

反復法による積分方程式の数値解法

三菱電機 中研 下地貞夫
佐々木佳子 西口憲一

1. 問題の提起

ここで考える積分方程式はフレドホルムの第2種のもので
積分核を $K(x, y)$, $K^*(x, y)$, 未知関数を $\varphi(x)$, $\varphi^*(x)$, 既知関数
を $f^*(x)$ として,

$$\varphi^*(x) = f^*(x) + \lambda^* \int_0^1 K^*(x, y) \varphi^*(y) dy \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \alpha \cdot \varphi^*(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2)$$

のような形をしており, 初めに式(1)を解いて $\varphi^*(x)$ を求め,
次にそれを式(2)に入れて $\varphi(x)$ を求める, すなわち与えられ
た $f^*(x)$ に対する $\varphi(x)$ を求めることが問題である。

2つの積分核は含まれるパラメータの値が異なるだけで,
関数としては全く同じものであり, また, 領域 $0 \leq x, y \leq 1$
において正值として良く, パラメータ λ^* , λ および α には次
の制限,

$$0 < \lambda^*, \lambda, \alpha \leq 1 \quad (3)$$

を課すことができる。

この方程式は物理的には、ふく射エネルギーの平衡分布に関連したもので^{1,2,3)}、 $f^*(x)$ は太陽からのふく射、 $\psi(1)$ 式は可視光域におけるふく射の物体表面上の強度分布、 $\psi(2)$ 式は太陽光の吸収と熱ふく射の平衡によって定まる強度分布に対するものを表わす。

積分核は系の幾何学的形状と、次の関係式

$$\rho_s = 1 - \lambda, \quad \rho_s^* = 1 - \lambda^* - \alpha^* \quad (4)$$

で定義されるパラメータに依存するが、いま、円錐形の内面すなわちコーンについて導出されたもの^{4,3)}を用いることにし、また、 $\rho_s = \rho_s^* = 0$ とすると、 $K(x, y)$ と $K^*(x, y)$ は一致し、

$$K(x, y) = \frac{\cos^2 \theta}{2x \cdot \sin \theta} \cdot \left\{ 1 - \frac{|x - y| \cdot [(x - y)^2 + 6xy \sin^2 \theta]}{[(x - y)^2 + 4xy \sin^2 \theta]^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

の形に与えられる。θはコーンの半開口角である。さらに、最も簡単に、

$$f^*(x) = \text{const.} = S \quad (6)$$

とする。

この種の問題は、積分核の導出が困難であること、および積分方程式の数値解を得るための計算の手間がかかり過ぎるために、計算例は少なく、僅かにV字溝の形状について完全な数値解が求められている²⁾のみで、その計算法も詳細は不

明である。コーンは形状がV字形溝と密接な関係にあるが、より複雑で、積分核の特長も一層強く現われるものと見られる。そこで我々は、實際上からの強い要請もあつて、計算法の開発を進めて来たが、所要の精度で解を求めることが出来るようになり、この研究会に報告の機会を得たので、数学の専門家の方々の御批判や御教示を仰ぎたい。

2 積分核の性質

数値解法としては、式(1)、式(2)を順々に解く、すなわち、式(1)を2回解く方法が最も少ない手間で済むと考えられる。先づ積分核の形状の特長は次のごとくである。式(5)式より、 $x=y$ において、

$$K(x, y) = \frac{\cos^2 \theta}{2 \sin \theta} \cdot \frac{1}{x} \quad (7)$$

および、

$$\left. \frac{\partial K}{\partial x} \right|_{x=y \neq 0} = - \frac{\cos^2 \theta}{2 x^2 \sin \theta} \cdot \left(1 \pm \frac{3}{4 \sin \theta} \right) \quad (8)$$

となる。従つて、この積分核は対角線上に稜線を持ち、その高さは原点に近づくにつれて $1/x$ に比例して増加し、 x 方向にこの稜線を横切るときの勾配の変化は式(8)式で与えられる。

