

Yang-Mills 場と代数的ベクトル束

京大 数理解 村瀬元彦

研究集会で「Instanton の moduli について」なる題のもとに行なった講演では、Yang-Mills 方程式の解空間を具体的に決定する手がかりを予えると思われた次の結果；「 $SU(2)$ -instanton は複素領域に於けるその poles の位置により、unique に定まる」([7])を紹介した。しかし研究集会のあと日程して Drinfeld-Manin の論文 [4] が届き、instanton の moduli space は完全に決定されたことが明らかになった。彼等は gauge 群が $SU(2n)$ の場合の n -instanton 解をすべて具体的に表示することにより、任意の instanton 解を得たのである。この結果が出たことにより、古典場としての Yang-Mills 場 (or 方程式) に対しては、代数学的あるいは幾何学的側面から見て残された問題は唯一つ、「2 階の Yang-Mills 方程式と 1 階化された (anti-) self-dual Yang-Mills 方程式とは同値か？」だけにな

ったように思われる。これに関しても、既に Atiyah - Jones, Bourguignon 等によりいくつかの結果が得られている ([3] の文献表参照)。

本稿では、gauge 群が $SU(n)$ の場合の instanton に対応して出てくる $\mathbb{P}^3$ 上の rank n の代数的ベクトル束が、どのような性質を持つか、を論ずる。既に物理の方では instanton に対する関心かうすれてしまっている [9] ので、以後は Bourguignon の言葉 “--- it is time to start the analysis of Yang-Mills equations.” [3] に耳を傾けたい。

Bourguignon が Drinfeld - Manin の方法を徹底的にけむろいしているのは実に面白い。「あまり本質的とは思われないう複雑な構造をいっぱい持ちこんでやるのは不自然だ、しかし私に解を作ってみせろと言われると困るのだから」と言っていたのか面白かった。

1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の変形.

Rigid な compact 複素多様体の複素解析族を底空間 B 上に作ったとき、special な多様体に対応する点の集合は B のどんな部分集合になるか、を調べてみる。すると、

そういう集合は任意の余次元を持って現われ得ることが判る。そこで問題を限って $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の変形ではどうか? と問う。 $n=2$ の場合, 即ち $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の変形に対してはよく知られており, special なものは底空間の divisor に対応して現われることが判っている。 $n=3$ についても同様のことが成立する。

命題. $\mathcal{M}$ を複素多様体 B を底空間とする $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$
 $f \downarrow$ $(n=2,3)$ の複素解析族とする。
 B

$$B \supset \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in B \mid f^{-1}(x) \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \right\}$$

を special な点の爲す集合と呼ぶ。このとき Σ は B の divisor である。

証明は簡単な計算である。(Brieskorn によって $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-1}$ -bundle の universal family が決定されているので, それをきちんと調べればよい。) n を一般にすると, 計算が面倒になるのでよく判らな。しかし次の形に問題を制限すると, 同いような結果が得られる。そして, その特別な場合が Yang-Mills 方程式を調べるのに役立て

られるのである。

定理 1. E を $\mathbb{P}^m$ 上の rank n のベクトル束で、次の条件

(*) $\mathbb{P}^m$ の general な line L に E を制限した $E|_L$ は $L \cong \mathbb{P}^1$ 上の代数的自明な rank n のベクトル束になる。

を満たすもの、とする。

$\text{Gr} = \text{Gr}(1, m)$ で $\mathbb{P}^m$ の lines を分類する Grassmann 多様体を表わす。また $x \in \text{Gr}$ に対応する $\mathbb{P}^m$ の line を $\tau^{-1}(x)$ と書く。このとき

$$J = \{ x \in \text{Gr}(1, m) \mid E|_{\tau^{-1}(x)} \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^n \}$$

