

負数と虚数の対数について

九州大学大学院数理学研究院 高瀬正仁(Masahito Takase)

Graduate School of Mathematics

Kyushu University

1. はじめに

負数と虚数の対数とは何かという問いをテーマとするオイラーの考察は、近代数学史の流れに現れた複素解析の出発点であり、オイラー以降、コーシーやガウスの思索を誘い、今日の複素変数関数論が形成された。この論点をめぐってしばしば語られるのは、いわゆる「オイラーの公式」、すなわち

$$(1) \quad e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1} \sin g$$

という等式であり、対数の無限多価性の根拠はこの公式に求められているように思う。だが、オイラーの関心事はどこまでも負数と虚数の対数の本性の解明にあったのであり、「オイラーの公式」は、対数の無限多価性を確立しようとする道すがら、証明の技術上の必要に応じて持ち出されただけにすぎないし、オイラーがこの公式に特別の関心を抱いたり、重視したりした痕跡は見当たらない。オイラーの思索の流れに沿う限り、真に重視しなければならないのは「オイラーの公式」ではなく、ヨハン・ベルヌーイが発見した等式

$$(2) \quad \frac{\log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

である。オイラーは負数と虚数の対数の考察にあたり、この等式を根柢に据え、思索の指針にしたのである。

オイラーの思索に具体的な手掛かりを与えたのは、負数と虚数の対数をめぐるライプニッツとヨハン・ベルヌーイの論争だが、それとは別に、オイラーにはオイラーに固有の事情があってこの問題の究明に向かったのである。そこで本稿では、ライプニッツとベルヌーイの論争の契機、負数と虚数の対数の考察にオイラーを誘った

数学上の事情，それにオイラーによる対数の無限多価性の発見の意義を中心にして叙述を試みたいと思う。

2. 基本文献

負数と虚数の対数について考察するうえで，基本的な位置を占める文献は，ライプニッツとヨハン・ベルヌーイの往復書簡集とオイラーの二篇の論文[E168][E807]である。ほかに，オイラーに固有の事情を考えるには，オイラーの著作『無限解析序説』を参照する必要がある。これらの文献はほぼ同時期に相前後して現れた。

1745年，ライプニッツとヨハン・ベルヌーイの往復書簡集が刊行された。これにより，負数と虚数の対数をめぐって両者の間で行われた論争の様子が明らかになる。オイラーが『無限解析序説』を執筆したのもこの年であり，ここにも負数の対数に関する記述があるが，この時点では不可解な現象が列挙されているだけであり，「対数の無限多価性」というオイラーの認識はまだ表明されていない。『往復書簡集』の影響は見られないから，オイラーの考察はライプニッツとベルヌーイの論争の経緯とは独立して進められたと推定される。『往復書簡集』と『無限解析序説』の刊行が同年になったのは偶然と思う。

1745年9月7日，オイラーの論文

[E168] 「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」(オイラー全集，第一系列，巻17，195-232頁)

がベルリン科学アカデミーに提出された(ヤコビの調査による)。この論文は1749年のベルリン科学文芸アカデミー紀要，巻5，「メモワール」の139-179頁に掲載されたが，この巻の実際の刊行年は1751年である。オイラーのもうひとつの論文

[E807] 「負数と虚数の対数について」(オイラー全集，第一系列，巻19，417-438頁)

は，内容を見ると[E168]とほとんど同じだが，少しだが独自の記述もある。この論文は『遺稿集(Opera Postuma)』巻1に収録されたが，この遺稿集が刊行されたのは1862年である。正確な執筆年は不明だが，内容から見て[E168]と同じころ執筆されたと見てよいと思う。二篇の論文を書き，一篇を選んで公表したのであろう。『無

『無限解析序説』は『往復書簡集』とは独立に執筆されたが、原稿の完成と相前後して（どちらが先なのかはわからない）『往復書簡集』が刊行され、オイラーはそれを見て即座に二論文[E168]と[E807]を執筆したと推定される。『無限解析序説』が刊行されたのは1748年である。

3. ベルヌーイの等式

負数と虚数の対数をめぐるライプニッツとベルヌーイの論争は1712年3月から翌年6月にかけて、およそ一年三ヶ月にわたって行われた。その模様は、次に挙げる10通の往復書簡に現れている。

