

平均分散モデルの最適解の自己平均性を用いた理論解析

秋田県立大学システム科学技術学部 新里隆 (Takashi Shinzato)

Akita Prefectural University

Faculty of Systems Science and Technology

1 はじめに

ポートフォリオ最適化とは、1952 年の Markowitz の先駆的な研究に端を発した投資理論であり、現在も活発な議論が行われている、金融工学のフロンティアの 1 つである [1]. 近年、高性能の計算機が安価で購入できるようになり、また様々な求解アルゴリズムが開発され、昨今の投資家にとってポートフォリオ最適化は必須のツールになっている [2, 3]. さて、ポートフォリオ最適化問題の研究において、ここ数年、オペレーションズ・リサーチ (OR) 以外の学際領域で開発された解析手法を用いて、この最適化問題を分析する研究が活発に行われている [4, 5, 6, 7]. Ciliberti らは、経済物理学や情報統計力学で開発されたレプリカ解析を用いて、絶対偏差モデルと期待ショートフォールモデルのリスク指標の典型的な振る舞いを解析した [4]. Pafka らは数理統計学や量子カオスで開発されたランダム行列理論を用いて、実際に得られた収益率で定義される相関行列の固有値分布と Marčenko-Pastur 則のズレを比較することで、銘柄間の相関を定量的に分析した [5]. 新里らは確率推論の方法や復号アルゴリズムとして開発された確率伝搬法を用いて、銘柄数の 2 乗の計算量で最適解を導出する求解アルゴリズムを開発した [6]. 若井らはランダム行列アンサンブルを用いて、平均分散モデルにおける最小投資リスクと集中投資度の典型的な振る舞いを解析した [7]. しかしながら、これらの研究では、情報統計力学 [8] の解析手順に従ってポートフォリオ最適化問題の潜在的な投資リスクなど解析するために、最適解の評価指標である投資リスクや集中投資度に対して自己平均性 (自己平均性については後述する) が成り立つことを前提としている. しかしながらこれらの評価指標が自己平均性を満たすことは自明ではなく、自己平均性を満たすかどうかを示す必要がある. さらにこれらの研究では、投資システムの潜在的な投資リスクを評価するため、これまでの OR で得られた最適解の議論と乖離していることから、これらの問題を整理し、両者を統一的に考察する必要がある.

そこで本研究では、先行研究で前提となる自己平均性について考察するために、ポートフォリオ最適化問題のシナリオを再定式化し、この確率事象に対する最適化の二面性についてまとめる. また OR の議論と整合性が取れるかどうかを簡単なモデルを用いて議論する. さらに投資リスクが自己平均性を満たすことを示し、潜在的な最小投資リスクの振る舞いを解析する.

本稿の構成は以下のとおりである. 次節では本稿を通して扱うポートフォリオ最適化問題を定式化し、さらに最適解の振る舞いを解析するために必要な視点である、確率事象に対する最適化の二面性を簡単なゲームを用いて説明する. また最適解の評価指標が満たす自己平均性についてまとめ、OR の議論との違いを述べる. 最終節はまとめと今後の課題に充てられる.

2 定式化と理論解析

2.1 ポートフォリオ最適化問題

ここでは本稿を通して扱うポートフォリオ最適化問題の中で代表的なモデルの 1 つである、平均分散モデルについて概説する. まず N 銘柄が投資対象となる定常的な投資市場を考える. ただし問題を簡単にするために空売り規制を設けないこととし¹, さらに各銘柄の収益率の統計性は既知である

¹空売りとは、期首において保有していない銘柄の株売りを宣言し、そこで得られた資金を他の銘柄の購入資金にあて、期末で売った分を買い戻す投資手法のことである.

と仮定する。また銘柄 $i (= 1, \dots, N)$ のポートフォリオを w_i で表し、銘柄 i のシナリオ $\mu (= 1, \dots, p)$ の収益率を $\bar{x}_{i\mu}$ で表したとき、このポートフォリオ $\vec{w} = (w_1, \dots, w_N)^T \in \mathbf{R}^N$ の投資リスクは以下のリスク関数で評価することができる。

$$\mathcal{H}(\vec{w}) = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_{i\mu} w_i - \sum_{i=1}^N E[\bar{x}_{i\mu}] w_i \right)^2 \quad (1)$$