によつて定まる Gr の部分集合 J は Gr の divisor になる (空集合かも知れない)。

Remark. $\text{Fl} = \text{Fl}(0, 1, m) \hookrightarrow \text{Gr}(1, m) \times \mathbb{P}^m$ を旗多様体, $\alpha: \text{Fl} \rightarrow \text{Gr}$, $\beta: \text{Fl} \rightarrow \mathbb{P}^m$ を自然な projection, $\tau = \alpha \circ \beta^{-1}$ を代数的対応, とする。

Fl 上のベクトル束 β^*E の各 fibre を projectify して得られる $\mathbb{P}^{n-1}$ -bundle を α を通してなかせれば, Gr 上の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の複素解析族を与えてゐる。これの special

な点の爲す集合が everywhere 余次元 1 を持つ, というのが定理の主張である。

証明. J を support とする torsion sheaf を Gr の上に定義し, その locally free resolution が 2 つで切れることを示す. 以下は Barth が rank 2 の場合を調べるのに [2] で用いた手法と全く同じものである.

条件 (*) により E の 1 Chern 類 $c_1(E)$ は 0 である. 従って $\mathbb{P}^m$ の任意の line L に対し,

(i) $\exists x \in J$ s.t. $\tau^{-1}(x) = L$ (こういう L を E の "jumping line" と呼ぶ.)

(ii) $H^0(L, (E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) \neq 0$

(iii) $H^1(L, (E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) \neq 0$

の 3 つは互いに同値である. 但し $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1)$ は $\mathbb{P}^m$ 上の hyperplane bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ の dual line bundle, $E^\vee$ は E の dual bundle を示す. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は Serre - duality による. そこで,

$$\mathcal{L} = R^1 \alpha_* \beta^* (E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))$$

と定めると, set theoretical に $J = \text{supp } \mathcal{L}$ が成り立つ.

次に $E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1) = E^\vee(-1)$ の resolution をとろう.

$\mathbb{P}^m$ 上の任意の vector bundle は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ と十分小さいテンソルしてあげれば global sections で生成されるから、次のような locally free resolution がとれる:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i) \longrightarrow E^V(-1) \longrightarrow 0,$$

$l_i < 0$ for $\forall i=1, \dots, r$.

これを用いて L の locally free resolution を作る.

まず, general な line $L \subset \mathbb{P}^m$ に対しては

$$H^0(L, (E^V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))|_L) = 0$$

であるから, $\alpha_* \beta^* E^V(-1) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fl}(0,1,m) & \\ \alpha \swarrow \mathbb{P}^1 & & \searrow \mathbb{P}^{m-1} \beta \\ \text{Gr}(1,m) & \xleftarrow{\tau} & \mathbb{P}^m \end{array}$$

また, α の fibre は $\mathbb{P}^1$ 中では $R^2 \alpha_*$ は消える. 従って,

$$0 \longrightarrow R^1 \alpha_* \beta^* K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r R^1 \alpha_* \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i) \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

α が Gr 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle の projection map であることに

に注意すれば, $M \stackrel{\text{def}}{=} R^1 \alpha_* \beta^* K$ と $N \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^r R^1 \alpha_* \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(l_i)$

は Gr 上の coherent sheaf であることが判る. また,

$$h^1(L, \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_L(l_i)) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} H^1(L, \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_L(l_i))$$

は line $L \subset \mathbb{P}^m$ には $\exists$ する constant 中へ, N は Gr 上の locally free sheaf である.

次に $M = R^1 \alpha_* \beta^* K$ が locally free になることを示す.

