

二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (4)

——短時間降雨の模擬発生——

長尾正志・角屋 睦

STUDY ON TWO-VARIATE GAMMA DISTRIBUTION AND ITS ENGINEERING APPLICATION (4)

——Synthesis of Short-Time Intense Rainfall Data Applying
Two-Variate Exponential Distribution Theory——

By Masashi NAGAO and Mutsumi KADOYA

Synopsis

In this paper, a statistical technique is developed to generate short-time intense rainfall data for long-term at a point, in which the record period is only few years, on the basis of the long-term data observed at an adjacent observatory. The technique is based on the theory of two-variate exponential distribution. In this generation, the numerical table of conditional probability prepared for the standardized two-variate exponential distribution is utilized. Moreover, as an applied example of the data generated, the design flood discharge is estimated for an assigned return period.

1. は し が き

わが国の通常の中小河川では、数時間以下の短時間強雨量が治水計画における計画基本量として重要となることが多い。しかし、懸案地点において、必ずしも統計処理に十分な量、質の強雨記録が得られるとは限らない。このような場合には、まず長期間の信頼できる降雨資料の存在する基準観測所の記録を基礎にし、懸案地点の長期間の雨量資料を統計的に模擬発生させ不足資料を補充整備する方法が考えられる。しかしながら、その場合、幾つかの問題点が指摘される。

まず最初に、短時間雨量の確率分布がどのように分布型に従うかということと、それをいかに理論的に表現するかということである。そのうち、短時間雨量の確率分布については、これまでも多くの研究が行なわれ、経験的にほぼガンマ分布ないし指数分布が適用できることが知られている¹⁾。他方、模擬発生上の理論的根拠になっているのは、ほとんど例外なく正規分布論であるといってよい。したがって、これらの理論を用いるには、変量に対して何らかの正規変換の手続きを必要とし、一般にはかなり面倒な計算が要求され、ときには誤った結論を導く可能性すら持っている。

つぎに、統計的な模擬発生に際してもっとも問題になるのは、変量相互間の相関性の定量的な評価が的確であるかどうかという点である。従来この点に関する議論はあまり見当たらず、無批判に標本より直接得られる相関係数を使用していた懸念がある。しかし、これは模擬発生上のもっとも本質的な問題であるだけに、理論的かつ実証的に十分検討されねばならない問題である。

本報告は、著者らがかねてより研究の二変数ガンマ分布に関する理論的成果を、とくに短時間雨量が指数

分布に従うとした場合の資料の模擬発生へ適用した例を述べ、上述の問題解決の一つの方向を示そうとしたものである。ここでは具体例として京都市西部、小畑川流域の短時間雨量の模擬発生およびその治水計画への適用を取り扱った。諸賢の御批判が得られれば幸いである。

2. 資料および手法の概要

まず問題の対象を、京都市洛西地域の小畑川流域での短時間強雨の模擬発生およびその確率高水流量推定への適用とする。

さて、小畑川流域内で現在利用し得る雨量資料としては、わずかに、昭和42年から44年の3年間に於ける大原野、太閤担の2地点での観測値があるにすぎない。そこで、流域に近く、長期間の資料の整っている京都気象台の記録を基準として用いることにする。また、対象とするような強雨の資料として、京都、大原野、太閤担のうちどこかで、1時間雨量で10mm以上、10分間雨量で5mm以上となった日の最大値を選び、小畑川流域の強雨としては大原野、太閤担のどちらか大きい方を代表雨量とすることにした。

つぎに手法の概要を説明する。まず、京都および小畑川流域の1時間、10分間雨量を解析の対象とし、それぞれの分布型を吟味し、ついで、これらを二変数指数分布として表現する場合の尺度母数や相関母数の推定を行なう。さらに、京都の32年間の強雨資料に基づいて、相関性およびランダム性を勘案しながら、二変数指数分布の理論を適用して、小畑川雨量を模擬的に発生させ、32年間の小畑川強雨資料を作製する。最後に、このうちから年最大値を選び出し、それに極値分布を適合させ、確率雨量さらに確率高水流量を推定する。