ただし記法 T はベクトルや行列の転置を表し、係数 $\frac{1}{2N}$ はのちの議論で解析表現を容易にするために用いており、また $E[\dots]$ は期待値を表す。式 (1) の第 1 項 $\sum_{i=1}^N \bar{x}_{i\mu} w_i$ は、ポートフォリオ $\vec{w}$ のシナリオ μ におけるリターンを表し、第 2 項 $\sum_{i=1}^N E[\bar{x}_{i\mu}] w_i$ は、シナリオ μ における期待リターンを表す。つまり、この投資システムでは、期待される期待リターンからのズレ $\sum_{i=1}^N \bar{x}_{i\mu} w_i - \sum_{i=1}^N E[\bar{x}_{i\mu}] w_i$ が正規分布に従うと仮定し、その 2 乗を p 個のシナリオ全体で総和を取ることで、リスク関数を定義していることが分かる。さらに今後の議論を簡単にするために、収益率の平均からのズレを差し引いた新たな収益率 $x_{i\mu} = \bar{x}_{i\mu} - E[\bar{x}_{i\mu}]$ を導入する (新たな収益率の期待値は 0 である)。これより式 (1) のリスク関数 $\mathcal{H}(\vec{w})$ は、

$$\mathcal{H}(\vec{w}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_{i\mu} w_i \right)^2 \quad (2)$$

と表すことができる。ただし式 (2) の 2 乗の中に $\frac{1}{\sqrt{N}}$ にした理由として、 $\sum_{i=1}^N x_{i\mu} w_i$ は N 個の確率変数 $x_{i\mu} w_i$ (w_i は確率変数 $x_{i\mu}$ の係数と解釈する) の総和であるため、各銘柄の収益率の独立性を仮定しているわけではないが、中心極限定理に倣い、 $\frac{1}{N}$ ではなく $\frac{1}{\sqrt{N}}$ とした。これより、 $\vec{w}$ が固定され、かつ各銘柄の相関が非常に小さい場合、 $v_\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_{i\mu} w_i$ は銘柄数 N の大きい状況で多次元正規分布に漸近的に従うことが期待される。

さて、本稿では、扱う予算制約を $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ ではなく、

$$\sum_{i=1}^N w_i = N \quad (3)$$

で表すことにする。つまり式 (3) の予算制約を満たすポートフォリオ $\vec{w}$ の中で、式 (2) の $\mathcal{H}(\vec{w})$ を最小にする $\vec{w}^* = \arg \min_{\vec{w}} \mathcal{H}(\vec{w})$ を最適解と呼ぶことにし、我々はこの最適解の潜在能力を解析するために後述する自己平均性が用いられる。ここで 1 点注意しておこう。予算制約を $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ にしたときの最適解 $\vec{w}^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_N^1)^T \in \mathbf{R}^N$ と $\sum_{i=1}^N w_i = N$ にしたときの最適解 $\vec{w}^N = (w_1^N, w_2^N, \dots, w_N^N)^T \in \mathbf{R}^N$ において、 $w_i^1/w_j^1 = w_i^N/w_j^N$ の関係を満たすため、つまり投資比率は同じであるため、従来研究で用いられている議論の、解表現や本質は変わらない。しかしながら、もし予算制約として $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ を用いれば、 $w_1 = w_2 = \dots = w_N = 1/N$ となる均等投資型は銘柄数 N が大きい状況で、どの銘柄のポートフォリオも 0 に漸近することになる。一方、式 (3) のような予算制約の下で均等投資型は $w_1 = w_2 = \dots = w_N = 1$ となり、銘柄数 N によらずに各銘柄のポートフォリオが 1 になることが分かる。また予算制約を式 (3) のようにしたさらなる利点については 2.5 節で解説する。

2.2 確率事象に対する最適化

ここでは上記のポートフォリオ最適化問題の最小投資リスクや最適解の振る舞いを評価するために必要な視点であり、従来研究の解析では考慮されていない確率事象に対する最適化の二面性について簡単に議論する。例えば、図 1 のじゃんけんゲームを考えてみよう。このとき被験者 A が被験者 B に勝ち越す戦略が存在するかどうか、について考えてみよう。

—— じゃんけんゲームのルール ——

ルール 1 被験者 A と被験者 B の 2 人でじゃんけんを 300 回連続で行う^a。

ルール 2 さらに被験者 A を分析者とし、解析 (もしくは仮説) に合わせて自由にじゃんけんの手を選択することができる。また被験者 B は、サイコロの出る目の確率が等しいサイコロを振って、例えばサイコロの目が 1, 2 のときグー、サイコロの目が 3, 4 のときチョキ、サイコロの目が 5, 6 のときパー、のようにランダムにじゃんけんの手を等確率で出すことにする。