- 1.ライプニッツからベルヌーイへ(1712年3月16日)／2.ベルヌーイからライプニッツへ(1712年5月25日)／
- 3.ライプニッツからベルヌーイへ(1712年6月30日)／4.ベルヌーイからライプニッツへ(1712年8月13日)／5.ライプニッツからベルヌーイへ(1712年9月18日)／
- 6.ベルヌーイからライプニッツへ(1712年11月11日)／7.ライプニッツからベルヌーイへ(1713年1月はじめ)／8.ベルヌーイからライプニッツへ(1713年2月28日)／
- 9.ライプニッツからベルヌーイへ(1713年4月26日)／10.ベルヌーイからライプニッツへ(1713年6月7日)

争点の事例を挙げると、ライプニッツが $\log(-1)$ は存在しないか、もしくは虚量になると主張したのに対し、ベルヌーイは $\log(-1)=0$ と主張した。 $\log\sqrt{-1}$ はどのような量になるかということも大きな論点になった。互いに自分の主張の論拠を提示し、相手の主張に反駁するという形で論争が進展した。1745年、オイラーは二篇の論文[E168][E807]においてこの論争に現れた双方の論拠と異議を詳しく再現し、そのうえで「対数の無限多価性」という所見を表明した。

ライプニッツとベルヌーイの間で負数と虚数の対数が問題になったのは、有理関数の積分の計算のためである。実係数の有理関数の積分計算は $\int \frac{dx}{1+z^2}$ というタイプの積分の計算に帰着されるが、この計算のために $\frac{1}{1+z^2}$ の分母を複素一次因子に分解して、

$$(3) \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{z-\sqrt{-1}} - \frac{1}{z+\sqrt{-1}} \right)$$

と変形し、複素積分を実行すれば

$$(4) \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \log(z-\sqrt{-1}) - \log(z+\sqrt{-1}) \right\} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$$

と計算が進行する。複素対数はここに現れるのである。

積分 $\int \frac{dx}{1+x^2}$ の計算のためには、ヨハン・ベルヌーイが発見した変数の複素一次変換も有効であり、しかもきわめて印象的である。ヨハン・ベルヌーイの全集、巻1,393-400頁に、

"Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par rapport à ce calcul"

という標題の論文が収録されているが、これはグロニンゲンで書かれたいろいろな書簡から抜粋した記事を集めたものである。その中に399頁から400頁にかけて1702年8月5日付の手紙の抜粋があり、

"Manière abregées de transformer les différentielles composées en simples, &"

という小見出しのもとに四つの問題が並んでいる。問題Iとその解では、変換

$$(5) \quad z = \frac{(t-1)b}{t+1}$$

により、微分 $\frac{a dz}{b^2 - z^2}$ は微分 $\frac{a dt}{2bt}$ に移ると主張されている。この問題の派生的命題では、同様の変換により微分 $\frac{a dz}{b^2 + z^2}$ は微分 $\frac{-a dt}{2bt\sqrt{-1}}$ に移ると言われているが、この移行を実現する変換は、

$$(6) \quad z = \frac{\sqrt{-1}(t-\sqrt{-1})b}{t+\sqrt{-1}}$$

という、複素係数の一次変換である。 $b=1$ の場合を考えると、変数変換

$$(7) \quad z = \frac{\sqrt{-1}t+1}{t+\sqrt{-1}}$$

により微分式の変形 $\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dt}{2t\sqrt{-1}}$ が発生する。これより

$$(8) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log t = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{-\sqrt{-1}z+1}{z-\sqrt{-1}}$$

と計算が進行するが、ここにもまた複素対数が現れる。

等式(4)(8)からベルヌーイの等式が導かれるが、円の面積の計算からも同じ等式が出る。実際、単位円の四分の一部分の面積を計算すると、

$$(9) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

となる。右辺の積分において、変数変換 $t = \sqrt{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ を行って計算をすすめる
と、

$$(10) \quad x = \frac{t^2-1}{2\sqrt{-1}t^2}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2\sqrt{-1}t^2} dt, \quad \sqrt{1-x^2} = t - \sqrt{-1}x = \dots = \frac{t^2+1}{2t}.$$

よって、

$$(11) \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_1^{\sqrt{-1}} \frac{t^2+1}{2t} \frac{t^2+1}{2\sqrt{-1}t^2} dt = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \int_1^{\sqrt{-1}} \frac{(t^2+1)^2}{t^3} dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{-1}} \int_1^{\sqrt{-1}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \log t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^{\sqrt{-1}} = \dots = \frac{\log \sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}.$$

