1}$  ( $1 \leq i$ ) とおきようにとる. この

とき, 
$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} k(x_i),$$

$$A_h = k(x) x_2^a \quad \left( h = \frac{a}{p^2} \bmod \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right)$$

と定める. 族  $\{A_h\}_{h \in H}$  は環  $A$  に  $H$ -次数付けをよこ

このようにして得られた  $H$ -次数付き環  $A$  が今まさに求まるものである。

後記.      この上の結果を論文 [G-Y] にまとめる予定です。

#### References

[M] J. R. Matijevic, Some topics in graded rings, Thesis, University of Chicago, 1973.

[G-Y] S. Goto and K. Yamagishi, Finite generation of Noetherian graded rings, in preparation.