3. 短時間雨量への二変数指数分布の適合

まず流域の大きさ、地形、地被状態などを考慮して計画としてどの程度の時間内降雨量を問題にすべきかを決定しなければならない。そこで、小畑川上流域を考えると、これは12.4km²(善峰川合流点で25.8km²)といった小面積であり、近い将来かなりの範囲にわたって宅地開発が予想されている。したがって、少なくとも1時間程度以下の強雨が問題になるものと考えられる。そこで、以後の考察では、1時間と10分間の雨量を論議の対象とする。

3.1 周辺分布の母数推定

前述したように、短時間雨量の分布は、一般に雨量の大きい方に長く尾を引くような非対称分布、とくに指数分布のような顕著な逆J字型分布を示すものが多いことが知られている。

そこで、小畑川、京都雨量の各周辺分布がどのような分布型になっているかと調べてみる。それには、形状母数が ν のガンマ分布を仮定すると、「二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(2)²⁾」の上位標本による母数推定の理論結果を用いることができる。いま簡単に、原点母数を0と仮定し、上記論文の(15)式より無次元相乗平均 S 、無次元相加平均 T を算出し、上記論文のFig. 2, 3の交点より ν を求めると、 $\nu=0.2\sim 0.5$ となり指数分布 $\nu=1$ よりさらに著しく歪んだ非対称分布となることがわかった。

したがって、もとの雨量の平方根変換をしたものについて、以下に示すような母数推定を行なった上で、もう一度 ν を調べてみると、 $\nu=0.95\sim 1.05$ となり十分指数変量として近似できることがわかった。なお、以後、京都雨量、小畑川雨量を X, Y 、それぞれを指数変量に変換したものを、

$$x=\sqrt{X}, \quad y=\sqrt{Y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

さらにそれを規準変換したものを、

$$\xi=\frac{x-v_x}{\sigma_x}, \quad \eta=\frac{y-v_y}{\sigma_y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と記すことにする。すなわち、たとえば x の周辺分布として、(3)式のような原点母数 v_x 、尺度母数 σ_x をもつ指数分布で近似できることになる。

$$f(x)=(1/\sigma_x) \exp \{-(x-v_x)/\sigma_x\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ところで、上式の母数 v_x, σ_x の推定には、前記論文で述べたように、総数 N のうち上位 n 個の標本による推定方法を適用できる。すなわち、いま、 $x_{(j)}$ を小さい方から数えた j 番目の順序統計量とすると、 v_x, σ_x の最尤解は前記論文の (26) 式、すなわち次式によって求められる。

$$\begin{aligned} \hat{v}_x &= x_{(N-n+1)} - \left(\log \frac{N}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \right) \\ \hat{\sigma}_x &= \frac{1}{n} \sum_{j=N-n+1}^N x_{(j)} - x_{(N-n+1)} \end{aligned} \quad (4)$$

また、このようにして、 v_x および σ_x がわかれば、(2) 式で標準化した変数 ξ を使って、その密度分布 $f(\xi)$ さらに累積分布 $F(\xi)$ は (5) 式のように表わせる。

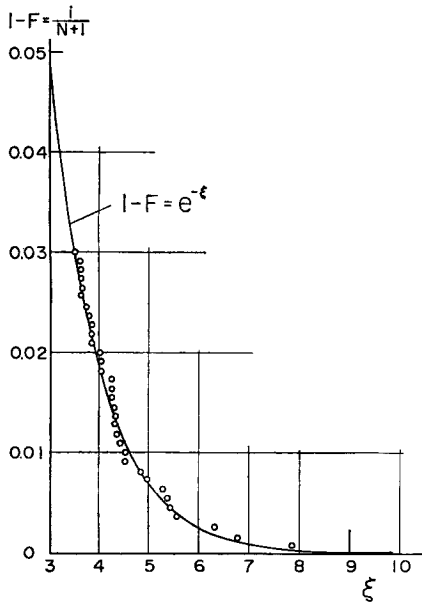
$$f(\xi) = \exp(-\xi), F(\xi) = \int_0^\xi f(\xi) d\xi = 1 - \exp(-\xi) \quad (5)$$

