

# 交代符号行列の高さ関数を利用した順序イデアル

岡山大学大学院自然科学研究科数理物理学専攻, 大本豊数

Toyokazu Ohmoto

Division of Mathematics and Physics,

Graduate School of Natural Science and Technology,

Okayama University

## 1 はじめに

本稿では, 置換行列のひとつの一般化と得られる交代符号行列について取り扱う. 交代符号行列は Mills-Robbins-Rumsey [1] によって数え上げ問題が提唱され, Kuperberg による証明 [2] でグリッドを用いた六頂点モデルが用いられている.  $n$  次の交代符号行列に対応する六頂点モデルは格子状の無向グラフ  $L_n$  の辺の向き付けを用いて説明されるが, 向き付けの代わりに辺の 2-彩色を用いて Fully-pucked-loop model が定義される. Wieland [6] によって, gyration と呼ばれる全単射が構成され, Fully-pucked-loop model の特徴付けが示されている. 一方で,  $n$  次の交代符号行列全体の集合  $\mathcal{A}_n$  は順序集合としての側面も持っており,  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の Bruhat order の Dedekind-MacNeille completion であるだけでなく, 分配束を成していることも知られている. Striker-Williams [7] によって gyration の束構造による言い換えが提唱されており, 本稿では Stanley [5] の有限分配束の基本定理に基づいて  $\mathcal{A}_n \cong J(\mathbb{P}_n)$  となるような半順序集合  $\mathbb{P}_n$  を構成する. また, 点対称交代符号行列などの対称性を考慮した新たなクラスが提唱されており, それらのクラスへの gyration の拡張を目的としている. 本稿の後半では, 点対称交代符号行列の順序構造への類似に関するアイデアを紹介する.

## 2 交代符号行列と六頂点モデルおよび高さ関数

### 2.1 交代符号行列と六頂点モデル

まず初めに交代符号行列の定義を述べる.

**定義 2.1.**  $n$  を正の整数とする.  $n$  次正方行列  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  が  $n$  次の交代符号行列 (Alternating

sign matrix) であるとは以下を満たすことを言う:

$$a_{i,j} \in \{0, 1, -1\} \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (1a)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq k} a_{i,j}, \sum_{1 \leq i \leq k} a_{i,l} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq k, l \leq n) \quad (1b)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,l} = 1 \quad (1 \leq l \leq n) \quad (1c)$$

特に  $n$  次の交代符号行列全体の集合を  $\mathcal{A}_n$  とおく.  $\mathcal{A}_n$  の各元は  $n \times n$  のグリッドを用いた六頂点モデルで表すことができ, 後述する開境界条件を持つ六頂点モデルとの間に全単射が構成される. 本稿では, 六頂点モデルは今から説明する無向グラフ  $L_n = (V(L_n), (L_n))$  の各辺への向きの与える写像として定義する.

**定義 2.2.** 無向グラフ  $L_n = (V(L_n), (L_n))$  について,  $V(L_n) = V_0(n) \sqcup V_1(n)$  および  $E(L_n)$  を以下のように定める:

$$\begin{aligned} V_0(n) &:= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x, y \leq n\}, \\ V_1(n) &:= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq n, y \in \{0, n+1\}\} \sqcup \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \in \{0, n+1\}, 1 \leq y \leq n\}, \\ E(L_n) &:= \left\{ \{(x, y), (x+1, y)\} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq n, \\ 1 \leq y \leq n \end{array} \right\} \sqcup \left\{ \{(x, y), (x, y+1)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq n, \\ 0 \leq y \leq n \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