これより、

$$(12) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\log \sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}.$$

よって、

$$(13) \quad \frac{\log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

という等式が手に入る。これが「ベルヌーイの等式」であり、負数と虚数の対数に出会う。ただし、負数の対数 $\log(-1)$ と虚数の対数 $\log \sqrt{-1}$ の意味合いは判然としないし、変形 $\frac{\log(-1)}{2} = \log \sqrt{-1}$ が妥当なのかどうか、この時点ではよくわからない。

オイラーは論文[E168]においてベルヌーイの等式に言及し、こんなふうに語っている。

《ベルヌーイは幸いなことに円の面積を虚数の対数に帰着させたのであるから、もし $\sqrt{-1}$ の対数が $=0$ なら、このみごとな発見はまったくいつわりであることになってしまう。この発見により、円の半径は円周の四分の一に対し、 $\sqrt{-1}$ の $1/\sqrt{-1}$ に対する比率と同じ比率をもつことをベルヌーイは示したのである。》

《円の面積を虚対数に帰着させるというベルヌーイの美しい発見は、単にこの理論と完全に合致することがわかるというばかりではなく、必然的な帰結でもあり、しかもこの理論により、はてしもなく広大な世界へと導かれていく。というのは、あらゆる数は、虚数である限り、ことごとくみな円の面積に依存していることがわかるからである。》

単位円の面積 π は虚数の対数に帰着することを教えるベルヌーイの等式は、オイラーにとって、虚数というものの実在感の根源として作用したのである。このオイラーに固有の強固な実在感こそ、今日の複素解析の源泉と見なければならないであろう。

4. 『無限解析序説』の「緒言」より

負数と虚数の対数の考察を誘う要因を考えると、ライプニッツとヨハン・ベルヌーイの場合は、有理関数の積分の問題が念頭にあり、オイラーもこれを継承したが、オイラーにはオイラーに固有のもうひとつの動機があった。それは、 $y=(-1)^x$ のような超越曲線に寄せる深刻な関心である。曲線の解析的源泉を関数に見るとというのが、無限解析におけるオイラーの姿勢である。曲線の拡大と関数の概念の拡大が平行に進んでいく。

次に引用するのは『無限解析序説』の序文の一節である。

《対数や円弧は双曲線や円の面積を通じて表示されるのであるから、超越的な量であり、無限解析で取り扱われるのが普通の姿である。しかし私は冪から出発して指数量へと歩を進めた。指数量というのは、その冪指数が変化量である冪にほかならないが、これを逆転することにより、きわめて自然で、しかも豊饒な対数の観念が手に入ったのである。このような道を歩むと、対数というもののめざましい効用がおのずと明るみに出されるが、そればかりではない。普通、対数を表示するのに使われる習慣が確立されているあらゆる無限級数もまた、この道筋の中から取り出されてくるのである。それに、対数表を作成する方法も、この道筋をたどることによりごく簡単に明らかになる。これと同様に、私は円弧の考察に向かった。この種の量は対数とはまったく別種のものではあるが、言わばぴんと張られたひもで対数と結ばれていて、一方の量が虚量になると見れば、即座にもう一方の量へと移っていくのである。》

これは序文に出ている言葉だが、本文に移って巻1、第8章「円から生じる超越量」を見ると、該当する記述に出会う。まずはじめに目に留まるのは「オイラーの公式」として周知の等式で、

$$(14) \quad e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \sin v$$

$$(15) \quad e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1} \sin v$$

という形で表明されている。これは指数量と「円から生じる超越量」、すなわち円弧の正弦や余弦との関係を記述する等式である。幕の考察から指数量に移るというオイラーの方針に沿えば、指数量 e^z は、 i は無限大数として、等式

$$(16) \quad \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

により表される。ここで z は実変化量だが、左辺の表示式それ自体を見ると、 z は実変化量と限定されるわけではなく、一般に複素数値を取る変化量を考えても意味をもつ可能性がある。その場合、複素指数量 e^z は等式(14)により定義されると見なければならぬが、実際にそのようになること、およびその数値は(14)(15)で与えられることをオイラーは証明した。もう少し詳しく言えば、一般の複素量 $z = \mu + v\sqrt{-1}$ (μ と v は実量)に対し、複素指数量 e^z は

$$(17) \quad e^z = e^\mu (\cos v + \sqrt{-1} \sin v)$$

で与えられる。 z が実変化量の場合、等式(16)は指数量 e^z の表示形態のひとつだが、 z が複素変化量の場合には事情が異なり、指数量 e^z は等式(16)で定義され、式(17)により表示される値を表すことが証明されるのである。その証明はド・モルガンの定理に基づいている。