さて、京都および小畑川雨量に対して、時間雨量で上位 33 個、10 分間雨量で上位 30 個の標本より、(4) 式で未知母数を推定した。ついで (2)、(5) 式で標準変数に対する理論的な超過確率 $1-F$ を求めるとともに、その経験分布を Thomas plot $1-F=i/(N+1)$ で表わしたものが Fig. 1 (a), 1 (b), 2 (a), 2 (b) である。なお、(4) 式の計算に際して、標本は日最大の値を採用しているの、標本総数 N は資料期間の総日数 365×3 を用いているが、これについてはさらに検討が必要になるかも知れない。また、前述したように、小畑川代表雨量として、厳密にはティーセン平均などを使うべきであるが、いまの場合、資料が不完全であるから、計画における安全側を考え、大原野、太閤担のうち大きい方の雨量を採用している。

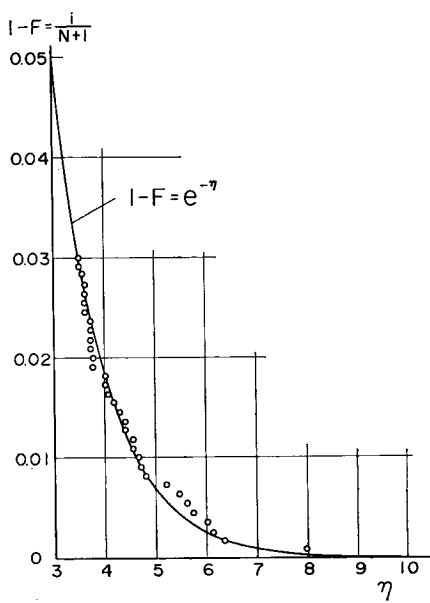
3.2 相関母数の推定

以上のようにして京都雨量、小畑川雨量の周辺分布がわかり、これが標準化変数 ξ, η で表現できたので、つぎに、両者の間の相関母数 ρ を知らねばならない。ところで二変数指数分布に対する相関母数の推定値は上記論文の (31) 式で求められる。すなわち、いまの場合には、次式

$$\rho = \frac{\bar{\xi}\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta}}{\bar{\xi}^2\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\xi}\bar{\eta} + \bar{\xi}\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta}} \quad (6)$$



(a)



(b)

Fig. 1 Curve fitting to the exponential distribution for 1-hour rainfall depth at Kyoto (a) and Obata Basin (b).

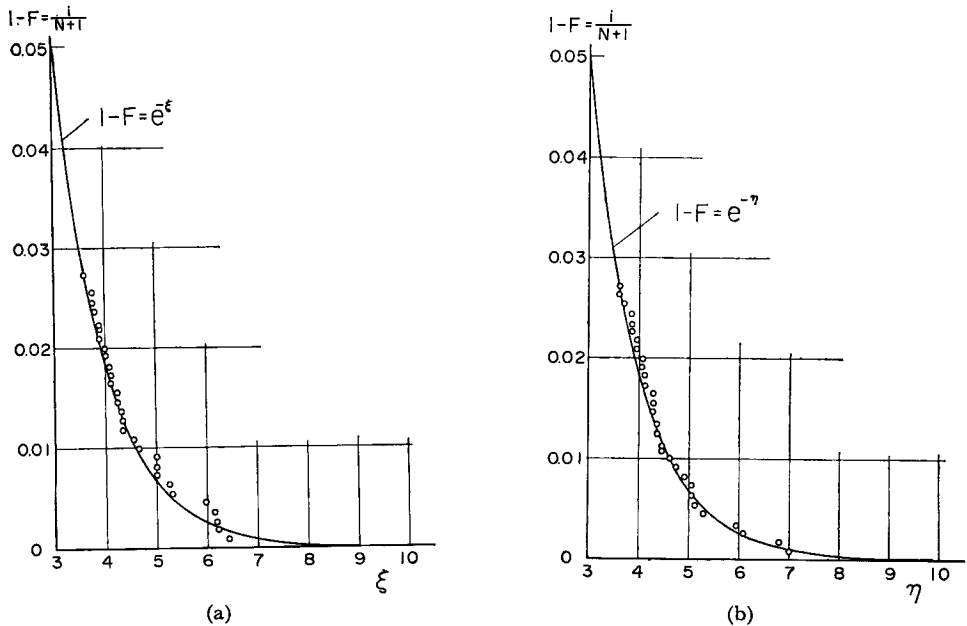


Fig. 2 Curve fitting to the exponential distribution for 10-min rainfall depth at Kyoto (a) and Obata Basin (b).

