

代数曲線の導手、判別式と数論曲面の Noether 公式

東大 理 斎藤 毅

§1. 導手・判別式公式.

古典的な分岐理論における基本的な公式の1つに、導手・判別式公式というものがあります。これは、剰余体が完全体であるような離散付値体の有限次分離拡大において、その導手と判別式が等しいことを主張するものです。ここでの目標は、この公式の類似をそのような体上の曲線について定式化し、証明することです。この公式は、その種数=1の場合として、Ogg の公式 [O] を含んでいます。種数=2の場合には、86年1月に東大で行われたシンポジウムで、上野氏が関連した話題について講演しています [U1] [U2]。なお証明等詳しいことを知りたい方は [S1] [S2] をみて下さい。

以下つねに S を剰余体が代数閉であるような Hensel 離散付値環の Spec とする。すると一般に S 上の有限型 scheme X に対し、 X の導手とよばれる整数を定義することができ、導手は、 $\mathbb{Z}$ 上有限型の scheme の Hasse-Weil zeta の函数等式の定

数項にあらわれると予想されており、整数論的にも重要な不変量である。以下 X を S 上の proper flat な正則 scheme で generic fiber は smooth なものとする。このとき X の Artin 導手 $\text{Art}(X/S)$ を S で可逆な素数 ℓ についての ℓ 進 cohomology を用いて次のように定義する

$$\text{Art}(X/S) = \chi(X_{\bar{\eta}}) - \chi(X_S) + \sum_S H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_{\ell}).$$

ここで χ は ℓ 進 Euler-Poincaré 標数、 $\eta(\bar{\eta})$ および S はそれぞれ S の (geometric) generic point と closed point. 最後の項は $X_{\bar{\eta}}$ の ℓ 進 cohomology の Swan 導手の交代和です。Swan 導手というのは惰性群 $I = \text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ の有限次 ℓ 進表現 V に対して定まる正の整数 $\sum_S V$ のことで、ここでは詳しい定義は省略して、次の性質だけを注意しておきます。pro-有限群 I は完全系列 $1 \rightarrow P \rightarrow I \rightarrow \prod_{p \neq \ell} \mathbb{Z}_p \rightarrow 1$ をみたします。ここで P は S の剰余体 $k(S)$ の標数で P は I のただ 1 つの pro- p Sylow 部分群です。Swan 導手 $\sum_S V$ というのは P が V へどのくらい大きく作用するか、つまり V の wild ramification のほけし I をあらわす不変量で $\sum_S V = 0$ というのが P が V へ自明に作用することの同値な条件となっている。Artin 導手の例として、 K を S の分身体 $k(\eta)$ とし L を K の有限次分離拡大、 X が S の L での整閉包の場合を考えると、 $\text{Art}(X/S)$ は古典的な体の拡大 L/K の Artin 導手と一致する

次に判別式について考えます。\$X\$ を上のように \$S\$ 上の proper flat な正則 scheme で generic fiber が smooth なものとする。まず古典的な場合、つまり \$f: X \rightarrow S\$ が finite な場合を考える。するとこのとき generic point では同型であるような可逆 \$\mathcal{O}_S\$ 加群の間の標準写像 \$\Delta: (\det f_* \mathcal{O}_X)^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{O}_S\$ が \$x_1, \dots, x_n \otimes y_1, \dots, y_n\$ に \$\det(\text{Tr}_S(x_i y_j))\$ を対応させることにより定義される。ここで \$n\$ は \$X\$ の \$S\$ 上の次数で \$\det f_* \mathcal{O}_X\$ は \$\wedge^n f_* \mathcal{O}_X\$ である。そして判別式は \$\Delta\$ の余核の長さとして定義する。以下この余核の長さを位数とよび \$\text{ord}\$ と書く。はじめに述べた古典的な導手、判別式公式とは、ここで \$\text{Art}(X/S) = \text{ord} \Delta\$ という公式のことである。

さて、\$X\$ が \$S\$ 上の曲線の場合を考える。以下 \$S\$ に上の \$X\$ が \$S\$ 上 geometrically connected で相対次元が 1 という条件をみたすものとする。今後簡単のためこのような \$X\$ を \$S\$ 上の正則な曲線とよぶことにする。判別式を定義するためには、上のような標準写像が必要だが、それは次の定理により与えられる。