特に  $V_0(n)$  を内部頂点 (Interior vertex) の集合,  $V_1(n)$  を境界点 (Boundary vertex) の集合と呼ぶ. また,  $E_0(n) := \{(u, v) \mid u, v \in V_0(n)\}$  および  $E_1(n) := E(L_n) \setminus E_0(n)$  とおき,  $E_1(n)$  を境界辺 (Boundary edge) の集合と呼ぶ. いま,  $\varphi: E(L_n) \rightarrow \bigsqcup_{\{(u,v) \in E(L_n)\}} \{(u,v), (v,u)\}$  が  $\varphi(\{(u,v)\}) \in \{(u,v), (v,u)\}$  を満たすときに  $E(L_n)$  の辺の向き付けといい, 境界辺の向き付け  $\varphi|_{E_1(n)}$  を境界条件 (Boundary condition) という. このとき,  $(u, v)$  は  $u$  を始点,  $v$  を終点とする辺という. 任意の  $1 \leq k \leq n$  に対して境界辺  $\{(k, 0), (k, 1)\}$  および  $\{(k, n+1), (k, n)\}$  が境界点を終点とし,  $\{(0, k), (1, k)\}$  および  $\{(n+1, k), (n, k)\}$  が境界点を始点とするような境界条件を開境界条件 (Open boundary condition) という. 本稿では開境界条件を持つ向き付けに限定して議論する.

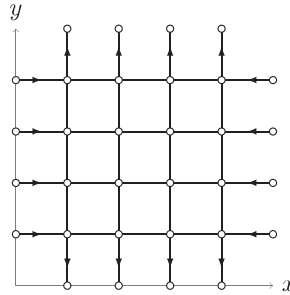


図 1:  $L_4$  および  $L_4$  上の開境界条件

ここで、任意の内部頂点  $v \in V_0(n)$  には 4 本の辺が接続することに注意する。内部頂点  $v \in V_0(n)$  に接続する 4 本の辺のうち 2 本が  $v$  を始点とし、残りの 2 本が  $v$  を終点とするとき  $v$  は 2-in 2-out であるという。任意の内部頂点が 2-in 2-out となるような辺の向き付けを六頂点モデル (Six vertex model) の State という。内部頂点  $v$  に接続する 4 本の辺について、2-in 2-out となるような向きの付け方はちょうど 6 種類のいずれかとなる。任意の  $1 \leq i, j \leq n$  について、内部頂点  $(j, n-i+1)$  に接続する 4 本の辺の向きの付け方に基づいて  $n$  次交代符号行列の  $(i, j)$ -成分を決定することで全単射を構成する。図 2 において対応を示す。

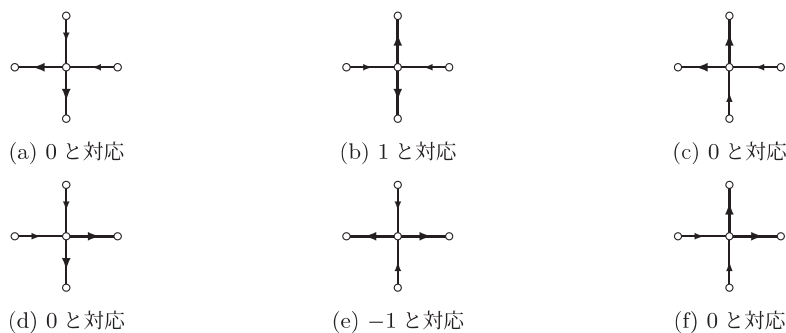


図 2: 2-in 2-out となる辺の向きの付け方

## 2.2 六頂点モデルと高さ関数

先ほどまでは、各内部頂点に接続する 4 本の辺の向きの定め方によって六頂点モデルと交代符号行列の間の全単射について説明した。一方で、 $L_n$  の面に数字を配置することで開境界条件を持つ  $L_n$  を用いた六頂点モデルと高さ関数と呼ばれる  $(n+1)$  次正方行列の間に全単射が構成できる。まず、高さ関数の定義を述べる。

**定義 2.3.**  $(n+1)$  次正方行列  $(h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  が以下を満たすとき高さ関数 (Height function) という：

$$h_{0,k} = h_{k,0} = h_{n,n-k} = h_{n-k,n} = k \quad (0 \leq k \leq n), \quad (2a)$$

$$|h_{i+1,j} - h_{i,j}| = |h_{j,i+1} - h_{j,i}| = 1 \quad (0 \leq i < n, 0 \leq j \leq n). \quad (2b)$$