そう. その為には $h^1(L, K|_L)$ が constant であることを示せばよい. 任意の line $L \cong \mathbb{P}^1$ に対し, $l_i < 0$ に注意して, 次の完全列を得る:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(L, E^v(-1)|_L) &\longrightarrow H^1(L, K|_L) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^1(L, \mathcal{O}_L(l_i)) \longrightarrow H^1(L, E^v(-1)|_L) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

従って,

$$h^1(L, K|_L) = \sum_{i=1}^r h^1(L, \mathcal{O}_L(l_i)) + h^0(L, E^v(-1)|_L) - h^1(L, E^v(-1)|_L).$$

$\sum_{i=1}^r h^1(L, \mathcal{O}_L(l_i))$ は constant であり, また $h^0(L, E^v(-1)|_L) - h^1(L, E^v(-1)|_L)$ も constant ゆえ $h^1(L, K|_L)$ は constant. よって

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} N \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

は $\mathcal{L}$ の locally free resolution であることを知る.

M と N の rank は等しいので, $\text{supp } \mathcal{L}$ は Gr の代数的部分集合として, $\det \lambda = 0$ によって定義されるから, Gr の divisor になることが判る. $\square$

定義. Jumping lines の為す divisor J の multiplicity を $\det \lambda$ の multiplicity によって定義する. 即ち,

$$\deg J \stackrel{\text{def}}{=} c_1(\mathcal{L}) = c_1(N) - c_1(M).$$

但し, $\text{Pic}(\text{Gr}(1, n)) \cong \mathbb{Z}$ により Gr 上の sheaf の

が 1 Chern 類 c_1 を整数と見なす。

定理 2. E を定理 1 に於けるハフトル束とする。 E の 2 Chern 類 $c_2(E)$ を整数と見なしたとき、それが positive であるならば、 $\deg J = c_2(E)$ が成り立つ。

証明. これも Barth [2] の idea をそのまま一般の rank に拡張すれば出来る。

$\text{Gr}(1, m)$ を Plücker 座標で射影空間にうつ込んだとき、その 2 次元線型部分空間 $\mathbb{P}^2$ が $\text{Gr}(1, 2)$ として自然に $\text{Gr}(1, m)$ に入っている。従って $C \rightarrow M \xrightarrow{\lambda} N \rightarrow L \rightarrow C$ を general な $\text{Gr}(1, 2) \cong \mathbb{P}^2$ に切って $c_1(N) - c_1(M)$ を調べる事が出来る。つまり $m=2$ として $c_1(N) - c_1(M)$ を計算すればよい。

以下 $E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) = F$ と書く。 $m=2$ として、 $\text{Gr} = \text{Gr}(1, 2) \cong \mathbb{P}^2$, $\text{Fl} = \text{Fl}(0, 1, 2)$, $\Pi = \text{Gr} \times \mathbb{P}^2$ の様に表わす。

Barth [2] (より詳しくは [2] に3)用いられている Horrocks の結果) によれば、 $\mathbb{P}^2$ 上では $F = E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ の resolution を

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

$k_i < 0$ for $\forall i=1, \dots, r-n$, $l_j < 0$ for $\forall j=1, \dots, r$,

の様に, negative 直線束の直和によつて作ることが出来る.

$\pi: (\mathbb{C}^3 - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を natural projection,

$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \longrightarrow F \longrightarrow 0$ を resolution と

する. $0 \longrightarrow \pi^* K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i) \longrightarrow \pi^* F \longrightarrow 0$ に於

て, $H^1(\pi^* K) = 0$ を導くことが出来るから,

$\iota: (\mathbb{C}^3 - \{0\}) \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ による direct image $\iota_* \pi^* K$

は locally free. 従つて K は直線束の直和に同値

となるが, negative 直線束の直和の部分束なので

各々は negative になる. 詳しくは, G. Horrocks:

Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring. Proc. London Math. Soc. 14,

689-713 (1964) 参照. しかしこの論文に出

てくる述語は「category」と「functor」だけなので, 何

が書いてあるのかまわめて判りにくい.

このとき,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r-n} k_i - \sum_{i=1}^r l_i = -c_1(F) = n \\ \sum_{i < j} k_i k_j - \sum_{i < j} l_i l_j = n \sum_{i=1}^{r-n} k_i - c_2(F) \end{cases}$$

である.