定理 (Deligne [D]). \$g: Y \rightarrow T\$ を proper smooth geometrically connected で相対次元が 1 とある。このとき次の標準同型が一意的に存在する

$$\Delta: \det Rg_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2} \longrightarrow (\det Rg_* \omega_{Y/T})^{\otimes 12}.$$

ここで $\omega_{Y/T}$ は相対標準層 $\mathcal{O}_T$ の場合は $\Omega^1_{Y/T}$ と同型. また $K \in$ 完全複体とし $K = (K^i)$ 各 K^i は局所自由としたとき $\det K$ は可逆層 $\bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} (\wedge^{\text{rk} K^i} K^i)^{\otimes (-1)^i}$ を表わす. この場合は $r \in Y$ の種数とすると

$$R^i g_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2} = \text{階数 } r-3 \text{ の局所自由加群 } (i=0) = 0 \quad (i \neq 0)$$

$$R^i g_* \omega_{Y/T} = \text{階数 } r \text{ の局所自由加群 } (i=0) \cong \mathcal{O}_T (i=1)$$

$$= 0 \quad (i \neq 0, 1)$$

だから.

$$\det Rg_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2} \cong \wedge^{3g-3} g_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2}, \quad \det Rg_* \omega_{Y/T} \cong \wedge^r g_* \omega_{Y/T}.$$

ここでは [D] を引用したが. この標準同型は以前から知られているもので Mumford [M] にまで遡るものである. この数論曲面の Noether 公式への応用は Faltings, [F] によって見出された. また最近では物理の string 理論への応用が知られている.

さて $f: X \rightarrow S$ を上のように S 上の正則な曲線とすると

$$\Delta: \det Rf_* \omega_{X/S}^{\otimes 2} \longrightarrow (\det Rf_* \omega_{X/S})^{\otimes 13}$$

が上の定理をもついて少なくとも S の生成点 y 上での同型として定義される. このとき $\text{ord } \Delta$ は $\pi \in \mathcal{O}_S$ の素元とすると $\pi^n \Delta$ が同型となる唯一の整数として定義される. そこで X の判別式 Δ を $\text{ord } \Delta$ と定義する. すると曲線についての導手, 判別式公式というのは次の定理である.

定理 1. $f: X \rightarrow S$ S 上の正則な曲線とすると.
 $-Arc(X/S) = ord \Delta$.

X の closed fiber X_S が X の被約な正規交叉因子であるとき.
 X を S 上の semi-stable 曲線ということにする. このとき右辺
 $-Arc(X/S)$ は X_S の特異点の数と一致するか. この場合には
 Deligne が [D] で上に引用した定理を示したとき定理 1 も同
 時に証明した. われわれは後に定理 1 をこの場合に帰着
 することによって証明する. この証明はあとまわしにして.
 ここでは Δ の定理の系と応用について先に述べる.

系 1 S 上の η 上定義された Δ は実は S 上 $\mathbb{Q}$ 加群の導同型.

$$\Delta: \det Rf_* \omega_{X/S}^{\otimes 2} \rightarrow (\det Rf_* \omega_{X/S})^{\otimes 3}$$

を定義する. さらに Δ が同型となるためには. $f: X \rightarrow S$ が
 smooth であるかあるいは種数 g 1 で X_S の被約化が smooth で
 あることが必要十分.

証明. 定理 1 により. つねに $-Arc(X/S) \geq 0$ であることと.
 $-Arc(X/S) = 0$ かつ上の条件と同値であることを示せばよい.
 今. $-Arc(X/S) = \chi(X_S) - \chi(X_{\bar{\eta}}) + \sum H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ であり.
 (右辺) ≥ 0 であることと. (右辺) $= 0$ なら上の条件をみたすこ
 とはよく知られている. 逆は種数 1 の曲線 X かつ上の条件をみ
 たせば. D が H^1 の自明に作用することからわかる.