オイラーの公式に神秘の影はない。だが、オイラーは指数量に続いて対数に移り、等式

$$(18) \quad z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos z + \sqrt{-1} \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \sin z}$$

を書き留めた。これは円弧と複素対数との関係を与える等式である。だが、この時点では「虚数の対数」というものの意味合いが判然としないのであるから、オイラーの公式とは違い、この等式はいかにも不思議で、謎めいている。この等式を目にして深い印象を受けるのは、オイラーはライプニッツやベルヌーイとは別の道筋をたどって虚対数の考察に接近したという事実である。

オイラーを虚対数の考察へと誘ったもうひとつの契機は、超越曲線への関心であ

る。これは『無限解析序説』という書物そのものの性格に関わる事柄だが、この作品は、いろいろな曲線を関数のグラフとして把握し、考察することを企図して著されたのである。ところが関数概念が拡大するのに伴って、曲線の範疇もまたどこまでも拡大する。 x は変化量として、 $y=x^{\sqrt{2}}$ や $y=(-1)^x$ のような表示式をもまた関数と見ると、グラフを描くのがむずかしい超越関数が現れるが、その困難の原因は負数や虚数の対数の意味が明確になっていないところに求められる。オイラーの場合、このような思索の場から複素対数への深刻な関心が生れたのである。

次に挙げるのは『無限解析序説』巻2、第21章「超越的な曲線」からの引用である。

《関数は代数的でなければ超越的である。それゆえ、ある曲線の方程式の中に超越関数の姿が見られるなら、その曲線は、その超越関数が存在するために超越曲線になる。・・・曲線の方程式は座標 x と y の間の関係を表わすが、その方程式には、有理的ではなく、しかも有理的な形に帰着させることもできないという性質が備わっているとしよう。そのとき、その曲線は超越曲線である。もし方程式の中に、整数でも分数でもない冪指数をもつ冪が現われるなら、その方程式はいかなる仕方でも有理的な形に帰着させることはできない。したがって、そのような方程式で表される曲線は超越曲線である。こうして第一種の超越曲線、すなわち、もっとも単純な種類の超越曲線が生じる。そのような曲線の方程式には非有理的な冪指数が実際に姿を見せるのである。この種の方程式には対数も円弧も姿を見せず、ただ非有理数の概念の認識のみを元にして発生するから、第一種の超越曲線はどちらかといえばむしろ通常の幾何学の守備範囲に所属するようにも見える。そうしてまさしくこの状態に論拠に求めて、このような曲線はライブニッツにより内越的(インターセンデンタル)という名で呼ばれたのである。代数的曲線と超越的曲線の真ん中あたりの位置を占めるというほどの意味合いである。》

インターセンデンタルの一語に仮に「内越的」という訳語をあてたが、たとえば関数 $y=x^{\sqrt{2}}$ のグラフとして表される曲線は代数的のようには見えてそうではなく、内

越的な超越曲線である。変化量 x が実数値を取る場合には、この関数の値は確定し、近似値の算出も可能である。だが、 x が負数の場合、たとえば $x = -1$ なら y の値は $(-1)^{\sqrt{2}}$ になるが、この表示式はどのような数値を表すのであろうか。虚の対数を用いれば、

$$(19) \quad (-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log(-1)}$$

と表示され、事態が不明瞭になる原因は -1 の対数というものの意味が不確定であることに根ざしていることがわかる。 $y = (-1)^x$ の方も同様に、

$$(20) \quad (-1)^x = e^{x \log(-1)}$$

となり、この関数の本性を尋ねると、やはり「 -1 の対数とは何か」という問いに帰着されていく。

負数と虚数の対数を考察すると、不思議なパラドックスが生じるとオイラーは言う。ベルヌーイの等式によれば $\log(-1)$ と $\sqrt{-1}$ の比は有限値をもつのであるから、負の数の対数は虚量である。よって、 n は実量とするとき、 $\log(-n)$ は虚量である。そこでこれを i と置くと、 $\log(-n)^2 = \log n^2 = 2i$ 。ところが $\log n^2 = 2 \log n$ であり、これは実量であるから、 $i = \log n$ は実量であることになり、パラドックスに遭遇する。オイラーはこんなパラドックスを指摘して、「このパラドックスを通常の量の観念をもって解消するにはどのようにしたらよいのであろうか」「この点は明瞭ではない」と慨嘆した。