で計算できる。

さて、京都雨量と小畑川雨量の間の相関母数 ρ を求めてみると、1 時間雨量で 0.956 と非常に相関が強く、また 10 分間雨量では 0.189 とかなり弱いことがわかった。

4. 基準雨量より対象雨量の模擬発生

4.1 条件付非超過確率

以上によって二変数指数分布の母数がすべて明らかになったので、基準地点雨来に基づいて対象地点雨量を模擬発生することができる。しかし、これにはあらかじめ以下のことを理解しておく必要がある。

すなわち、 x, y の分布に二変数正規分布が適用される場合には、基準地点雨量 x を与えて対象地点雨量 y を推定する式としては、周知のように次式を用いればよい。

$$y = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2} t \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに t は $N(0, 1)$ の正規乱数である。

これに対して、二変数指数分布の場合には、形式的に次式が適用される。

$$y = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \sigma_y \sqrt{(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \rho)x/\sigma_x} \varepsilon \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに ε は (7) 式の t に対応する確率変数であるが、 ρ, x に無関係な規準化変量にはなり得ず、 x が指定されたという条件の下での y の条件付非超過確率 $F(y|x)$ によって定まる値になるから、結局 y は $F(y|x) \equiv F(\eta|\xi)$ の関数として次式の形で与えられることになる³⁾。

$$y = y\{F(y|x)\} \equiv y\{F(\eta|\xi)\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$F(\eta|\xi) \equiv \int_0^\eta f(\eta|\xi) d\eta = \int_0^\eta \frac{1}{1-\rho} \exp\left(-\frac{\rho\xi+\eta}{1-\rho}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi\eta}\right) d\eta \quad \dots\dots\dots (10)$$

Fig. 3 はこれらの関係を概念的に示したものである。

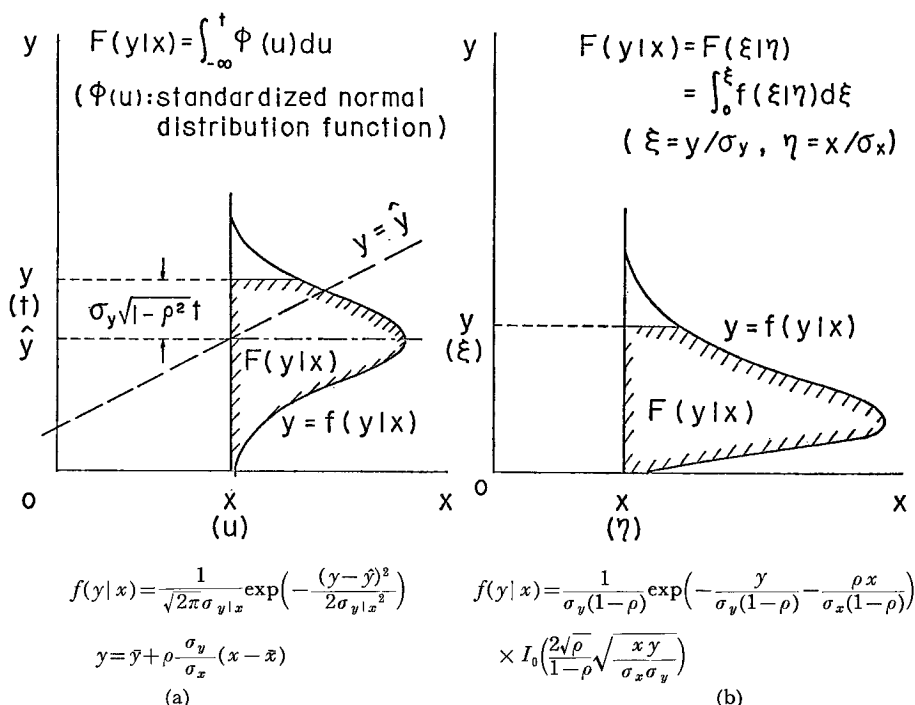


Fig. 3 Conceptual illustrations of conditional probability density functions for normal and exponential distributions.