種数が1の時は上に定義した判別式は古典的なものと一致する. $g: Y \rightarrow T \in \text{proper smooth \& geometrically connected}$ で相対次元が1種数が1とする. すると $\det Rg_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2} \cong \det Rg_* \omega_{Y/T}$ であって Δ は古典的な同型 $\Delta: \mathcal{O}_T \rightarrow (\det Rg_* \omega_{Y/T})^{\otimes 12}$ になる. ところで定理1から次の Ogg の定理が系として入る.

系2. ($\text{Ogg}[0]$). X_η を η 上の楕円曲線とする. すると $\text{proper smooth geometrically connected}$ で種数が1で有理点をもつ曲線とする. すると $f: X \rightarrow S \in X_\eta$ の Néron model となる極小正則 model と $g: X' \rightarrow S \in X_\eta$ の極小 Weierstrass model とする. すると

$$-\text{Arc}(X/S) = \text{ord } \Delta'_{X'/S}.$$

証明 定理1より $\text{ord } \Delta_{X/S} = \text{ord } \Delta'_{X'/S}$ を示せばよい. これは X が minimal であることから $\text{ord } \Delta_{X/S} = \text{ord } \Delta'_{X'/S}$ であり. また X' が特異点として高々有理2重点しかもたず X のその極小正則 model であることから $\text{ord } \Delta_{X/S} = \text{ord } \Delta'_{X'/S}$ であることから従う.

種数が2の時の古典的な判別式との関係および上野氏の結果との関係についておぼろげに述べる.

次に数論曲面の Noether 公式への応用について述べる. B を代数体の整数環の Spec とする. B 上の数論曲面とは, $\text{proper flat geometrically connected}$ な正則 B -scheme $f: X \rightarrow B$ で相

対次元が1であるものと定義する. 可逆 $\mathcal{O}_B$ 加群 $\mathcal{L}$ とその無限素点 $v \in B(\mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_B, \mathbb{C})$ での Hermitite 計量 $\|\cdot\|_v$ の複素共役で安定なものの組のことを B 上の Arakelov 可逆層という. B 上の Arakelov 可逆層 $\mathcal{L}$ に対しその次数 $\deg \mathcal{L} \in \mathbb{R}$ と $\mathcal{L}$ の $\mathcal{O}$ でない任意の有理切断とすると

$$\deg \mathcal{L} = \sum_{v \in B_0} \text{ord}_v \mathcal{L} \cdot \log g_v - \sum_{v \in B(\mathbb{C})} (\log \|\mathcal{L}\|_v)$$

と定義する. ここで B_0 は B の有限素点全体の集合で $v \in B_0$ に対し $\mathcal{O}_v$ は v での剰余体の位数である. さて $f: X \rightarrow B \in B$ 上の数論曲面としたとき, 各整数 i に対し, $\det Rf_* \omega_{X/B}$ には標準的な Arakelov 可逆層の構造が定義されているので, その次数を定めることができる. すると Noether 公式とは次の公式である.

定理 2. B 上の数論曲面 $f: X \rightarrow B$ に対し,

$$\begin{aligned} 13 \deg \det Rf_* \omega_{X/B} &= \deg \det Rf_* \omega_{X/B}^{\otimes 2} \\ &= - \sum_{v \in B_0} \text{Ar}_v(X/B) \cdot \log g_v + \sum_{v \in B(\mathbb{C})} \delta'(X_v) \end{aligned}$$

ここで $v \in B_0$ に対し $\text{Ar}_v(X/B)$ は $B_v \in B$ の v での strict hensel 化としたときの $\text{Ar}(X_{B_v/B_v})$ であり, $v \in B(\mathbb{C})$ に対しては $\delta'(X_v)$ は Riemann 面 X_v の invariant であり, Faltings が定義した δ の種数のみによる定数倍と一致する.

定理 2 は定理 1 よりたやすく示すことができる. また $f: X \rightarrow B$ が semi stable な場合には Faltings が証明している [F].