図 3 において、高さ関数の成分の配置の方法を示す。内部頂点  $(j, n-i+1)$  を含む面に配置される 4 種類の成分  $h_{i,j}$ ,  $h_{i,j-1}$ ,  $h_{i-1,j-1}$ ,  $h_{i-1,j}$  の関係は  $h_{i,j} = k$  と固定したとき、条件 (2b) より 6 種類のいずれかである。図 4 において、内部頂点  $(j, n-i+1)$  の辺の向きと高さ関数の値の対応を示す。

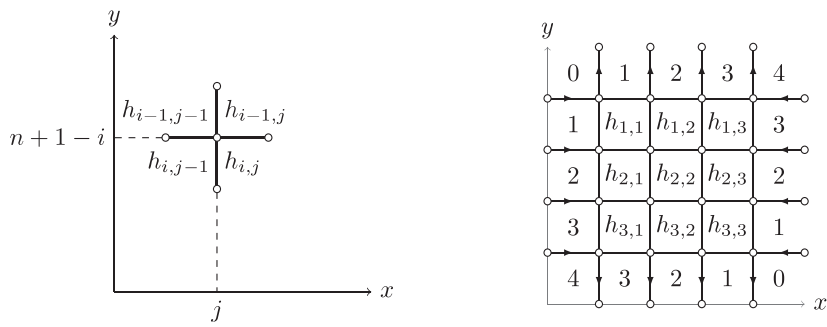


図 3: 高さ関数の成分の配置

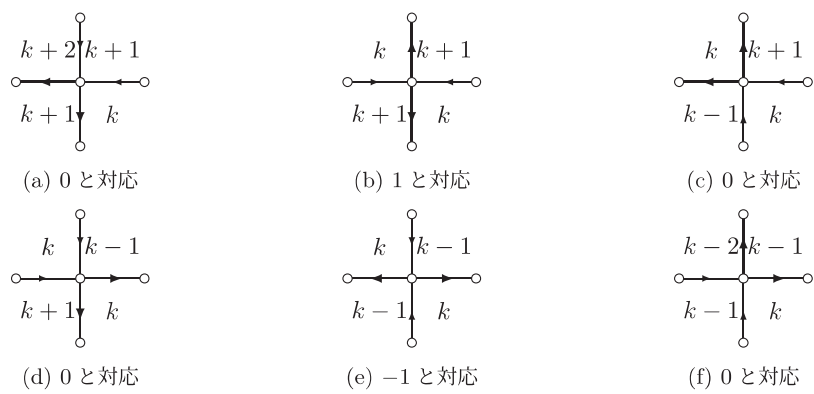


図 4: 六頂点モデルと高さ関数の対応

2.3 交代符号行列の半順序

これまでの議論から、六頂点モデルを紹介することで  $n$  次交代符号行列に対して高さ関数が定まることが分かった。いま、対応する高さ関数の成分を比較することで  $\mathcal{A}_n$  に半順序を導入する。

**定義 2.4.**  $A, B \in \mathcal{A}_n$  とする。また、 $A$  に対応する高さ関数を  $(h_{i,j})$ 、 $B$  に対応する高さ関数を  $(g_{i,j})$  とする。このとき、 $\mathcal{A}_n$  に以下のように半順序を定義する：

$$A \leq B \iff \text{任意の } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ に対して } h_{i,j} \leq g_{i,j} \text{ を満たす。}$$

この順序によって  $\mathcal{A}_n$  は分配束を成すことが知られている。特に有限集合なので Stanley [5] の有限分配束の基本定理が適用できる。

**定理 2.1.**  $L$  を有限分配束とする。このとき、 $L \cong J(P)$  を満たす半順序集合  $P$  が同型を除いて一意に存在する。ここで、 $J(P)$  は  $P$  の順序イデアル全体の成す束を表す。

Striker-Williams [7] は  $\mathcal{A}_n$  に対して,  $A$  型ポジティブルートポセットを用いて  $\mathcal{A}_n \cong J(\mathbb{A}_n)$  を満たす  $\mathbb{A}_n$  を構成している. 今回は, 高さ関数の各成分の値に関する条件に着目して  $\mathcal{A}_n \cong J(\mathbb{P}_n)$  を構成する.