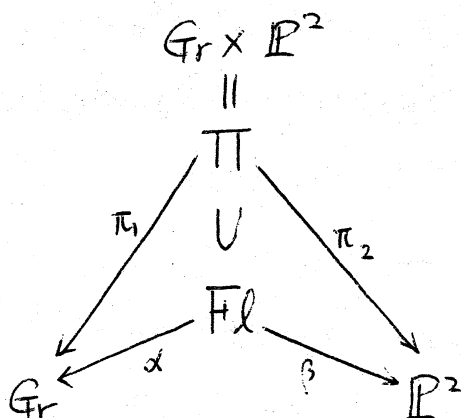
$\Pi = \text{Gr}(1,2) \times \mathbb{P}^2$ から $\text{Gr} = \text{Gr}(1,2)$ への projection を

$\pi_1, \mathbb{P}^2$ の projection を π_2 と書く.

$$\pi_1: \Pi = \mathbb{G}_r \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_r, \quad \pi_2: \Pi = \mathbb{G}_r \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

$\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(0,1,2)$ は Π の divisor $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$ の ideal sheaf は

$$\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r}(-1) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \quad \mathcal{Z} \text{ である.}$$



従って,

$$0 \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r}(-1) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \alpha^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r} \otimes \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow 0$$

ゆえ, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$0 \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r}(-1) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1) \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow \alpha^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r} \otimes \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow 0$$

即ち,

$$0 \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r}(-1) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1) \longrightarrow \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow 0$$

を得る. $k < 0$ と仮定しよう. すると $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = 0$ により,

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow R^1 \alpha_* \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) &\longrightarrow R^2 \pi_{1*} (\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}_r}(-1) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)) \\
 &\longrightarrow R^2 \pi_{1*} \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

が判る. このうち1項の C_1 を調べるには, 残り2つの C_i を

見ればよい.

まず, $R^2\pi_{1*}\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) = H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$
 は, $\mathbb{A}^1$ 上の自明ベクトル束ゆえ $C_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{次に } R^2\pi_{1*}(\pi_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(-1) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)) \\ &= H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(-1) \\ &= H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(-1) \quad (\text{Serre duality}) \\ &= \frac{1}{2}(k^2+k) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(-1) \end{aligned}$$

であるから, $C_1 = -\frac{1}{2}(k^2+k)$.

従って $C_1(R'\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = -\frac{1}{2}(k^2+k)$ for $k < 0$.

これにより,

$$\begin{aligned} C_1\left(\bigoplus_{i=1}^n R'\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l_i)\right) &= C_1\left(\bigoplus_{i=1}^n R'\alpha_*\beta^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum(l_i^2+l_i) + \frac{1}{2}\sum(k_i^2+k_i) \\ &= \frac{1}{2}(\sum k_i^2 - \sum l_i^2) + \frac{1}{2}(\sum k_i - \sum l_i) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\sum k_i)^2 - (\sum l_i)^2 - 2\sum_{i < j} k_i k_j + 2\sum_{i < j} l_i l_j\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}C_1(F) \\ &= \frac{1}{2}\left\{-C_1(F)(\sum k_i + \sum l_i) - 2(-C_1(F))\sum k_i + 2C_2(F)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}C_1(F) \\ &= C_2(F) - \frac{1}{2}C_1(F)^2 - \frac{1}{2}C_1(F) \\ &= \frac{1}{2n}\left(2n C_2(F) - (n-1)C_1(F)^2\right) \end{aligned}$$

と計算される.