ここで導手・判別式公式の意味について考える。まず曲線の判別式の幾何的あるいはmoduli的な解釈について述べる。
 $M_g, \overline{M}_g$ をそれぞれ種数 g の smooth 曲線あるいは stable 曲線の fine moduli stack とするとき $\Delta = \overline{M}_g - M_g$ (被約な $\overline{M}_g$ の正規交叉因子) となる。 $f: X \rightarrow S$ と上のように S 上の正則な曲線とすると X はあたかも S から $\overline{M}_g$ への射を定めているかのように考えることかできて、さらに $\text{ord } \Delta$ は因子 Δ の S 上のひきもどしの次数すなわち S と Δ の交点数と解釈することかできる。
 X が極めて semi stable のときは X は実際この射を定めていてこのとき交点数は X_S の特異点の数となる。一方このとき $\text{ord } \Delta$ もそうなる。上の解釈の正当化はある程度こうしてできる。
さて一般にこのように考えると判別式とは、曲線の bad reduction を moduli 的にはかった量といえる。一方導手は同じものを cohomology 的にはかった量であるから、導手・判別式公式とは、その2とおりのはかり方が一致するという公式であるということになる。

次にこの公式を Riemann-Roch とする解釈について述べる。
 S を上のとおりとし、 $f: X \rightarrow S$ を proper flat で generic fiber が smooth な正則 S -scheme で相対次元が pure に r とする。このとき X の導手は $-\text{Arf}(X/S) = \deg (-1)^{r+1} f_* C_{r+1}(\Omega_{X/S}^1)$ となると予想される。このことの正確な意味は後述のべる。一方判

別式については、まず古典的な $r=0$ のときには、 $(\det f_* \mathcal{O}_X)^{\otimes 2}$ と $\mathcal{O}_S$ のずれだから $-2c_1(f_* \mathcal{O}_X)$ と解釈される。したがって導手判別式はこの場合 $-2c_1(f_* \mathcal{O}_X) = f_*(c_1(\Omega^1_{X/S}))$ つまり Riemann-Roch 公式 $c_1(f_* \mathcal{O}_X) = -\frac{1}{2} f_*(c_1(\Omega^1_{X/S}))$ とみなされる。ところでこれは Riemann-Roch から導手判別式公式を導く証明とはならないことに注意する。その理由は、証明のためには $CH_0(S) = \mathbb{Z}$ の中で考えなくてはならないのに、Riemann-Roch は $CH_0(S) = 0$ の中でしか考えられていなかったからである。この点を正当化するためには、局所化した Chern 類の概念を用いる必要がある。そしてこの時、導手判別式公式を示すということとは、これに対し局所化した Riemann-Roch を示すということになる。

さて次に同じ留保のもとで $r=1$ の場合を考える。すると $c_1(Rf_* \omega_{X/S}^{\otimes 2}) - c_1(Rf_* \omega_{X/S}) = f_*(c_1(\Omega^1_{X/S})^2)$ と $c_1(Rf_* \mathcal{O}_X) = c_1(Rf_* \omega_{X/S})$ を用いることにより、導手判別式公式、

$$13 \ c_1(Rf_* \omega_{X/S}) - c_1(Rf_* \omega_{X/S}) = f_* c_2(\Omega^1_{X/S}) \quad \text{は}$$

$$c_1(Rf_* \mathcal{O}_X) = \frac{1}{12} f_*(c_1(\Omega^1_{X/S})^2 + c_2(\Omega^1_{X/S}))$$

と解釈することができ、このように $r \leq 1$ のときには、導手判別式公式を Riemann-Roch とみる解釈があるが、 $r \geq 2$ のときは、このように $f_* c_{r+1}(\Omega^1_{X/S})$ を可逆層の順像の c_1 だけでかくことはできないので、それに応じて判別式の定義さらに導手

判別式公式はないと考えられる。

§2. 証明の概略. 局所化された chern 類.

ここでは定理1の証明の概略についてのべる. 証明は曲線の stable reduction theorem を用いて. すでに Deligne が示していた semi-stable な場合に帰着することによって行なわれる.

このためには. base を拡大するときの両辺の変化が等しいことを示せば十分だが. それは次のようにして示れる. まず両辺の変化を局所化された chern 類で書き表わす. これは.

$\text{ord } \Delta$ の方は直ちにできるが. $\text{Art}(X/S)$ の方は Bloch による導手公式を用いる. これはそれ自体重要な結果なのであとで説明する. こうして示すべきことはある局所化された chern 類のあいだの等式ということになる. そしてこの等式は局所化された Riemann-Roch 公式から導かれるので. これを示すことにより定理の証明が完結する. ここでは証明の細かい点にはふれず Bloch の導手公式と局所化された Riemann-Roch 公式について説明する.