また, x 軸および y 軸上においては 0 である。

次にこの積分作用素の重要な性質として, $[0,1]$ 上で連続な関数 f を同じく $[0,1]$ 上で連続な関数 g に移すことが云える。

※(5)式を y について積分すると,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^1 K(x, y) dy \\ &= 1 - \frac{1}{2x \sin \theta} \left\{ x - \cos^2 \theta + \frac{x + x^2 + \cos^2 \theta \cdot (1 - 3x)}{[(1-x)^2 + 4x \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$H(x)$ は $x=1 \rightarrow 0$ に従って単調に増加し,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 K(x, y) dy = 1 - \sin^2 \theta \equiv M \quad (10)$$

である。 $K(x, y)$ は $\delta \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ において一様連続であり, $|x' - x''| = \varepsilon$ ($\delta \leq x', x'' < 1$) を十分に小さく取れば, $|K(x', y) - K(x'', y)| < \eta$ となるような η を y に無関係に小さく出来るから,

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x'')| &= \left| \int_0^1 \{K(x', y) - K(x'', y)\} f(y) dy \right| \\ &\leq C \cdot \int_0^1 |K(x', y) - K(x'', y)| dy < C \cdot \eta \quad (11) \end{aligned}$$

$$C = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

となし得る。また, $K(x, y)$ は $x \rightarrow 0$ の時, $\delta \leq y \leq 1$ において一様に 0 に近づき, 任意の正数 η' に対し $|K(x, y)| < \eta'$ となる。一方, 正数 δ を十分に小さく取れば, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ ($0 \leq x \leq \delta$) 出来るから,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 K(x, y) \cdot \{f(y) - f(0)\} dy \right| \\
& \leq \int_0^{\delta} K(x, y) \cdot |f(y) - f(0)| dy + \int_{\delta}^1 K(x, y) \cdot |f(y) - f(0)| dy \\
& \leq M \cdot \epsilon + \eta' \cdot 2C
\end{aligned} \tag{12}$$

となる。結局、 $f(x) = f(0) + \{f(x) - f(0)\}$ として、上式および
 中(10)式を用い、

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = M \cdot f(0) \tag{13}$$

が得られる。

2.2.2 様ノルム

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \tag{14}$$

を考えると、 $K(x, y)$ のノルムは中(10)式によつて、

$$\begin{aligned}
\|K(x, y)\| &= \sup_f \frac{\left\| \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right\|}{\|f(x)\|} \\
&\leq 1 - \sin^2 \theta < 1
\end{aligned} \tag{15}$$

であるから、いまの積分方程式は連続関数 $f(x)$ に対して、一意的に解けることになる。猶、数値解法を組立てるにあつて、対角線上における微係数の不連続と原点における関数値の発散が問題となるが、あとの方については、中(13)式に示した $g(0) = M \cdot f(0)$ を活用して計算の手間を改善することができる。

3. 反復法

積分方程式(1)を反復法によつて解くことにし、未知関数の
 φ の k 近似に対して、 φ の $k+1$ 近似を

$$\begin{aligned}\varphi^{(k+1)}(x) &= f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi^{(k)}(y) dy \\ \varphi^{(0)}(x) &= f(x)\end{aligned}\quad (16)$$

と計算する。ただし、*印は省いて書いた。 φ (15)式によつて
 この反復は正解に収束すると考えられるが、実際に計算を行
 なうために数値積分で近似して、

$$\left. \begin{aligned}\varphi_i^{(k+1)} &= f_i + \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j K_{ij} \varphi_j^{(k)}, \quad j=1, 2, \dots, n \\ \varphi_i &= \varphi(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad K_{ij} = K(x_i, y_j)\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

と表わす。

この係数行列で表わされる作用素を、

$$K_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j K(x, y_j) \varphi(y_j) \quad (18)$$

と書くと、数値積分の精度が増すに従つて、すなわち、

$$K_n \varphi \rightarrow K \varphi = \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy, \quad n \rightarrow \infty \quad (19)$$