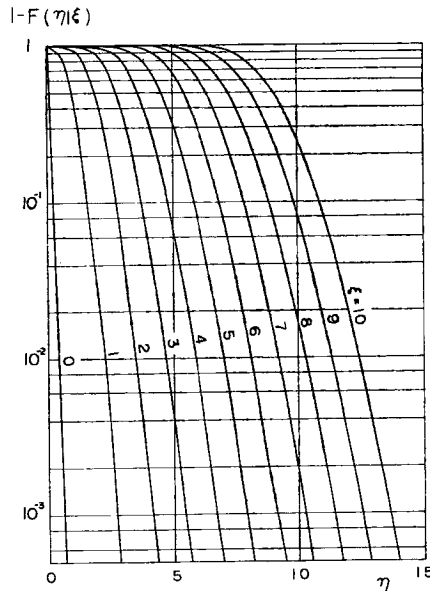
すなわち、二変数指数分布の場合、模擬発生には $F(\eta|\xi)$ を求めることが基礎になる。これについては第1報において ρ , ξ , η を与えて $F(\eta|\xi)$ を得る数表を提示したが、さらに実用計算上の便宜のために、 ρ , ξ および $F(\eta|\xi)$ を与えて η を求める数表を第3報⁴⁾で提示した。したがって、ここでは第3報の数表を利用した方が便利である。

4.2 模擬発生の手順

つぎに模擬発生の具体的な手順を説明する。まず32年間にわたる京都雨量 X から、推定された母数 μ_x , σ_x を用いて (2) 式で規準化変数 ξ に変換する。ついで区間 (0, 1) の一様乱数を選定し、これを (10) 式の条件付非超過確率 $F(\eta|\xi)$ に等しいとおき、与えられた ρ および ξ に対する η を数表から内挿的に算出する。最後に、 η を推定された μ_y , σ_y を用い y さらに Y に変換すれば、結局、京都雨量 X に対する小畑川雨量 Y が発生されたことになる。

さて、実際の計算では、前に得られた ρ の値に対して、標本や計算上の誤差を考慮して、1時間雨量で $\rho=0.9$, 10分間雨量で $\rho=0.2$ を採用している。たとえば、 $\rho=0.9$ に対する $F(\eta|\xi)$ と主な ξ , η の関係は Fig. 4 のようである。

また $F(\eta|\xi)$ に使用する一様乱数は、一様性の検定済みの乱数表より選べばよいが、資料数に比較して異常に大きいまたは異常に小さい値が含まれることは、いまの模擬発生の目的からみて必ずしも好ましいことはでない。この問題に関しては現在のところ定説はないが、ここではつぎのように選定した。すなわち、京都气象台における強雨資料として前と同じ基準（1時間 10 mm 以上、10分間、5 mm 以上の日最大値）で昭和13~44年の32年間にわたって標本を選出すると、その総数は215となる。そこで、簡単な目安として、215個の最大値の Thomas plot による超過確率 $1/(215+1) \approx 0.005$ を基準とし、非超過確率として 0.005 未

Fig. 4 Relation among $F(\eta|\xi)$, ξ and η . ($\rho=0.9$)