まず準備として局所化された chern 類について説明する. 一般に scheme X と $\mathcal{O}_X$ -加群の完全複体 K に対し. K の右番目の chern 類 $c_2(K)$ が $H^2(X)$ に定義されるが. 局所化された chern 類というのは次のようなものである. $U \in X$ の open

subscheme の complement を Z とすると chow 群の完全系列.

$CH(Z) \rightarrow CH(X) \rightarrow CH(U) \rightarrow 0$ がある. ここで $C_B(k)$ が.

$(H^B(U))$ で消えるときには, $(H_*(Z))$ の元で $C_B(k)$ にくるような自然な元を定義できることがある. これを Z に局所化した k の chern 類とよび $C_{B,Z}^X(k)$ とかく. 具体的な構成については [B] [Fu] を参照して下さい.

さて S を前のとおりとし, $f: X \rightarrow S$ を separated, flat な有限型正則 S -scheme で相対次元 r かつ generic fiber が smooth なものとする. するとこのとき $\Omega_{X/S}$ は X_0 上では階数 r の局所自由加群なので $\text{Cr}_{r+1}(\Omega_{X/S}^1(X_0)) = 0$ となる. そこで局所化した chern 類 $\text{Cr}_{r+1}^X(\Omega_{X/S}^1)$ が $(H_0(X_S))$ 内に定義される. Bloch はこの 0-cycle を定義し次の予想を立てた.

予想 (Bloch). 上の $f: X \rightarrow S$ がさらに proper ならば,

$$- \text{Arc}(X/S) = \deg (-1)^{r+1} f_* \text{Cr}_{r+1}^X(\Omega_{X/S}^1).$$

ここで $\deg$ は標準同型 $(H_0(S)) \cong \mathbb{Z}$ のことである. さらに Bloch は $r=1$ のときには実際にこの予想を証明した [B]. これか上に述べた Bloch の導手公式である.

次に局所化した Riemann-Roch 公式について述べる. まずふつうの Riemann-Roch から復習する. これは $f: Y \rightarrow T$ を proper locally of complete intersection な射とし F を $\mathcal{O}_Y$ -加群の完全複体とし T とし, $\text{ch } Rf_* F = f_*(\text{ch}(F) \cap \text{td}(L_{Y/T})^*)$ が $CH(T) \otimes$

となりたつというものである. ここで ch は Chern 指標, td は Todd 類, $L_{Y/T}$ は余接複体, $*$ は奇数次の項を (-1) 倍する作用素である. これから説明する局所化した Riemann-Roch とは双有理写射 $\pi: Z \rightarrow Y$ についての両辺のいずれを局所化しようというものである. $U \subset T$ の open subscheme で R をその complement とし, $\pi: Z \rightarrow Y$ を proper T -morphism で U 上では同型を導くものとし Z_U, Y_U はそれぞれ Z, Y で dense で $g = f \circ \pi \in \text{locally of complete intersection}$ とする. このとき $Rf_* F \rightarrow Rg_* L\pi^* F$ の mapping cone $[Rf_* F \rightarrow Rg_* L\pi^* F]$ は T 上の完全複体で U 上では非輪状なので左辺の差 $ch(Rg_* L\pi^* F) - ch(Rf_* F)$ は $ch_P^T([Rf_* F \rightarrow Rg_* L\pi^* F])$ として $CH(R)_\mathbb{Q}$ 内に定義される. 一方 $L_{Z/Y} \in L\pi^* L_{Y/T} \rightarrow L_{Z/T}$ の mapping cone とおくと $g_*(ch(L\pi^* F) \cap td(L_{Z/T})^*) = f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^* \cap \pi_*(L_{Z/Y})^*)$ となる. ここで $L_{Z/Y}$ は Z_U 上非輪状となるので, $\pi_*([Z]) = [Y]$ に注意すると $td(L_{Z/Y})^* - [Z]$ は $CH(Z_p)_\mathbb{Q}$ 内に定義される. (たか, 2 右辺の差

$$\begin{aligned} & g_*(ch(L\pi^* F) \cap td(L_{Z/T})^*) - f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^*) \\ &= f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^* \cap \pi_*(td(L_{Z/Y})^* - [Z])) \end{aligned}$$

も $CH(R)_\mathbb{Q}$ 内に定義することから得る. よって次の局所化した Riemann-Roch 公式の予想を立てることから得る.