次に挙げるのも『無限解析序説』巻2、第21章「超越的な曲線」からの引用である。

《先ほど言い添えた事柄が承認されたなら、数 a の半分は $\frac{a}{2} + \log(-1)$ と $\frac{a}{2}$ であることが明らかになる。実際、前者の量の二倍は、

$$a + 2 \log(-1) = a + \log(-1)^2 = a + \log 1 = a$$

となる。ここで、たとえ $\log(-1) = 0$ ではないとしても、

$$+ \log(-1) = -\log(-1)$$

であることに留意しなければならない。実際、 $-1 = \frac{+1}{-1}$ であるから、

$$\log(-1) = \log(+1) - \log(-1) = -\log(-1)$$

となるのである。同様に、 $\sqrt[3]{1}$ の値は1ばかりではなく $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ でもあるから、

$$3 \log \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \log 1 = 0$$

となる。したがって同一の量 a の三分の一は、

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{a}{3} + \log \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{および} \quad \frac{a}{3} + \log \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

となる。実際、これらの各々の表示式を三倍すると同じ量 a が手に入るのである。この疑問をそのまま受け入れることはできそうにないが、これを解決する方向に向かうべく、もうひとつのパラドックスを報告しておかなければならない。すなわち、どの数にも無限に多くの対数が存在し、しかもそれらのうち実量であるものはひとつより多くは存在しないのである。たとえば 1 の対数は 0 に等しいが、それにもかかわらずそのほかにも 1 の虚の対数が無限に多く存在する。それらは

$$2 \log(-1), \quad 3 \log \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad 4 \log(-1) \quad \text{および} \quad 4 \log(\pm \sqrt{-1})$$

などである。これらのほかにも 1 の冪根を作ることにより与えられるものが無数に存在する。この命題は、これに先行する命題に比べてはるかにもっともらしい感じがある。なぜなら、 $x = \log a$ と置くと、 $a = e^x$ となる。したがって

$$a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

となるが、これは無限次元の方程式であるから、 x が無限に多くの根をもっても驚くほどのことはないのである。後者のパラドックスについてはこんなふうに解明がなされたが、それにもかかわらず前者のパラドックスのほうは依然としてその力を保持している。われわれは軸の下方において無数の離散点に対数曲線に所属することを示したが、この事実がある限り、前者のパラドックスはなお生きて働いているのである。》

この時点では、オイラーは対数の無限多価性をパラドックスと認識していたことをうかがわせる記述である。負数と虚数の対数が存在することは、すべての考察の大前提になっていて、この点に疑問の介在する余地はない。存在を前提にしたうえで、それはいかなるものかと問うているのである。

5. 対数の無限多価性

負数と虚数の対数をめぐって独自の考察を繰り広げていたオイラーは、ライプニッツとベルヌーイの論争に接し、思索を深めていった。最大の成果は「対数の無限多価性」を自覚し、数学的事実として許容する姿勢を打ち出したことである。この事実にはそれまでも気づいていたが、「対数はひとつの値」という観念を放棄することができず、除去すべきパラドックスと見て困惑していたのである。

オイラーは論文[E168]「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」においてライプニッツとベルヌーイの双方の主張の論拠を再現し、互いに投げかけあった異議をひとつひとつ検討した。この作業の末にオイラーが直面したのは、どちらの主張が正しいのか、真偽の判定はできないという謎めいた状況であった。 $\log(-1)=0$, $\log\sqrt{-1}=0$ と主張するベルヌーイの所見は、ほかならぬベルヌーイの等式に矛盾するという点で受け入れがたく、この等式を基礎にする限り、ライプニッツの主張の方に理があるように見える。だが、精密に検討を重ねていくと、事態は迷宮に入ってしまう。オイラーは、