ルール 3 報酬 (もしくは罰則) として、勝者に点数 1、敗者に点数 -1 を与える。2 人が同じ手の場合は報酬を与えない。

^aじゃんけんの回数を 300 回としたが、300 回の回数に限定的な議論ではないことに注意する。

図 1: 繰り返しじゃんけんゲーム

- (a) **同時にじゃんけんの手を出す場合 (Ordinary strategy)** まず被験者 A と被験者 B が同時にじゃんけんの手を出すことにしよう。特に被験者 A にとって、これから出す被験者 B のじゃんけんの手は既知ではないため、被験者 B のじゃんけんの手を確率的に解釈して扱うことにする。さらにルール 2 より、じゃんけんの手は確率が等しいことが分かる。このとき、被験者 A が被験者 B と同じ方法で (各目の確率が等しい) サイコロの出る目に従ってじゃんけんの手を出す場合の総得点の期待値 T は、 $T = 300 \times (\text{被験者 A が勝つ場合} + \text{あいこの場合} + \text{被験者 A が負ける場合}) = 300 \times (1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 + 0 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 + (-1) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3) = 0$ となる。また被験者 A がグーしか出さない場合の総得点の期待値 T' は、 $T' = 300 \times (1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times 1 \times \frac{1}{3} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{3}) = 0$ となる。さらに被験者 A がグーとチョキしか出さない、例えばサイコロの目が 1, 2, 3, 4, 5 のときグーを出し、サイコロの目が 6 のときチョキを出す場合の総得点の期待値 T'' は、 $T'' = 300 \times (1 \times (\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 0) \times \frac{1}{3} + 0 \times (\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 0) \times \frac{1}{3} + (-1) \times (\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 0) \times \frac{1}{3}) = 0$ となる。より一般的に言えば、被験者 A のグーを出す確率 p 、チョキを出す確率 q 、パーを出す確率 r としたときの総得点の期待値 $T_{p,q,r}$ は、 $T_{p,q,r} = 300 \times (1 \times \frac{p+q+r}{3} + 0 \times \frac{p+q+r}{3} + (-1) \times \frac{p+q+r}{3}) = 0$ となり、被験者 B と同時にじゃんけんの手を出す、どの戦略においても被験者 A は被験者 B に勝ち越すことができない。もしくは被験者 B のじゃんけんの手がどれも確からしい場合は、既知ではない被験者 B のじゃんけんの手を確率的に扱うことで、上述の確率推論の議論より勝ち越せない (また同様に負け越せない) ということが分かる。以上より、被験者 A と被験者 B が同時にじゃんけんの手を出す場合を OR (Ordinary strategy) の場合と呼ぶことにする。
- (b) **後出しじゃんけんの場合 (Smart strategy)** 被験者 A が被験者 B のじゃんけんの手をあらかじめ分かった上でじゃんけんの手を選択できる場合を考えてみよう。被験者 A のこのゲームのゴールは総得点の最大化であるため、何かしらの制約で負けないといけない場合を除いて、必ず被験者 B のじゃんけんの手に勝てる手を選択すれば、被験者 A は勝ち越すことができ、総得点の期待値も 0 点以上 (制約がない場合 300 点) になることが分かる。このように後出しじゃんけんの場合を SM (Smart strategy) の場合と以後呼ぶことにする。
- (c) **じゃんけんの出せる手の数が限定されている場合** さらにグーチョキパーの出せる回数が、100 回グーを出せる、100 回チョキを出せる、100 回パーを出せる、のように限定されている状況においても、同時に手を出す OR の場合の総得点の期待値は 0 点となり、後出しじゃんけんする SM の場合は $500/3 \simeq 166.67$ 点になることが分かる。つまり SM の方が勝ち越すことができる。
- (d) **300 回じゃんけんを 5 セット行う場合** 上記の 300 回のじゃんけんを 5 セット行う場合を考えてみよう。ここでも同時に手を出す OR の場合の総得点の期待値は上の議論から 0 点になり、何も制約のついていない後出しじゃんけんの手を出す SM の場合の総得点の期待値は 1500 点となる。さらに 5 セットすべての i 番目のじゃんけんに対して共通の手を出す、という制約条件が

ある場合においても、OR の場合は 0 点になり、SM の場合は $14000/27 \simeq 518.52$ 点になることが分かる。さらにじゃんけんの出せる手の数が限定されている状況 (c) を付け加えても OR の場合よりも SM の場合の方が総得点の期待値が高くなることが分かる。

以上より、じゃんけんの手に制約が設けられている場合でも、被験者 B のじゃんけんの手に合わせて、被験者 A はじゃんけんの手を選択できる自由度があるため、勝敗が不確実な OR の場合より勝敗が確実な SM の場合が、より高得点を望める戦略になっていることが分かる。

2.3 ポートフォリオ最適化問題における最適解の振る舞い

上記の議論から、統計的な振る舞いが既知である確率事象に対する最適化を行う場合、確率事象の確率に対する最適化 (上記の OR の場合) と確率変数に対する最適化 (上記の SM の場合) は異なる現象を扱っていることに注意する²。この考え方を踏まえて、ポートフォリオ最適化問題について再考してみよう。式 (2) のリスク関数を式変形すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\vec{w}) &= \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{i=1}^N x_{i\mu} w_i \sum_{j=1}^N x_{j\mu} w_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \left(\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{w}^T C \vec{w}\end{aligned}\quad (4)$$

と表すことができる。ただし行列 $C = \{C_{ij}\} \in \mathcal{M}_{N \times N}$ は、銘柄 i と銘柄 j の p シナリオ全体における収益率の相関である、