予想 上の定義のもとで $CH(R)_\mathbb{Q}$ において次の公式が成立する

$$\begin{aligned} \text{ch}(Rg_* L_{Y/T}^* F) &= \text{ch}(Rf_* F) \\ &= f_* (\text{ch}(F) \cap \text{td}(L_{Y/T})^* \cap \pi_* (\text{td}(L_{Z/Y})^* - [Z])) \end{aligned}$$

この予想を全く一般に示すことはできていない。しかし定理1の証明には十分である次の仮定のもとで示すことはできる。すなわち

定理3 T が正則schemeで Y が3次元正則schemeの被約な因子とある。 Z が Y の特異点の解消。 R が T の正則開部分schemeなら上の予想はなりたつ。

ここまでに述べてきたようにして、定理1の証明が与えられる。この節では以下定理3の証明についてのべる。まず広中の2次元schemeの特異点の解消[H]により、 Y は正則な開部分scheme C でそれにあって Y が法平坦であるものを中心にして次々にblow upすることにより、特異点の解消ができることかわかる。このことから、各blow upごとに予想がなりたつことを示せばよい。そしてそれは実際に計算することによって確かめる。詳しいことは省略するが、だいたいどのような計算をするかは、次の例で想像できると思う。

例 $T \in$ 正則2次元局所環のSpec、 Y をその被約な因子とし、 $C \in T$ の閉点とある。 $Z \in Y$ の C を中心としたblow upとする。このとき $f: Y \rightarrow T$ 、 $\pi: Z \rightarrow Y$ 、 $R = \{C\}$ と $F = \mathcal{O}_Y$ の場合を考える。 $\text{Ch}_0(R) = \mathbb{Z}$ と標準的に同一視する

すると左辺は.

$$\mathrm{ch}(Rf_* L\pi^* F) - \mathrm{ch}(Rf_* F) = \mathrm{length}(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_Y)$$

一方右辺は Y の C での重複度を ℓ とし、 P の C での $\mathrm{blow}_{\mathrm{up}} Q$ の例外因子を E とおくと.

$$\begin{aligned} & \mathrm{td}(L_{Z/Y})^* - 1 \\ &= -\frac{1}{2} (c_1(\Omega^1_{Q/P}|_Z) - c_1(N_{Z/Q}) + c_1(\pi^* N_{Y/P})) \\ &= -\frac{1}{2} (c_1(\Omega^1_E|_Z) + c_1(\mathcal{O}(-\ell E)|_Z)). \end{aligned}$$

そこで $(E, Z) = \ell$ より.

$$\pi_* (\mathrm{td}(L_{Z/Y})^* - 1) = \frac{1}{2} (\ell^2 - \ell).$$

(したがってこの場合上の Riemann-Roch はよく知られた等式

$$\mathrm{length}(\pi_* \mathcal{O}_Z / \mathcal{O}_Y) = \frac{1}{2} \ell(\ell-1)$$

となる.)

§ 3. 種数 2 の場合.

この節では、種数が 2 のときにより用いた判別式と古典的な判別式との関係をおいて、それが標準因子の base locus で記述されることを示す. この結果は城崎でのミニポジウムでは話さなかったものです. S を今までとおり、剰余体が代数閉な Hensel 離散付値環の Spec とし、 X を S 上の正則な曲線とすると $\pi = \pi_X$ は X の種数が 2 と仮定する. この節では § 1 で定義した $\mathrm{ord} \Delta$ と少し異なる古典的な判別式 $\mathrm{ord} \Delta'$ を定義して $\mathrm{ord} \Delta$ と $\mathrm{ord} \Delta'$ の違いを調べる.