なるとき、 φ (17)式で計算される $\varphi_n^{(k)}$ の収束値は φ (16)式のそれ
 に近づいて行く。いま、 $0 < \|K_n\| < 1$ が前提とされており、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_n^{(k)} = (I + \sum_{k=1}^{\infty} K_n) f = (I - K_n)^{-1} f \quad (20)$$

また、 φ (16)式についても、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(k)} = (I + \sum_{k=1}^{\infty} K) f = (I - K)^{-1} f \quad (21)$$

と書くことが出来る。前節に述べた K の性質により、 $\|(K_n -$

$K)f \parallel \rightarrow 0$ に従って,

$$\|(K_n - K)K\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

となることが云えるから, 2つの作用素 A, B に対する次の恒等式を利用して収束性の表式が得られる⁴⁾。

すなわち,

$$\{I - (I - B)^{-1}(A - B)A\}(I - A)^{-1}f = (I - B)^{-1}\{I - B + A\}f \quad (23)$$

および

$$\{I - (I - B)^{-1}(A - B)A\}(I - B)^{-1}f = (I - B)^{-1}\{I - (A - B)A(I - B)^{-1}\}f \quad (24)$$

が(23)式から(24)式を引き, 変形すると,

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1}f - (I - B)^{-1}f &= \{I - (I - B)^{-1}(A - B)A\}^{-1} * \\ &* (I - B)^{-1}\{Af - Bf + (A - B)A(I - B)^{-1}f\} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで A を K , B を K_n として両辺のノルムを取ると,

$$\begin{aligned} &\|(I - K)^{-1}f - (I - K_n)^{-1}f\| \\ &\leq \|(I - K_n)^{-1}\| \cdot \frac{\|K_n f - K f\| + \|(K_n - K)K\| \cdot \|(I - K_n)^{-1}f\|}{1 - \|(I - K_n)^{-1}\| \cdot \|(K_n - K)K\|} \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。が(19)式および(22)式によって, 数値積分の精度を上げれば右辺を小さく出来るから, $\varphi_n^{(k)}$ の収束値も正解に近づけることができる。

数値積分の公式としては, 通常, ガウスの公式やチエビシエフの公式が推奨されているが, 区間の端点を分点に含まない公式の場合, 積分核の接線が領域内とならぬように対角線

で領域を分けたアルゴリズムを組むことが困難なため、次のようにシン普森の公式と台形公式を併用することにした。すなわち、積分核の原点における発散を避けて領域 $[0,1] \times [0,1]$ から $[0,\epsilon] \times [0,1]$ および $[0,1] \times [0,\epsilon]$ を除き、残りを $N \times N$ 等分する。各分点に番号をつけて、対角線で領域を分けた形に、

$$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ — 奇数} \\ \quad j \text{ — 奇数 } (1, 3, \dots, N-1) \text{ シン普森} \\ i \text{ — 偶数} \\ \quad j \text{ — 奇数 } (1, 3, \dots, i-3, i, \dots, N-1) \text{ シン普森} \\ \quad j \text{ — } i-1, i \text{ 台形} \end{array} \right. \quad (27)$$

と計算を行なった。換言すると、横方向に奇偶奇と3点ずつ取ってシン普森の公式を適用し、

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{3} \cdot (K_{i,j} \varphi_j + 4 K_{i,j+1} \varphi_{j+1} + K_{i,j+2} \varphi_{j+2}) \quad (28)$$

i が偶数で、3点に対角線を跨ぐ時にのみ、

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{2} \cdot (K_{i,j} \varphi_j + 2 \cdot K_{i,j+1} \varphi_{j+1} + K_{i,j+2} \varphi_{j+2}) \quad (29)$$

によって計算を行なう。実際に(29)式を用いずに(28)式によってすべての分点について計算したり、あるいは対角線上の点を内点としたままガウスの公式を適用した場合には、反復計算は原点に近い処で発散し、解を得ることが出来なかった。