満あるいは $1-0.005=0.995$ を超過するものは除外することにし、 $0.005\sim0.995$ の 3 桁の乱数を選んで使用することにした。

5. 模擬発生雨量による確率高水流量の推定

以上のようにして模擬発生させた小畑川雨量に基づき、つぎのようにして確率雨量さらに確率高水流量を推定してみた。

5.1 確率雨量の推定

まず、前述の基準で採択された京都の強雨資料のどれかに対応して、小畑川雨量の年最大値が含まれると考え、発生させた小畑川雨量の中から年最大値を選び出した。ところで、1 時間雨量の場合には、相関が極めて強いから問題にはならないが、10 分雨量の場合、かなり相関が小さいから、年内の標本数が少ない場合に小畑川年最大値が小さく計算されて終う場合が若干ある。したがって、そのような場合には、厳密には、強雨基準を改めて再検討すべきであるが、ここでは便宜的に小畑川年最大値が基準以下となった場合にはその年の標本を除去して計算している。

つぎに、模擬発生された年最大値雨量に極値分布をあてはめ、確率雨量を求めた。Figs. 5, 6 にそれらの結果、および比較のために、京都雨量に対する極値分布の適合結果を併記している。さらに、具体的に各超過確率に対応する 1 時間雨量、10 分間雨量の値を図より読みとったものが Table 1 である。

この結果をみると、1 時間雨量では小畑川雨量と京都雨量ではほぼ同程度（たとえば Table 1 の範囲では京都雨量の 1.17~1.16 倍）であるのに対し、10 分間雨量では、小畑川の方がかなり大きく（1.38~1.17 倍）、この傾向はとくに超過確率の小さい場合に著しい。この原因としては、直接には、1 時間雨量、10 分間雨量にそれぞれ $\rho=0.9, 0.2$ を採用していることによるが、間接的には、両地点間の地形の相違、強雨域と流域面積の相対的關係、さらに小畑川雨量として大原野、太閤担のうち大きい方を採用したことなどによるであろう。

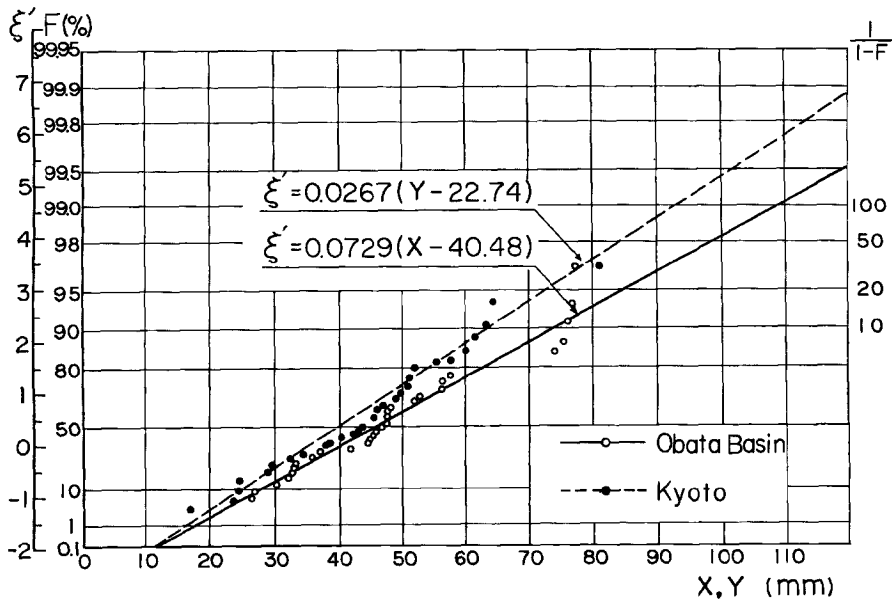


Fig. 5 Frequency curves for annual maxima of 1-hour rainfall depth.
 $F(\xi') = \exp \{-\exp(-\xi')\}$