$g: Y \rightarrow T$ is proper smooth な geometrically connected 写像で種数が2とする. §1では標準同型

$$\Delta: \det Rg_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2} \simeq (\det Rg_* \omega_{Y/T})^{\otimes 3}$$

を用いて判別式を定義した. ここでは種数が2だから, 標準写像

$$S^2 g_* \omega_{Y/T} \rightarrow g_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2}$$

は同型となる. これから標準同型

$$\Delta_1: (\det R_* \omega_{Y/T})^{\otimes 3} \simeq \det Rg_* \omega_{Y/T}^{\otimes 2}$$

がえられる. この Δ と Δ_1 から 重さ10 の Siegel 保型形式に対応する古典的な判別式を定める標準同型

$$\Delta': \mathcal{O}_T \simeq (\det Rg_* \omega_{Y/T})^{\otimes 10}$$

が直ちに定義される. この Δ' によって, $\text{ord } \Delta'$ が §1 の $\text{ord } \Delta$ のように S 上の種数2 の正則曲線に対し定義される. 同様に $\text{ord } \Delta_1$ を定義すると $\text{ord } \Delta' = \text{ord } \Delta + \text{ord } \Delta_1$ となる.

次に S 上の種数2 の正則曲線の base locus について考える. 標準写像 $f^* f_* \omega_{X/S} \rightarrow \omega_{X/S}$ を κ とする. 種数 ≥ 1 の smooth 曲線の標準因子は base point free であるから κ は generic fiber では全射になる. I を κ の余核の零化域. D を X の因子で $I_D \supset I$ かつ I_D/I が長さ有限となるために κ のもの. R を X の $\mathcal{O}$ -cycle $\sum_{x \in X} \text{length}_{\mathcal{O}_{X,x}}(I_D/I)_x$ とする. すると D と R の和は X の閉 fiber X_s にはいる. この節の主結果は次のとおりである.

定理 4. 上の記号の下で.

$$\text{ord } \Delta_1 = 2c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + \deg R$$

系1 $\omega_{X/S}$ が base point free ならば Δ_1 は $\mathbb{Q}$ 加群の標準同型

$$\Delta_1 : (\det Rf_* \omega_{X/S})^{\otimes 3} \xrightarrow{\sim} \det Rf_* \omega_{X/S}^{\otimes 2}$$

を定める. また X が minimal ならば Δ_1 は $\mathbb{Q}$ 加群の準同型を定めさらにこれが同型であるためには $\omega_{X/S}$ が base point free であることが必要十分.

系1の証明. まず Δ_1 が準同型あるいは同型を定めることとは $\text{ord } \Delta_1 \geq 0$ あるいは $= 0$ と同値であることに注意する. $\omega_{X/S}$ が base point free ならば定理4より $\text{ord } \Delta_1 = 0$. X が minimal とある一般に $-D^2 \geq 0$, $\deg R \geq 0$ でありさらに $c_1 \geq 0$ かつ $D \cdot c_1(\omega_{X/S}) \geq 0$ だからつねの主張はよい. 等号は $c_1 = 0$ のとき $D^2 = 0$, $D \cdot c_1(\omega_{X/S}) = 0$, $R = 0$ と同値だから. これが base pt. free と同値であることは容易にわかる.

古典的な判別式 Δ' については次がなりたつ.

系2. $X \rightarrow S$ が定理4の条件とすると

$$\text{ord } \Delta' = -\text{Arc}(X/S) + 2c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + \deg R$$

で Δ' はつねに $\mathbb{Q}$ 加群の準同型を定める. これが同型となるには X の minimal model が smooth となることが必要十分.

系2の証明. $\text{ord } \Delta' = \text{ord } \Delta + \text{ord } \Delta_1$ だから上の等式は定理1と定理4から通うに従う. また $\text{ord } \Delta'$ は blow up で不変だから