ところで, $\mathbb{P}^2$ 上の rank n のベクトル束に対して定

義とした $\frac{1}{2n} (2n c_2(F) - (n-1) c_1(F)^2)$ は, F を $F \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu)$ にかえても, μ にはよらない constant であることが判る. 従って, その値を求めるときはうまく μ を選んで計算すればよい. して, $F = (E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1))|_{\mathbb{P}^2}$

で, $c_1(E^\vee) = 0$ であつたから, $\mu = 1$ にすれば,

$$\begin{aligned} c_1\left(\bigoplus_{i=1}^n R^1 \alpha_* \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i)\right) &= c_1\left(\bigoplus_{i=1}^n R^1 \alpha_* \beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_i)\right) \\ &= \frac{1}{2n} (2n c_2(E^\vee) - (n-1) c_1(E^\vee)^2) \\ &= c_2(E^\vee) \\ &= c_2(E) \end{aligned}$$

となる. 従つて $\deg J = c_2(E)$ である. $\square$

2. Instanton.

Yang-Mills 方程式や instanton についての解説は, 学会に於ける Bourguignon の講演が実に適格で明快なものであつたので, [3] が参照されることを期待しつつ, ここではその一切を省略する.

ベクトル束と $SU(2)$ -instanton については, Hartshorne [5] が詳しい研究を行つてゐる. 対応して出てくる $\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束を E と書くと, E は rank 2であり,

$$(1) \quad c_1(E) = 0, \quad c_2(E) > 0,$$

(2) E は stable vector bundle (定義は [2] 参照)

(3) E は symplectic 構造を持つ,
 なる性質を有し, 逆に (1), (2), (3) によ, E が unique
 に決定される.

これを irreducible $SU(n)$ -instanton (即ち $SU(n-1)$ -
 instanton に reduce しない $SU(n)$ -instanton) に関
 して調べてみると,

- (1) $c_1(E) = 0$, $c_2(E) > 0$, $c_3(E) = 0$,
- (2)' E は simple ベクトル束 (即ち global endo-
 morphism が constant しかない),
- (3)' 構造群が $SU(n)$ であり, かつ S^4 上の bundle か
 ら作ったという意味で, "実構造" を持つ,
- (4) $\mathbb{P}^3$ の general line L への E の制限 $E|_L$ は,
 $L \cong \mathbb{P}^1$ 上の rank n の自明ベクトル束,

とな, ていることが判る. (4) はもちろん $SU(2)$ のときにも
 成立しているが, それは (2) に含まれている.

(3) は $SU(2) = Sp(1)$ に由来するものなので,
 $SU(n)$ の場合には Atiyah-Ward [1] や Hartshorne
 [5] のような形で "実構造" を表示することは出来ない.
 また, (2) の stability も, 一般の rank に対してはよく
 判らない [6].

一階化された anti-self-dual Yang-Mills 方程式の

解 (instanton) ω , それから定まる $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle $E(\omega)$ とする.

$$\mathcal{L} = R^1 \alpha_* \beta^* (E(\omega)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) : \text{torsion sheaf on } \text{Gr}(1,3)$$

$$J(\omega) = \text{supp } \mathcal{L} \text{ with multiplicity } a(\mathcal{L})$$

とおくと, 定理 1, 2 から, $J(\omega)$ は $\text{Gr}(1,3)$ の degree $c_2(E(\omega))$ の divisor であることが判る.

$\text{Gr}(1,3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ の定義方程式が $z_6^2 = z_1^2 + \dots + z_5^2$ となるように $\mathbb{P}^5$ の座標 z を定めたとき, $\text{Gr}(1,3)$ に z から決まる complex conjugation $-$ が定義される. このとき (3)' によつて,

$$(3)'' \quad J(\omega) = \overline{J(\omega)}$$

が成り立つ. つまり $J(\omega)$ の定義方程式は実係数にされる.

[8] では, irreducible instanton ω は $J(\omega)$ によつて unique に定まることを述べた. $J(\omega)$ としてどんなものが出てくるかを見てみると, $n=2$, $a(E)=1$ のときにはすべての real divisor of degree 1 が出て来ていることが判る. 一般の場合には Drinfel'd - Manin [4] の結果を用いて調べることも出来るが, ある限られたものしか出てこない. なぜそうなのか, どうして可能な (or と思われる) ものがすべて出て来るのではないのか, よく判らない.