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu} \quad (5)$$

を i, j 成分とする対称行列である。さらに議論を簡単にするために、各銘柄の収益率が各々独立に標準正規分布に従っていると仮定する。これより従来研究の解析手順では、はじめにリスク関数を収益率で平均化し、平均化されたリスク関数に対する最適解を求めている。つまり、この例では、はじめに相関 C_{ij} の期待値を、

$$E[C_{ij}] = \begin{cases} \frac{p}{N} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

で求め、ポートフォリオ $\vec{w}$ に対する平均化された期待リスク関数 $E[\mathcal{H}(\vec{w})] = \frac{1}{2} \vec{w}^T E[C] \vec{w}$ は、

$$E[\mathcal{H}(\vec{w})] = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N w_i^2 \quad (7)$$

となることが分かる。ただし $E[C] = \{E[C_{ij}]\} \in \mathcal{M}_{N \times N}$ と $\alpha = p/N$ を用いた。これより、式 (3) の予算制約の下で期待リスク関数 $E[\mathcal{H}(\vec{w})]$ を最小にするポートフォリオ $\vec{w}$ は、モデルの対称性から均等投資型 $\vec{w}^* = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$ になることが分かり、期待リスク関数の最小値 $E[\mathcal{H}(\vec{w}^*)]$ は、 $E[\mathcal{H}(\vec{w}^*)] = \frac{N\alpha}{2}$ となる。しかしながら、従来から広く知られているこの解析的な議論は、数学的に簡素化したという点 (収益率を各々独立に同一分布に従うと仮定した) を除いても、実際の投資家に対して有益な知見を提供しているとは言えない。なぜなら、この最適化操作を取る前に収益率で平均化を行い、その平均化されたリスク関数に対する最適化を行う手順 (平均化 $\Rightarrow$ 最適化) は、先ほど

²情報統計力学 [8] では、OR の場合をアニール系の解析、SM の場合をクエンチ系の解析と呼んでいる。

のじゃんけんの議論の中の、(a)の議論に相当するからである。つまり(a)の議論では、被験者Bのじゃんけんの手を確率変数として考えるのではなく、確率変数を統計的に操作した確率として表すことで、議論の複雑性を回避している。明らかに上記のじゃんけんの議論からも、与えられた確率変数(被験者Bのじゃんけんの手)に対応した最適解を導く後出しじゃんけんの方が高得点が望めるため、このORの議論で求められた最適解は、実際の投資における、最適な投資戦略を評価しているとは言えない。むしろあらゆる収益率セットのそれぞれに対して最適かどうか数学的に保証されていない投資戦略を実務家に提供する危険性を含んでいることが分かる。

一方、後出しじゃんけんの場合(SMの場合)について考えてみよう。つまり、期首の時点($\mu = 0$)で、これから期末($\mu = p$)までに発生する収益率の統計性が既知であっても、実際に得られる収益率は既知ではないため、最適な投資戦略を選択することは難しいが、もしこの投資において後出しじゃんけんができるのであれば、上記のじゃんけんの議論からも明らかのように、最適な投資戦略を導くことができる。すなわち、期首の時点で、これから発生する収益率が既知であることが後出しじゃんけんの議論に相当するため、このときの最適解は、次のラグランジュ関数 $L = \frac{1}{2}\bar{w}^T C \bar{w} + \theta(N - \bar{w}^T \bar{e})$ を用いて求めることができ、 $p > N$ の場合、最適解 $\bar{w}^*$ は、

$$\bar{w}^* = \frac{NC^{-1}\bar{e}}{\bar{e}^T C^{-1}\bar{e}} \quad (8)$$

となる。ただし定ベクトル $\bar{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$ と行列 C の逆行列を用いた。これは与えられた収益率セットに対する数学的に保証された最適解であることが分かる。また $p < N$ の場合、行列 C の階数が行列のサイズ N より小さくなるため、つまり正則行列ではなくなるため、最適解を一意に定めることができない。

実際の投資において、後出しじゃんけんを行うことは原理的に不可能である。しかしながら、その投資市場における潜在的な投資リスクを評価するためには、後出しじゃんけんの議論から得られる、最小投資リスクを精密に評価する必要がある。そのため、本稿では原理的に不可能である後出しじゃんけんが可能であると仮定して、議論を進めることにする(後出しじゃんけんの仮定も後述する自己平均性を用いて仮定を外すことができる)。これより、収益率セットが与えられた下で求めた最適解の、つまり後出しじゃんけんにおける、1銘柄当たりの投資リスク $\varepsilon_{SM} = \frac{1}{N}\mathcal{H}(\bar{w}^*)$ は、 $p > N$ の場合、

$$\varepsilon_{SM} = \frac{N}{2\bar{e}^T C^{-1}\bar{e}} \quad (9)$$

と表すことができる。また $p < N$ の場合、 $\varepsilon_{SM} = 0$ となる³。一方、従来研究の解析手順で求まる、1銘柄当たりの投資リスク $\varepsilon_{OR} = \frac{1}{N}E[\mathcal{H}(\bar{w}^*)]$ は、

$$\varepsilon_{OR} = \frac{\alpha}{2} \quad (10)$$

と求めることができる。しかしながら、投資市場の潜在的な投資リスクを評価するために、仮に後出しじゃんけんができたとしても、最適解を評価する、もしくは最小投資リスクを評価するためには、行列 C の逆行列を求める必要があるが、逆行列を求めるために必要な計算量が $O(N^3)$ となるため、銘柄数 N の増大につれて、解析が困難になることが知られている⁴。この問題に対して、以下で議論する投資リスクの自己平均性という性質を用いることで、潜在的な投資リスクを評価できる後出しじゃんけんの状況を容易に解析することができる。