### 3 高さ関数を利用した順序イデアルの構成

順序イデアルの成す束への順序を保つ写像  $\psi: \mathcal{A}_n \rightarrow J(\mathbb{P}_n)$  を考えるとき, 各  $x \in \mathbb{P}_n$  に対してそれぞれ  $\mathcal{A}_n$  の元に関する条件  $p(x)$  を用意して説明する. 特に,  $x \leq y$  を満たすような  $x, y \in \mathbb{P}_n$  に対して  $p(y) \Rightarrow p(x)$  となるように条件を用意する. このとき,  $A \in \mathcal{A}_n$  に対して  $\psi(A) := \{x \in \mathbb{P}_n \mid A \text{ は条件 } p(x) \text{ を満たす.}\}$  によって  $\psi$  を構成する. 順序イデアル  $I \in J(\mathbb{P}_n)$  が与えられた時に,  $I = \psi(A)$  となるような  $A$  に対応した高さ関数が一意的に決定できるように条件たちを用意し, それらの条件たちをインデックスするように  $\mathbb{P}_n$  の構成を行っていく.

まず, 添え字の集合  $\mathcal{I}(n)$  を  $\mathcal{I}(n) := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i, j \leq n-1\}$  とおく. このとき, 高さ関数  $(h_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$  について (2a) より, 任意の  $(i, j) \in \mathcal{I}(n)$  に対して  $h_{i,j}$  の値が定まれば高さ関数が決定できることに注意する.  $\mathbb{P}_n$  を構成する準備として,  $\mathcal{I}(n)$  を  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  個の集合  $T_l$  ( $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ) に分ける. この手順が本稿の特徴であり, トラック分けと呼ぶことにする.

**定義 3.1.**  $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  に対して,  $T_l$  を以下のように定める:

$$T_l := \{(l, k) \mid l \leq k \leq n-l\} \cup \{(k, l) \mid l \leq k \leq n-l\} \\ \cup \{(n-l, k) \mid l \leq k \leq n-l\} \cup \{(k, n-l) \mid l \leq k \leq n-l\}.$$

この  $T_l$  を  $l$  番目のトラックと呼ぶ.

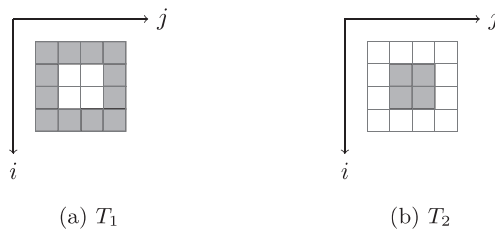


図 5:  $n = 5$  のときのトラック分け

ここで,  $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  を満たす整数  $l$  を 1 つ固定する.  $l \leq k \leq n-l$  について  $m_{l,k} = m_{k,l} = l-k$ ,  $m_{n-l,k} = m_{k,n-l} = n-k-l$  とおくと,  $(i, j) \in T_l$  のとき, 高さ関数の  $(i, j)$ -成分の取りうる値は  $m_{i,j}, m_{i,j} + 2, \dots, m_{i,j} + 2l$  の  $(l+1)$  種類のいずれかになっていることに注意する.