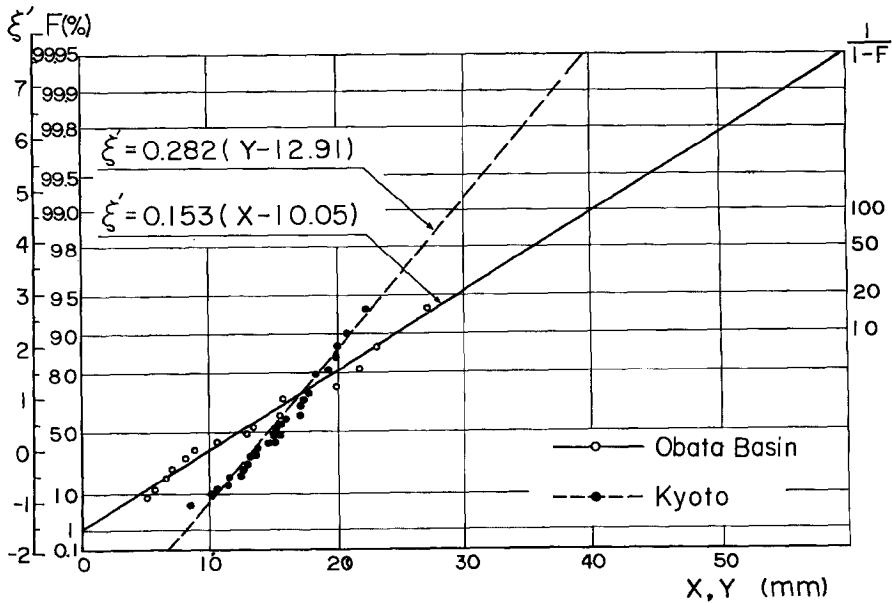


Fig. 6 Frequency curves for annual maxima of 10-min rainfall depth.
 $F(\xi') = \exp \{-\exp(-\xi')\}$

Table 1 Probability rainfall depths.

Recurrence interval (year)	1-hour rainfall depth (mm)		10-min rainfall depth (mm)	
	Obata Basin	Kyoto	Obata Basin	Kyoto
100	109.0	93.0	40.2	29.2
50	98.5	84.4	35.5	26.8
20	84.8	72.5	29.4	23.5
10	74.0	63.6	24.6	21.0

5.2 確率高水流量の推定

小畑川流域の数河川では、数年来、流量観測およびその流出解析によって流出特性がかなり明確にされている。そのような場合には、確率雨量に基づいて、与えられた確率年に対する現状の高水流量をつぎのようにして推算することができる。

いわゆる特性曲線法による流出解析の手法が利用できるとすると、高水の最大流量に關与する有効降雨の継続時間 t_{pc} とその間の平均有効降雨強度 r_{mp} の間に次式が成立つことが知られている⁵⁾。

$$t_{pc} r_{mp}^{1-p} = K \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、上式中の係数 p , K は流域の高水流出に關する流域特性を表わし、流域が指定されれば定数と考えてよい。当然のことながら、 r_{mp} (mm/hr) がわかれば、懸案地点の高水の最大流量 Q_p (m³/sec) は、その地点における流域面積 A (km²) を用いて次式で求められる。

$$Q_p = \frac{1}{3.6} r_{mp} A \quad \dots\dots\dots (12)$$

たとえば、小畑川流域左支川の下狩川 (流域面積 1.03 km²)、および右支川千丈川 (1.27 km²) では、Figs.

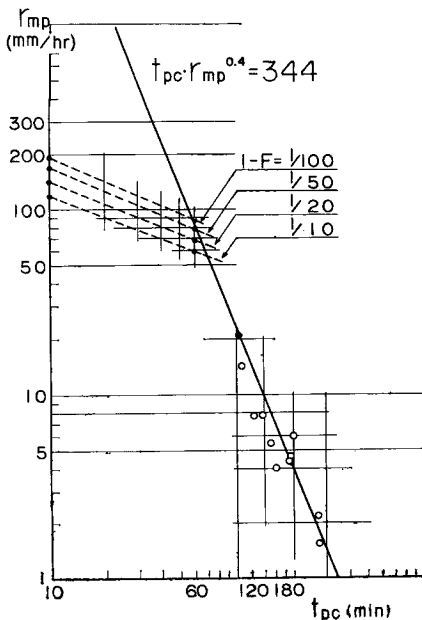


Fig. 7 Relation between t_{pc} and r_{mp} , and estimation of design flood discharge in Shimokari River.