《ライプニッツの見解を受け入れても、ベルヌーイの見解を受け入れても、どちらの方面に顔を向けても、その決断を保持するうえであまりにも巨大な障碍につねに遭遇し、諸矛盾から逃れるすべがなくなってしまう》

と言っている。正反対の二通りの見解が提示されているのであるから、一方が間違っているとすれば、もう一方の見解は必然的に正しいはずであるように見えるが、そうはならない。そこでオイラーは、「対数の理論を適切に確立し、もはやいかなる矛盾にもさらされることのないようにする」という問題をあらためて提示したのである。

ある数が提示されたとき、その対数というのは、「ある任意に取り上げられた数の、提示された数に等しくなる冪の冪指数」のことである。このように把握された対数の観念は完全に正しく、どこにも不備はない。だが、とオイラーは言う。「この観念には一般に、この観念に適合しない状態が伴っている」というのである。そ

れは、ほとんど気づかれることのないことで、

《各々の数に対応する対数はただひとつしかない、通常は想定されているという事実》

である。この当然のように見える想定、すなわち「各々の数に対したただひとつの対数しか対応しない」という想定に間違いがひそんでいて、そのために結論のない論争が引き起こされるのだというのが、オイラーの発見であった。そこでオイラーは、「これらの困難と矛盾のすべてを消失させるために、与えられた定義そのものに基づいて、各々の数に対して無限に多くの対数が対応する」と主張し、証明を試みた。それが論文[E168][E807]のテーマである。対数の無限多価性はオイラーの独自の数学的認識であり、数学的発見の名に値すると思う。この発見に似た印象を受けるのは、ガウスが相互法則研究の場で示した「数域の拡大」のアイデアである。

6. 結語

オイラーはまず負数の対数の無限多価性、次に正数の対数の無限多価性を示し、それから虚量の対数の無限多価性の証明に移ったが、その証明の途中で「オイラーの公式」 $e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1} \sin g$ に出会う。記述のように、この公式の左辺は、 n は無限大数として、

$$e^{g\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{g\sqrt{-1}}{n}\right)^n$$

と定義される量である。右辺を無限級数に展開し、 $\cos g$ 、 $\sin g$ の無限級数表示と比較することにより、オイラーの公式が出るが、これはただこれだけのことにすぎないし、オイラーの関心事がこの公式それ自体にあったわけでもない。オイラーが真に探究したのは複素対数であり、「対数の無限多価性」の発見に成功したが、その途中にオイラーの公式が現れたのである。

生前は公表されなかった論文[E807]では、虚量の対数の無限多価性がオイラーの公式を使わずに証明されている。再現すると次のようになる。 φ は半径1の円の任意の弧とし、その正弦を x 、その余弦を y とする。したがって、 $y = \sqrt{1-x^2}$ 。一般に、 n は任意の整数とすると、式 $2n\pi + \varphi$ で表される弧の正弦はすべて x であり、

余弦はすべて $y = \sqrt{1-x^2}$ になる。微分を作ると、 $d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 。 $x = z\sqrt{-1}$ と置くと、 $d\varphi = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1+x^2}}$ となる。他方、積分を計算すると、 C は定数として、

$$(20) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{-1}) + C.$$

となる。よって、

$$(21) \quad \varphi = \sqrt{-1} \log\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{-1}}\right) + C.$$

ここで、 $x=0$ のとき $\varphi=0$ となることに留意すると、定数 C は $=0$ であることが明らかになる。よって、 $\varphi = \sqrt{-1} \log(\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{-1})$ 。よって、

$$(22) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1}).$$

すなわち、

$$(23) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(y + x\sqrt{-1})$$

となる。

この等式は、弧 φ と、その正弦および余弦の間の関係を表しているから、同一の正弦と同一の余弦 y をもつ他のあらゆる弧に対してもまた成立する。よって、

$$(24) \quad \varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(y + x\sqrt{-1}).$$

よって、等式

$$(25) \quad \log(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$$

もしくは

$$(26) \quad \log(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$$

が得られる。この等式は、数 $y + x\sqrt{-1}$ に対し、無限に多くの対数が対応することを示している。

1745年、オイラーはライプニッツとベルヌーイの論争に手掛かりを得て、円の面積は虚対数に帰着されるという事実の発見(ベルヌーイの発見)を根柢に据え、対数の無限多価性の認識に到達した。後年の複素解析はこの自覚的認識から出発したのである。

(平成19年11月30日)