後半を示すには X を minimal model と仮定してよく、そのときは定理1の系1と定理4の系1からわかる。

定理4の証明は次のようにする。 M を $\mathbb{Q}$ 加群の完全複体 $[f_+^* \omega_{X/S} \rightarrow \omega_{X/S}]$ とする。ここで $f_+^* \omega_{X/S}$ は0次の項 $\omega_{X/S}$ は1次の項とする。すると $H^0(M)$ は可逆層で $H^1(M)$ は台が X_S にはいり他の cohomology は消える。そこで局所化されたchern類 $c_2^X(M)$ が $(H_0(X_S))$ に定義される。これを実際に計算すると $c_2^X(M)$ は $2(c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + R)$ となることがわかる。一方 M の2回外積 $L \wedge^2 M$ は完全複体 $[\wedge^2 f_+^* \omega_{X/S} \rightarrow \omega_{X/S} \otimes f_+^* \omega_{X/S} \rightarrow \omega_{X/S}^{\otimes 2}]$ と定義される。ここで $\wedge^2 f_+^* \omega_{X/S}$ が0次の項である。複体 $L \wedge^2 M$ は X_S で非輪状なので上と同様に $c_2^X(L \wedge^2 M)$ が $(H_0(X_S))$ に定義される。すると [S3] と同様に $c_2^X(L \wedge^2 M) = -c_2^X(M)$ が示される。さらにこれと同様に Riemann-Roch 定理により

$$-\deg c_2^X(L \wedge^2 M) = \text{length}_{\mathcal{O}_S} Rf_+ L \wedge^2 M$$

が示される。ここで少し計算すると右辺は

$$\begin{aligned} & \text{length}_{\mathcal{O}_S} Rf_+ L \wedge^2 M \\ &= \text{length}_{\mathcal{O}_S} (\text{Coker}(S^2 f_+ \omega_{X/S} \rightarrow f_+ \omega_{X/S}^{\otimes 2})) - \text{length}_{\mathcal{O}_S} Rf_+ \omega_{X/S}^{\otimes 2} \end{aligned}$$

となり、さらにこの右辺が $\text{ord } \Delta_1$ となることは容易にわかる。このようにして定理4が証明される。

次に $\text{ord } \Delta_1$ の moduli 的な意味を述べる。 $\Delta = F_2 - M_2$ は既約成分が2つある。1つは node を1つもつ楕円曲線に対応す

る Δ_0 で、もう1つが2つの楕円曲線が横断的に交わるものに対応する Δ_1 である。すると $\text{ord} \Delta_1$ は §1 で述べたような意味で、 X が定める S と Δ_1 の交点数と解釈できる。実際 X が極小で semi-stable のときは、この交点数は X_S の特異点 P で $X_S - \{P\}$ が連結でないものの数となり、一方 $\text{ord} \Delta_1$ もこれと一致する。

最後に上野氏の結果との関係について述べる。まずそれを簡単に復習する

定理 (上野). S の剰余体の標数が 2, 3, 5 でないとする。
 X を minimal とすると、

$$\text{ord} \Delta = -\text{Art}(X/S) + (\text{補正項})$$

とかけ、この補正項は X の singular fiber の configuration で定まり、具体的に表で与えられる。

今までにみたことからこの補正項は $\text{ord} \Delta_1$ であり、定理 4 により $\omega_{X/S}$ の base locus のようすでかける。したがってこの結果との関係を完全にするには $\omega_{X/S}$ の base locus のようすを X の closed fiber の configuration のようすでかけばいいが、それは上で述べた semi-stable の場合を除くとまだほとんどなされてない。

文献

- [B] S.Bloch, Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, to appear in Bowdoin conference in Algebraic Geometry, AMS Proc. Symp. Pure Math.
- [D] P.Deligne, Le discriminant d'une courbe, Appendice 3 à "Lettre à Quillen", 20 June 1985.
- [F] G.Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, Ann. of Math. 119, pp.387-424, 1984.
- [Fu] W.Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [H] H.Hironaka, Desingularization of excellent surfaces, Appendix in Springer LNM 1101, pp. 99-132, 1984.
- [M] D.Mumford, Stability of projective varieties, Ens. Math. 23, pp.39-110, 1977.
- [O] A.P.Ogg, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89, pp.1-21, 1967.
- [S1] T.Saito, Conductor, discriminant and the Noether formula of arithmetic surfaces, to appear in Duke Math. J.
- [S2] T.Saito, The discriminants of curves of genus 2, preprint 1988.
- [S2] T.Saito, Self-intersection 0-cycles and coherent sheaves on arithmetic schemes, to appear in Duke Math. J.
- [U1] K.Ueno, Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, preprint, 1987.
- [U] K.Ueno, Discriminants of hyperelliptic curves and arithmetic surfaces, pp.100-147, in Arithmetic Algebraic Geometry シンポジウム 報告集, 1987.