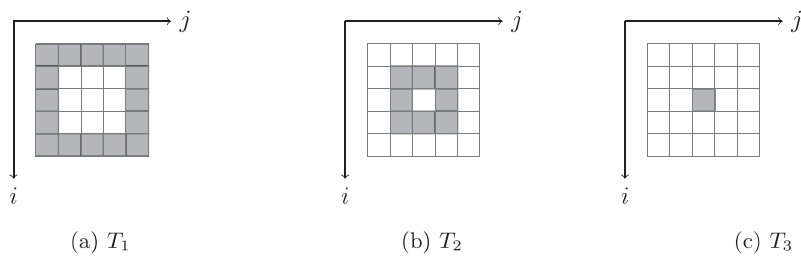


図 6:  $n = 6$  のときのトラック分け

定義 3.2. 集合  $\mathbb{P}_n$  を以下のように定める:

$$\mathbb{P}_n := \bigsqcup_{1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{ (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid (i, j) \in T_l, 1 \leq k \leq l \}. \tag{3}$$

また, 以下のような被覆関係 (cover relation) によって  $\mathbb{P}_n$  に半順序を定める:

$$(i, j, k) \text{ cover } (i', j', k') \iff \begin{cases} |i - i'| = 1 \\ j = j' \\ m_{i,j} + 2k = m_{i',j'} + 2k' + 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} i = i' \\ |j - j'| = 1 \\ m_{i,j} + 2k = m_{i',j'} + 2k' + 1 \end{cases} .$$

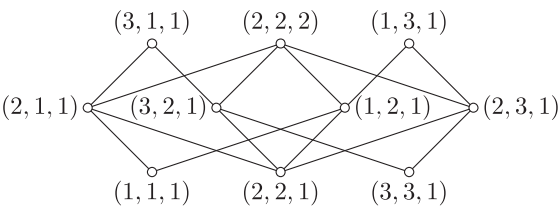


図 7:  $\mathbb{P}_4$  のハッセ図

いま,  $A \in \mathcal{A}_n$  および  $A$  に対応する高さ関数を  $(h_{i,j})$  とする.  $(i, j, k) \in \mathbb{P}_n$  に対する条件  $p((i, j, k))$  は以下のように定める:

$$A \text{ が条件 } p((i, j, k)) \text{ を満たす} \iff h_{i,j} \geq m_{i,j} + 2k \text{ を満たす.}$$

特に  $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  を満たす整数  $l$  を 1 つ固定したとき, 任意の  $(i, j) \in T_l$  および与えられた  $I \in J(\mathbb{P}_n)$  について以下が成り立つ:

$$(i, j, 1) \notin I \iff h_{i,j} = m_{i,j}, \tag{4a}$$

$$(i, j, k) \in I \text{ かつ } (i, j, k + 1) \notin I \iff h_{i,j} = m_{i,j} + 2k \tag{1 \leq k < l}, \tag{4b}$$

$$(i, j, l) \in I \iff h_{i,j} = m_{i,j} + 2l. \tag{4c}$$

逆写像はこの性質に注意して各成分の値を決定することで構成できる.

## 4 点対称交代符号行列

ここからは点対称性を持つ交代符号行列の部分集合に着目し、これまでの議論の類似を行うためのアイデアを述べていく。いま、 $n$  次交代符号行列  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  が点対称交代符号行列 (Half turn Alternating sign matrix) であるとは、任意の  $1 \leq i, j \leq n$  に対して  $a_{i,j} = a_{n-i+1, n-j+1}$  を満たすことである。また、対応する高さ関数  $(h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  が任意の  $(i, j) \in \mathcal{I}(n)$  に対して、 $h_{i,j} = h_{n-i, n-j}$  を満たしている。特に  $n \geq 3$  のとき、順序イデアルの構成のために振る舞いをチェックすべき成分の個数は  $\#\mathcal{I}(n)$  より少なくなる。前半での議論の類似を行うために、無向グラフ  $L_n^{\text{HT}}$  および添え字の集合  $\mathcal{I}^{\text{HT}}(n)$  を導入していく。 $n$  が偶数のとき、奇数のときにそれぞれ異なる定義をする。

### 4.1 点対称交代符号行列に対応した六頂点モデルと高さ関数

特に、無向グラフ  $L_{2k}^{\text{HT}}$  においては共通の両端をもつ 2 本の辺が出てくることに注意して無向グラフ  $L_n^{\text{HT}}$  を定義する。