2.4 自己平均性について

ここでは投資リスクの自己平均性について議論するが、その前に、この自己平均性を説明するためにいくつか数理的な道具を準備しておこう。

³最適解は行列 C の0固有値に対応した固有ベクトルの線形和で構成されるため、 $\varepsilon_{SM} = 0$ となる。

⁴また与えられる収益率セットが変わるごとに逆行列を求めて最小投資リスクを評価しても、最小投資リスクがばらばらなものであるならば、投資システムの潜在能力を測るために最小投資リスクを収益率セットで平均評価する必要があるだろう。

数理統計学 (もしくは統計力学) まず数理統計学で広く用いられている逆温度 β の Boltzmann 分布 $P(\vec{w})$ は、与えられた収益率で定義される収益率行列 $X = \left\{ \frac{x_{ij}}{\sqrt{N}} \right\} \in \mathcal{M}_{N \times p}$ における事後確率として、

$$P(\vec{w}) = \frac{P_0(\vec{w})e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{w})}}{Z(\beta)} \quad (11)$$

で表すことができる。ただし事前確率 $P_0(\vec{w})$ は、式 (3) を満たすポートフォリオ $\vec{w}$ のときに 1 となり、それ以外は 0 となる確率であり、 $e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{w})}$ は尤度関数を表す。さらに分母の $Z(\beta)$ は分配関数と呼ばれる規格化定数であり、

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{w} P_0(\vec{w}) e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{w})} \quad (12)$$

で定義される。これより、式 (11) の Boltzmann 分布は確率測度の性質である、 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{w} P(\vec{w})$ を満たすことが分かる。さらに Boltzmann 分布 $P(\vec{w})$ を用いて、事後確率最大化 (MAP) 推定で得られた推定値 $\vec{w}^*$ は、リスク関数 $\mathcal{H}(\vec{w})$ を最小にするポートフォリオ $\vec{w}^*$ と一致することが知られている。つまり、 $\arg \max_{\vec{w}} P(\vec{w}) = \arg \min_{\vec{w}} \mathcal{H}(\vec{w})$ となる。また逆温度 β の性質として、

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\vec{w}) = \begin{cases} 1 & \vec{w} = \vec{w}^* \\ 0 & \vec{w} \neq \vec{w}^* \end{cases} \quad (13)$$

となるため⁵、ポートフォリオ $\vec{w}$ を Boltzmann 分布 $P(\vec{w})$ で平均化した $E[\vec{w}] = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{w} P(\vec{w}) \vec{w}$ やリスク関数 $\mathcal{H}(\vec{w})$ を Boltzmann 分布 $P(\vec{w})$ で平均化した $E[\mathcal{H}(\vec{w})] = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{w} P(\vec{w}) \mathcal{H}(\vec{w})$ は β の大きい極限で $\vec{w}^* = \lim_{\beta \rightarrow \infty} E[\vec{w}]$ や $\mathcal{H}(\vec{w}^*) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} E[\mathcal{H}(\vec{w})]$ となることが分かる。つまり Boltzmann 分布を用いることで、ポートフォリオ最適化問題を確率推論の枠組みで再定式化できることが分かる。

確率不等式 次に確率不等式の 1 つである、Chernoff 不等式についてみておこう。確率測度が既知である確率変数 Y と定数 η において、 $Y \geq \eta$ が成り立つ確率 $Pr[\eta \leq Y]$ は次の不等式を満たすことが知られている [9, 10, 11].

$$Pr[\eta \leq Y] \leq e^{-u\eta} E[e^{uY}] \quad (14)$$

ただし $u > 0$ は任意の変数である⁶。この確率不等式のことを Chernoff 不等式と呼ぶことにする。ここで任意の $u > 0$ に対して、この確率不等式が成り立つため、式 (14) の右辺の中で最小のものが 1 つは存在し、

$$\begin{aligned} Pr[\eta \leq Y] &\leq \min_{u>0} \{e^{-u\eta} E[e^{uY}]\} \\ &= e^{-\max_{u>0} (u\eta - \log E[e^{uY}])} \end{aligned} \quad (15)$$