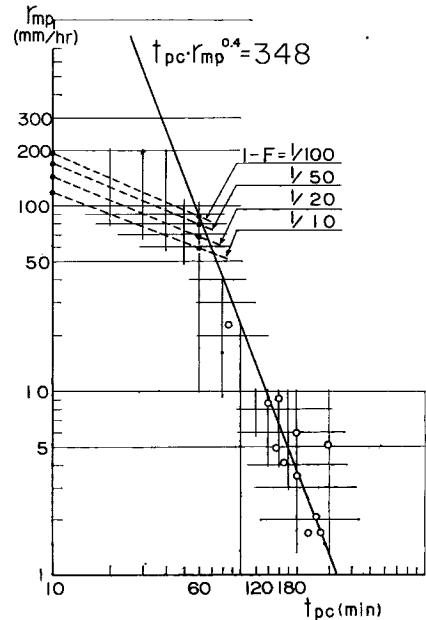


Fig. 8 Relation between t_{pc} and r_{mp} , and estimation of design flood discharge in Senjo River.

7, 8 の丸印で示したような $t_{pc} \sim r_{mp}$ 関係が得られている。そこで、これら諸点に適合するように、一応 $p=0.6$ と仮定し最小自乗的に求めた (11) 式に対応した関係式が、図に実線で示してある。

さらに、既往の出水解析の結果より流出率を 80% と仮定し、Table 1 の確率雨量より有効雨量を求め、Figs. 7, 8 に記入すると黒丸ようになる。図で、同じ確率年に対する黒丸を結んだ点線は、いわゆる Sherman 型の降雨波型を表現し、したがって、実線と点線の交点が流域の $t_{pc} \sim r_{mp}$ 関係を満足し、かつその確率年に対応する有効降雨強度を与えることになる。最後に、この r_{mp} を (12) 式に用いることによって与えられた確率年に対する高水流量が推定される。Table 2 は以上の結果を整理したものである。

Table 2 Peak discharge of flood for given recurrence interval.

Recurrence interval (year)	Shimokari River			Senjo River		
	r_{mp} (mm/hr)	t_{pc} (min)	Q_p (m ³ /sec)	r_{mp} (mm/hr)	t_{pc} (min)	Q_p (m ³ /sec)
100	88.0	60.0	25.2	90.0	57.5	31.8
50	77.0	63.0	22.0	78.0	61.0	27.5
20	65.0	67.5	18.6	64.8	65.5	22.9
10	55.0	72.0	15.7	56.0	70.0	19.8

6. む す び

以上、二変数指数分布の理論を適用して、隣接する基準地点の長期にわたる短時間雨量資料から懸案地点の短時間雨量を統計的に模擬発生させる方法を具体的に提示したが、その主な内容を要約すると以下のとおりである。

1) 短時間雨量の分布は、ガンマ分布とくに指数分布に従うことが多い。したがって資料の補充整備など二変数問題には二変数ガンマ分布ないし二変数分布を適用するのが直接的である。

2) 短時間雨量に対する二変数指数分布のあてはめに際し、一変数に関する上位の部分標本を用いても、尺度母数、相関母数などを十分推定することができる。

3) 二変数指数分布の理論に準拠して、資料の模擬発生を行なう具体的な手法を示した。

4) さらに以上の成果を用いて、確率雨量、確率高水流量の推定方法を具体的に示した。

なお、分布関数の適合性の検定、標本抽出方法の吟味など検討すべき問題も多く残されているが、今後その方面の研究を続けていく予定である。

参 考 文 献

- 1) たとえば、鈴木栄一：気象統計学，地人書館，昭 45. 10, pp. 7-8.
- 2) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(2)——二変数ガンマ分布の母数推定法——，京都大学防災研究所年報，第 14 号 B，昭 46. 4, pp. 43-56.
- 3) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(1)——二変数指数分布の基礎理論——，京都大学防災研究所年報，第 13 号 B，昭 45. 3, pp. 105-133.
- 4) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(3)——二変数指数分布の数値表——，京都大学防災研究所年報，第 14 号 B，昭 46. 4, pp. 57-75.
- 5) 土木学会編：水理公式集，昭 38, p. 36.