**定義 4.1.** 無向グラフ  $L_{2k}^{\text{HT}} = (V(L_{2k}^{\text{HT}}), E(L_{2k}^{\text{HT}}))$  について、 $V(L_{2k}^{\text{HT}}) = V_0^{\text{HT}}(2k) \sqcup V_1^{\text{HT}}(2k)$  を以下のように定める。

$$\begin{aligned} V_0^{\text{HT}}(2k) &:= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq k, 1 \leq y \leq 2k\} \\ V_1^{\text{HT}}(2k) &:= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq k, y \in \{0, 2k+1\}\} \sqcup \{(0, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq y \leq 2k\} \end{aligned}$$

また、 $E(L_{2k}^{\text{HT}}) = E_0^{\text{HT}}(2k) \sqcup E_1^{\text{HT}}(2k)$  を以下のように定める：

$$\begin{aligned} E_0^{\text{HT}}(2k) &:= \left\{ \{(x, y), (x, y+1)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq k, \\ 1 \leq y < k \end{array} \right\} \sqcup \left\{ \{(x, y), (x, y+1)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq k, \\ k < y < 2k \end{array} \right\} \\ &\quad \sqcup \left\{ \{(x, y), (x+1, y)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x < k, \\ 1 \leq y \leq 2k \end{array} \right\} \sqcup \{(k, y), (k, 2k-y+1)\} \mid 1 \leq y \leq k\} \\ &\quad \sqcup \{(x, k), (x, k+1)\} \mid 1 \leq x < k\} \\ &\quad \sqcup \{(k, k), (k, k+1)\}_V, \{(k, k), (k, k+1)\}_H, \\ E_1^{\text{HT}}(2k) &:= \left\{ \{(x, y), (x, y+1)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq k, \\ y \in \{0, 2k\} \end{array} \right\} \sqcup \{(0, y), (1, y)\} \mid 1 \leq y \leq 2k\}. \end{aligned}$$

**定義 4.2.** 無向グラフ  $L_{2k+1}^{\text{HT}} = (V(L_{2k+1}^{\text{HT}}), E(L_{2k+1}^{\text{HT}}))$  について、 $V(L_{2k+1}^{\text{HT}}) = V_0^{\text{HT}}(2k+1) \sqcup V_1^{\text{HT}}(2k+1)$  を以下のように定める：

$$\begin{aligned} V_0^{\text{HT}}(2k+1) &:= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq k, 1 \leq y \leq 2k+1\} \\ &\quad \sqcup \{(k+1, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid k+1 \leq y \leq 2k+1\} \\ V_1^{\text{HT}}(2k+1) &:= \{(x, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq k, \} \sqcup \{(x, 2k+2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq k+1, \} \\ &\quad \sqcup \{(0, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq y \leq 2k+1\} \end{aligned}$$

また,  $E(L_{2k+1}^{\text{HT}}) = E_0^{\text{HT}}(2k+1) \sqcup E_1^{\text{HT}}(2k+1)$  を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
 E_0^{\text{HT}}(2k+1) &:= \left\{ \{(x, y), (x+1, y)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x < k, \\ 1 \leq y \leq k \end{array} \right\} \sqcup \left\{ \{(x, y), (x+1, y)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq k, \\ k < y \leq 2k+1 \end{array} \right\} \\
 &\quad \sqcup \left\{ \{(x, y), (x, y+1)\} \mid \begin{array}{l} 1 \leq x \leq k, \\ 1 \leq y < 2k+1 \end{array} \right\} \\
 &\quad \sqcup \{ \{(k+1, y), (k+1, y+1)\} \mid k < y < 2k+1 \} \\
 &\quad \sqcup \{ \{(k, y), (k+1, 2k+2-y)\} \mid 1 \leq y \leq k \} \\
 E_1^{\text{HT}}(2k+1) &:= \{ \{(x, 0), (x, 1)\} \mid 1 \leq x \leq k \} \sqcup \{ \{(x, 2k+1), (x, 2k+2)\} \mid 1 \leq x \leq k+1 \} \\
 &\quad \sqcup \{ \{(0, y), (1, y)\} \mid 1 \leq y \leq 2k+1 \}
 \end{aligned}$$