3. その他.

$P \in S = S^4$ 上の non-trivial $SU(n)$ -principal bundle, $\omega \in P$ 上の connection form, $\Omega \in \omega$ の curvature form とする. $c_2(P) > 0$ と仮定するように S の orientation を決め, S の natural metric に関する Hodge star operator を $*$ で表わす.

Anti-self-dual Yang-Mills 方程式とは,

$$*\Omega = -\Omega$$

のことであった. そして, この方程式を満たす解 ω

($\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ に注意) を instanton solution と呼んだ.

$$S \hookrightarrow \text{Gr}(1,3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5 \quad \text{を}$$

$$S = \{ (z_0, \dots, z_5) \in \mathbb{P}^5 \mid z_0^2 = z_1^2 + \dots + z_5^2, z_0, \dots, z_5 \in \mathbb{R} \}$$

により定めるとき, S 上の 2-form Ω は poles を持った type $(2,0)$ の form として $\text{Gr}(1,3)$ 上に解析接続出来る. それを $\tilde{\Omega}$ と書く. $\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$

なる $\tilde{\omega}$ も ω の解析接続として定義出来る.

$\tilde{\omega}$ は $E(\omega)$ の jumping lines の為す divisor $J(\omega)$ に側, 2のみ pole を持ち, residue 公式とも言うべき次の式が成立する;

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_S \text{trace } \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\Omega} \Big|_S = c_2(E) \\ = \deg J(w).$$

$\frac{1}{4\pi^2} \text{trace } \Omega \wedge \Omega$ は S 上の Pontrjagin form であるから
はじめの等式は自然であるが、2番目の、その値が pole の
degree になる、というのは不思議に思われる。

$J(w)$ は instanton から決まるものである限りいつでも
reduced divisor である。1. で扱ったような一般の
アクトル束に対しても J が reduced になるのかどうか、
またアクトル束が J によつて特徴づけられている
かどうか、はあまり判っていない。

$\mathbb{P}^3$ 以外の多様体に拡張しようとする時には、[2] で述
べた Theorem 1 をどうとらえて高次元化するか、が
KEY となるように思われる。

(1979年4月. K.C., A.K.!)

丸山正樹先生には、代数的アクトル束について色々
御教示戴いた。ここに厚く感謝の意を表する。特に
定理 2. が成立することを注意されたのは、丸山先
生であった。

文献

- [1] Atiyah, M.F. and Ward, R.S.: Instantons and algebraic geometry. Commun. Math. Phys. 55, 117-124 (1977).
- [2] Barth, W.: Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$. Math. Ann. 226, 125-150 (1977).
- [3] Bourguignon, J. P.: Geometry and physics of Yang-Mills fields. 幾何学分科会講演要旨 (日本数学会) pp. 61-65 (1979年4月).
- [4] Drinfeld, V.G. and Manin, Yu. I.: A description of instantons. Commun. Math. Phys. 63, 177-192 (1978).
- [5] Hartshorne, R.: Stable vector bundles and instantons. Commun. Math. Phys. 59, 1-15 (1978).
- [6] Maruyama, M.: private communication.
- [7] Mulase, M.: Yang-Mills 方程式の解の空間について. 城崎代数幾何学シンポジウム記録 pp. 177-201 (1978年12月).
- [8] Mulase, M.: Poles of instantons and jumping

lines of algebraic vector bundles on $\mathbb{P}^3$.

RIMS-preprint n°. 279 (1979).

- [9] 'tHooft, G.: On the phase transition towards permanent quark confinement. Nuclear Physics B138, 1-25 (1978).

この論文には、何か書いてあるのかサッパリ判らぬ
 いけれども、path space 上の operator valued function
 を用いて何かしようというあたり、数学的に見て非
 常に面白そうに思われる。