4 数値的結果

領域から取り除く部分の大きさ ϵ , および分割数 N の数値解に及ぼす影響を実験値として示す。ただし, 式(2)式の代りに非斉次の項をもう少し複雑にした次式,

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \varphi^*(x) + \frac{1-\beta}{\beta} \alpha \int_0^1 K(x,y) \varphi^*(y) dy + \int_0^1 K(x,y) \varphi(y) dy \quad (2')$$

を用い, これの解から温度分布

$$T(x) = [\varphi(x)/\sigma]^{1/4} \quad (30)$$

を求めることにした。

いづれも $\theta = 20^\circ$ に固定し, 分割数に対しては $\lambda^* = 0.9$, $\epsilon = 0.1$ とした場合の解の変化の様子を図1に示す。 N は 10 ~ 100 に変え, χ は代表値として, 関数値が最大となり, 従つて変化も大きい処, $\chi \sim 0.19$ の点を選んだ。 $N=100$ のものに対する相対変化を示してあるが, $N=80$ 以上では, 変化は十分に

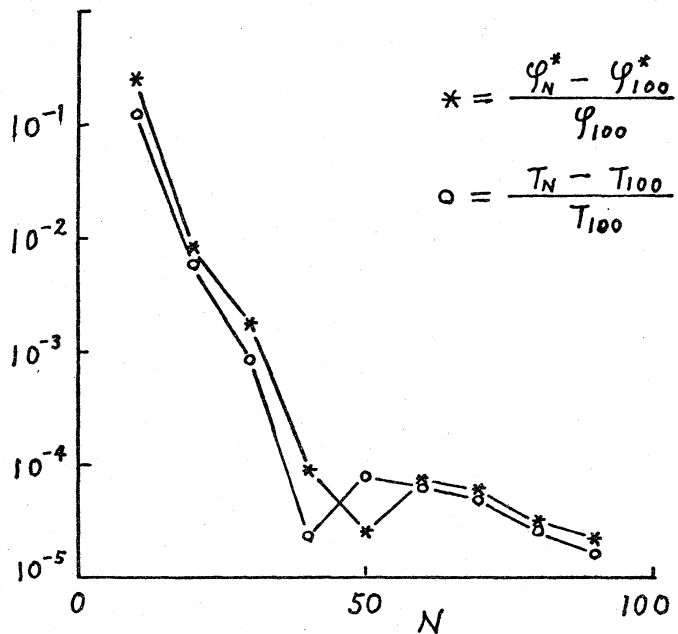


図1. 分割数に対する解の変化

小さいと云える。

分割数を 100 とした場合の解の形状, および ϵ に対する変化の様子を図 2, 3 に示す。 λ^* を 0.9, 0.5, β を 0.9, 0.5 とし, ϵ は 0.1, 0.05, 0.02 および 0.01 の 4 通りに変えた。いずれも原点の附近でピークが現われ, ϵ が小さくなるに従ってピークの位置も原点に近づく。これは先端の部分を除去したことによるふく射の洩れの影響を表わしている。

此処に報告した解法は式(13)式, あるいは知れた解と照合して, 所要の精度を持つことを確かめてあり, 一応の目的を達することが出来た。おわりに, この研究を進めるに当り, 京都大学・数理解析研 一松教授の御教示に負う処が大きかった。明記して厚くお礼を申し上げます。

参考文献

- 1) Herring, R. G. & Bobco, R. P.; J. Spacecraft Vol. 5, No. 11, p1271 (1968)
- 2) Herring, R. G.; J. Spacecraft Vol. 5, No. 1, p47 (1968)
- 3) 下地, 佐々木, 西口; 日本航空宇宙学会 第 6 回年会予講集 (1975)
- 4) Anselone, P. M.; Error in Digital Computation, Vol. 2,
ed. by Rall, L. B., Wiley, New York (1965)