の不等式が得られる。ここで式 (15) の指数を、

$$R(\eta) = \max_{u>0} (u\eta - \log E[e^{uY}]) \quad (16)$$

と置くことで、 $Pr[\eta \leq Y] \leq e^{-R(\eta)}$ の確率不等式が得られる。本稿ではこの $R(\eta)$ をレート関数と呼ぶことにする。また $\phi(u) = \log E[e^{uY}]$ がキュムラント母関数であるため、 $\phi(u)$ は凸関数であることが知られており、その凸関数の Legendre 変換である $R(\eta)$ も η に対して凸関数であることが分かる [10, 11, 12]。さらに $R(\eta)$ は非負であり、 $\eta < E[Y]$ のときに $R(\eta) = 0$ 、 $\eta > E[Y]$ のときに $R(\eta) > 0$ となることなどが知られている。

⁵ここでの Boltzmann 分布 $P(\vec{w})$ は式 (11) の定義から確率密度関数であるため、式 (13) の $\vec{w} = \vec{w}^*$ のときに 1 となるとは限らないが、問題の本質を押さえるために 1 と 0 を用いた。より正確にはデルタ関数を用いて $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\vec{w}) = \prod_{i=1}^N \delta(w_i - w_i^*)$ で定義される。

⁶ $W \geq 0$ のときに 1 となり、それ以外に 0 となる階段関数 $\Theta(W)$ を用いて Chernoff 不等式を証明してみよう。まずこの階段関数と $u > 0$ のときの指数関数 e^{uW} に対して、 $\Theta(W) \leq e^{uW}$ が成り立つため、さらに $Pr[\eta \leq Y] = E[\Theta(Y - \eta)]$ であることから式 (14) の不等式を証明することができる。さらに $Pr[\eta \geq Y]$ においても $Pr[\eta \geq Y] \leq e^{-u\eta} E[e^{uY}]$ の Chernoff 不等式が成り立つ。ただしここでは $u < 0$ である。

自己平均性 (もしくは大偏差統計) ポートフォリオ $\vec{w}$ が式 (11) で定義された Boltzmann 分布に従うとき, 1 銘柄当たりの投資リスク $\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w})$ がある定数 $\tilde{\varepsilon}$ よりも下回る確率 $Pr\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \leq \tilde{\varepsilon}\right] = E[\Theta(N\tilde{\varepsilon} - \mathcal{H}(\vec{w}))]$ は以下の Chernoff 不等式を満たすことが分かる.

$$\begin{aligned} Pr\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \leq \tilde{\varepsilon}\right] &\leq E\left[e^{N\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}\mathcal{H}(\vec{w})}\right] \\ &= e^{N\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{w} P(\vec{w}) e^{-\tilde{\beta}\mathcal{H}(\vec{w})} \\ &= \frac{e^{N\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon}} Z(\beta + \tilde{\beta})}{Z(\beta)} \end{aligned} \quad (17)$$

ただし $\tilde{\beta}$ は任意の正の変数であり, $Z(\beta + \tilde{\beta})$ は式 (12) で定義された分配関数 $Z(\beta)$ の β を $\beta + \tilde{\beta}$ に変更することで求めることができる. これより式 (17) のタイトな不等式は,

$$R_+(\tilde{\varepsilon}) = \max_{\tilde{\beta} > 0} \left\{ -\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{N} \log Z(\beta + \tilde{\beta}) + \frac{1}{N} \log Z(\beta) \right\} \quad (18)$$

を用いて, $Pr\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \leq \tilde{\varepsilon}\right] \leq e^{-NR_+(\tilde{\varepsilon})}$ と表すことができる. 同様の議論として, $\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \geq \tilde{\varepsilon}$ の条件を満たす確率では, $P\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \geq \tilde{\varepsilon}\right] \leq e^{-NR_-(\tilde{\varepsilon})}$ の Chernoff 不等式が成り立つ. ちなみにここで用いた $R_-(\tilde{\varepsilon})$ は,

$$R_-(\tilde{\varepsilon}) = \max_{\tilde{\beta} < 0} \left\{ -\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{N} \log Z(\beta + \tilde{\beta}) + \frac{1}{N} \log Z(\beta) \right\} \quad (19)$$

で求めることができる. さらに [6] の議論を用いれば,

$$R_+(\tilde{\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \leq \tilde{\varepsilon} \\ \beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}]) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}]) & E[\varepsilon_{\text{SM}}] \leq \tilde{\varepsilon} \leq E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

$$R_-(\tilde{\varepsilon}) = \begin{cases} \beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}]) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}]) & E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \leq \tilde{\varepsilon} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

と表すことができる. ただし $E[\varepsilon_{\text{SM}}]$ は 1 銘柄当たりの最小投資リスクの期待値を表す. これより, 2 つの確率不等式,

$$Pr\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \leq \tilde{\varepsilon}\right] \leq \begin{cases} 1 & E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \leq \tilde{\varepsilon} \\ e^{-N\left(\beta\left(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}] - \frac{1}{2\beta}\right) - \frac{1}{2} \log 2\beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}])\right)} & E[\varepsilon_{\text{SM}}] \leq \tilde{\varepsilon} \leq E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

$$Pr\left[\frac{1}{N}\mathcal{H}(\vec{w}) \geq \tilde{\varepsilon}\right] \leq \begin{cases} e^{-N\left(\beta\left(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}] - \frac{1}{2\beta}\right) - \frac{1}{2} \log 2\beta(\tilde{\varepsilon} - E[\varepsilon_{\text{SM}}])\right)} & E[\varepsilon_{\text{SM}}] + \frac{1}{2\beta} \leq \tilde{\varepsilon} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

を求めることができる. つまり式 (22) と式 (23) の関係より, 与えられた収益率行列 X に依存した最小投資リスク ε_{SM} は, 収益率行列 X で ε_{SM} を平均化した期待値 $E[\varepsilon_{\text{SM}}]$ の周りに局在しており, 銘柄数 N や逆温度 β の大きい極限で ε_{SM} はその期待値 $E[\varepsilon_{\text{SM}}]$ に一致することが分かる. このように収益率行列 (もしくは確率変数の組) X の関数として表される ε_{SM} が, システムサイズの大きい極限でその期待値 $E[\varepsilon_{\text{SM}}]$ に一致する性質のことを自己平均性と呼ぶことにする. また上述の議論から, 投資リスクは自己平均性を持っているため, 収益率に依存した後出しじゃんけんの解析で得られる最小投資リスクの評価は, 最小投資リスクの期待値 (アンサンブル平均) で置き換えることができる. さらに自己平均性が成り立つため, あらゆる収益率セットにおける最小投資リスクがその期待値に一致することから, 期首の時点で期末までの収益率が既知である必要があった後出しじゃんけんの解析が, 定常性の仮定より, これまでに得られた収益率の実現値を用いた解析に置き換えることができる. この点も自己平均性の利点である.

2.5 最適解の振る舞い

最小投資リスクの期待値評価は、ランダム行列理論を用いて既に先行研究 [7] で行われており、 $\alpha = p/N$ を一定に保ちながら銘柄数 N の大きな極限で解析的に表すことができる。つまり $\alpha > 1$ のとき、

$$\varepsilon_{\text{SM}} = \frac{\alpha - 1}{2} \quad (24)$$

となり、 $\alpha < 1$ のとき $\varepsilon_{\text{SM}} = 0$ となる。これは明らかに $\varepsilon_{\text{OR}} = \frac{\alpha}{2}$ よりも小さいことが分かる。また投資リスク以外の最適解の評価指標として、集中投資度 q を次のように定義する。

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 \quad (25)$$

この定義から、均等投資型 $\vec{w} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$ の場合、 $q = 1$ となり、集中投資型、例えば $\vec{w} = (N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^N$ の場合、 $q = N$ と表すことが分かる。つまり集中投資度 q は、集中投資（もしくは分散投資）を行っているかどうかを測る指標であると解釈することができる。また $q - 1$ は、 $q - 1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(w_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \right)^2$ と表すことができるため、 $q \geq 1$ を満たす評価指標であることが分かる。また q に集中投資度の解釈を与えるために予算制約を従来用いられている $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ ではなく $\sum_{i=1}^N w_i = N$ としたことも式 (3) の利点である。

これより最適解の評価指標 q は、先行研究 [7] の議論を用いて、 $\alpha > 1$ の場合、

$$q_{\text{SM}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad (26)$$

となり、 $\alpha < 1$ の場合、 $q_{\text{SM}} \rightarrow +\infty$ に漸近することが分かる。一方、OR の議論では最適解が均等投資型であるため、この評価指標は、 $q_{\text{OR}} = 1$ となることが分かる。明らかに $q_{\text{OR}} < q_{\text{SM}}$ であることが分かる。また集中投資度 q は定義から C の固有値 λ_i ($i = 1, \dots, N$) を用いて、 $q = E[\lambda^{-2}] / (E[\lambda^{-1}])^2$ と表すことができ、また最小固有値は $\lambda_{\min} = 1 + \alpha - 2\sqrt{\alpha}$ となるため、 $\alpha \rightarrow +1$ となるにつれて、最小固有値が 0 に漸近するため、 q は発散する傾向が見られる。この結果は実際に $\alpha = p/N \simeq 1$ のとき、銘柄数 N に対してシナリオ数 p が同程度であるため、各銘柄ごとに収益率のばらつきが目立ち、与えられた収益率セットの中で、収益率のより高い銘柄に集中的に投資をすることが最適であることが直感的に分かる。つまり式 (26) はこの直感的な議論から得られる、最適解が集中投資型になることと整合性が取れていることが分かる。さらに $\alpha = p/N \gg 1$ となる場合、銘柄数 N に比べてシナリオ数 p が多くなるため、収益率情報が多く、ほとんどの銘柄の収益性が等しくなるため、この場合においても、式 (26) は直感的な議論から得られる、最適解が均等投資型になることと整合性が取れていることが分かる。SM の場合の $q_{\text{SM}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ の結果の方が OR の場合の $q_{\text{OR}} = 1$ より、これら 2 つの極限を正確に表すことができることが示された。