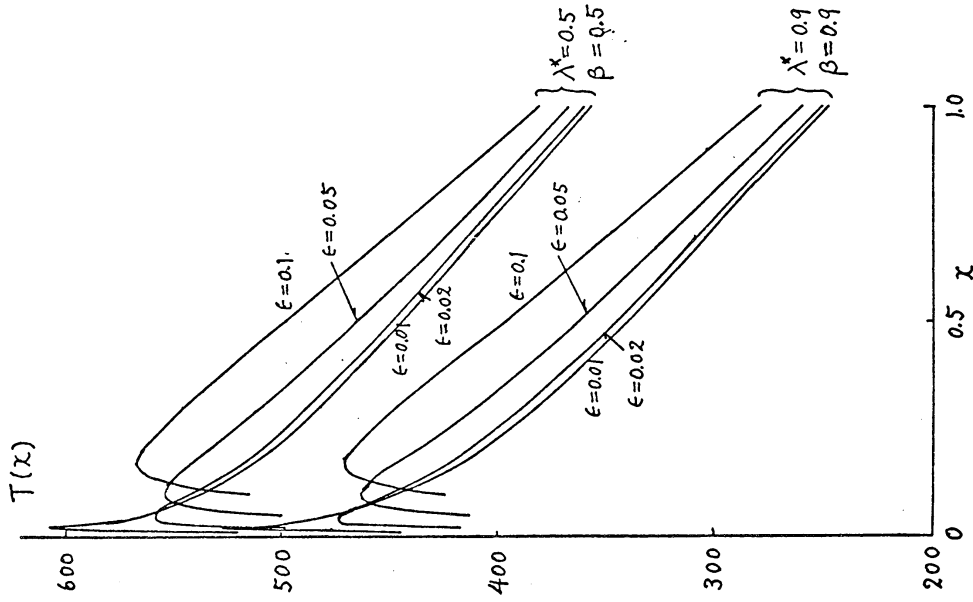


図3. 解曲線 $T(x)$ のふるまい

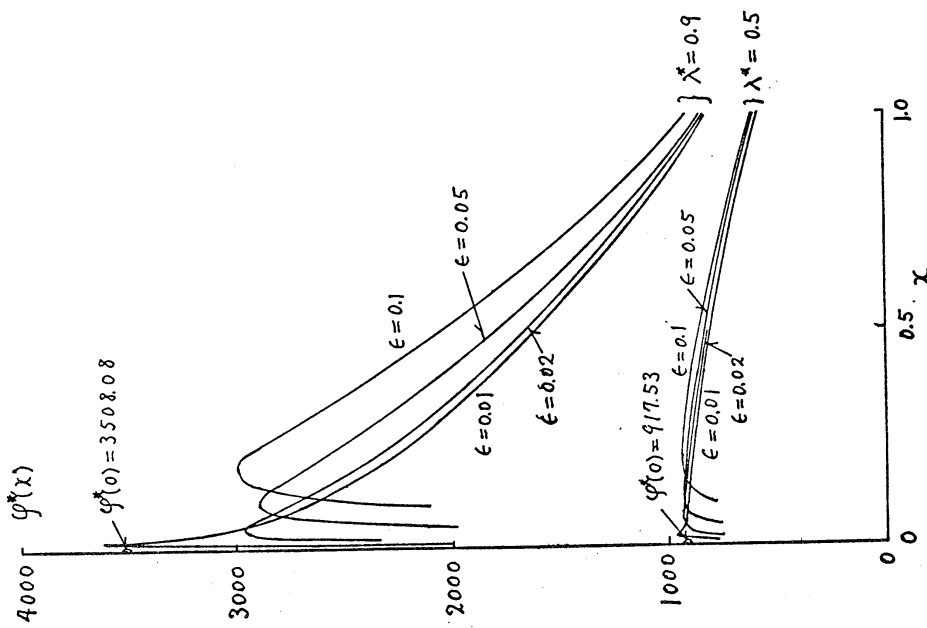


図2. 解曲線 $\varphi^*(x)$ のふるまい