3 まとめと今後の課題

本稿では、ポートフォリオ最適化問題の中で代表的なモデルの 1 つである平均分散モデルについて再考し、その最適解の潜在的な投資リスクを評価するために、様々な数理的な道具立てを行い、自己平均性を用いた理論解析の可能性について議論した。じゃんけんの議論からも明らかのように、確率事象に対する最適化として、これまでの OR で議論されてきた、リスク関数を収益率で初めに平均化し、その平均化されたリスク関数に対して最適化を行って得られた最適解（均等投資型）は、あらゆる収益率セットのそれぞれの最適解（式 (8)）と比べて、明らかに投資リスクが上回るため、実際の投資家に対して有益な知見を提供しているとは言えないことが示された。一方、実際の投資家が行う投資の判断基準となる、投資システムの潜在的な投資リスクを評価するためには、後出しじゃんけん

の解析を行う必要があるが、(1) 期首の時点で後出しじゃんけんを行うことが原理的に不可能である、(2) 最適解の評価に必要な逆行列の計算量が銘柄数の3乗に比例する、(3) 潜在的な投資リスクは、最小投資リスクを収益率セットで平均評価を行う必要がある、などの問題点が存在していた。その問題に対して我々は、定常的な投資市場を仮定することで、後出しじゃんけんの解析と、これまで得られた収益率セットにおける解析が同一視できることを述べ、さらに投資リスクにおいて自己平均性が成り立つことを示し、投資システムの潜在的な投資リスクを評価した。また集中投資度を定義し、ORの場合とSMの場合を比較したとき、SMで得られた議論の方が $\alpha \rightarrow +1$ と $\alpha \gg 1$ の2つの状況における最適解の振る舞いを再現できることを明らかにした。

今後の課題として、本稿では平均分散モデルのもっとも簡単な場合として、予算制約のみを制約条件として扱ってきたが、実用的には期待収益の制約条件や空売り規制が行われている場合に対しても最小投資リスクや集中投資度の潜在能力を解析する必要があるだろう。特に先行研究で用いられたレプリカ解析や確率伝搬法、ランダム行列理論などを併用することで、これらの課題に対しても解析することができるだろう。また平均分散モデル以外のリスク指標モデルとして、絶対偏差モデルや期待ショートフォールモデルなどが広く用いられているが、これらのリスク指標モデルに対しても考察する必要があるだろう。このように、これまでのOR研究において、ポートフォリオ最適化問題における様々なモデルが議論されてきたが、多くの場合、後出しじゃんけんの(視点を導入した)解析を行っていない、もしくは不十分である。そのため投資システムの潜在能力を精密に議論する観点で言えば、ポートフォリオ最適化全体が未開拓分野であり、多くの課題が残っているだろう。

謝辞

本稿は、2013年11月に開催された京都大学数理解析研究所共同利用研究集会「不確実性の下での数理的意思決定の理論と応用」における著者の講演内容に基づいている。同研究集会における発表講演の機会を与えていただいた金正道氏に深く感謝する。また本研究を推敲するにあたり、若井亮介氏、嶋崎善章氏、有菌育生氏、竹本康彦氏、郭偉宏氏から大変有益なコメントをいただいた。彼らに深く感謝する。さらに本研究の一部は、科研費若手研究B(No. 24510192)のサポートを受けて行われた。

参考文献

- [1] H. Markowitz: The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91, (1952), H. Markowitz: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, J. Wiley and Sons, New York, (1959).
- [2] 今野浩, 理財工学I-平均・分散モデルとその拡張-, 日科技連, (1995).
- [3] A. K. Dixit and R. S. Pindyck: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, (1994).
- [4] S. Ciliberti and M. Mézard: European Physical Journal B. Vol. 27, No. 57, pp 175-180, (2007).
- [5] S. Pafka and I. Kondor: Physica A, Vol. 319, pp. 487-494, (2003).
- [6] 新里隆, 安田宗樹: 信学技報, Vol. 110, No. 265, pp. 257-264, (2010), T. Shinzato and M. Yasuda: preprint into <http://arxiv.org/abs/1008.3746>, (2010).
- [7] 若井亮介, 新里隆, 嶋崎善章: 日本経営工学会誌, Vol. 65, No. 1, (2014).
- [8] H. Nishimori: *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing*, Oxford University Press, (2001).
- [9] R. G. Gallager: *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, (1968).
- [10] 新里隆, 郭偉宏: 日本経営工学会論文誌, Vol. 62, No. 4, pp. 164-173, (2011).
- [11] 浅岡伸伍, 新里隆, 郭偉宏: 日本経営工学会論文誌, 投稿中.
- [12] 田崎晴明: 熱力学-現代的な視点から-, 培風館, (2000).