このとき,  $V_0^{\text{HT}}(n), V_1^{\text{HT}}(n), E_1^{\text{HT}}(n)$  をそれぞれ  $L_n^{\text{HT}}$  の内部頂点の集合, 境界点の集合, 境界辺の集合と呼ぶ. また,  $L_n^{\text{HT}}$  の辺の向き付けが任意の内部頂点  $v$  について,  $v$  を始点にする辺と  $v$  を終点とする辺の本数が等しくなるとき,  $L_n^{\text{HT}}$  上の六頂点モデルの state と呼ぶ. 以下を満たすような境界条件  $\tau$  を  $L_n^{\text{HT}}$  の開境界条件という:

- $n = 2k$  のとき

$$\tau(\{(x, 0), (x, 1)\}) = ((x, 1), (x, 0)) \quad (1 \leq x \leq k) \quad (5a)$$

$$\tau(\{(x, 2k), (x, 2k+1)\}) = ((x, 2k), (x, 2k+1)) \quad (1 \leq x \leq k) \quad (5b)$$

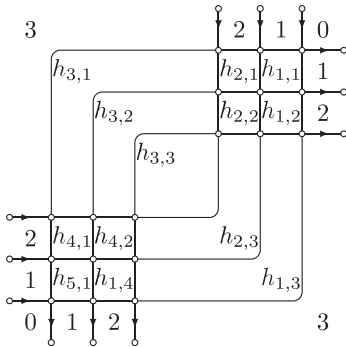
$$\tau(\{(0, y), (1, y)\}) = ((0, y), (1, y)) \quad (1 \leq y \leq 2k) \quad (5c)$$

- $n = 2k$  のとき

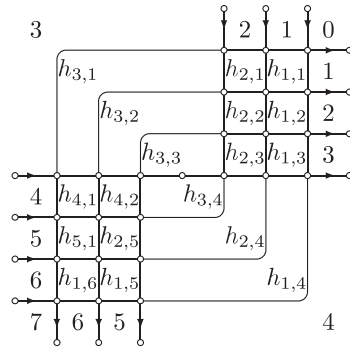
$$\tau(\{(x, 0), (x, 1)\}) = ((x, 1), (x, 0)) \quad (1 \leq x \leq k) \quad (6a)$$

$$\tau(\{(x, 2k+1), (x, 2k+2)\}) = ((x, 2k+1), (x, 2k+2)) \quad (1 \leq x \leq k+1) \quad (6b)$$

$$\tau(\{(0, y), (1, y)\}) = ((0, y), (1, y)) \quad (1 \leq y \leq 2k+1) \quad (6c)$$



(a)  $L_6^{\text{HT}}$



(b)  $L_7^{\text{HT}}$

図 8:  $L_n^{\text{HT}}$  の開境界条件および高さ関数の配置

## 4.2 点対称交代符号行列の場合のトラック分け

グラフ  $L_n^{\text{HT}}$  に対して添え字の集合を構成していく.

**定義 4.3.**  $n = 2k$  とする. このとき, 合計  $(2k - 1)$  種類の添え字の集合  $S_m^{\text{HT}}(2k)$  ( $1 \leq m \leq k$ ) および  $T_m^{\text{HT}}(2k)$  ( $1 \leq m < k$ ) を以下のように定義する:

$$S_m^{\text{HT}}(2k) := \{(i, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq i \leq 2k - m\} \quad (1 \leq m \leq k), \quad (7a)$$

$$T_m^{\text{HT}}(2k) := \{(m, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid m < i < 2k - m\} \quad (1 \leq m < k). \quad (7b)$$

$T_k^{\text{HT}}(2k) = \emptyset$  とみなし,  $1 \leq m \leq k$  について  $\mathcal{T}_m(2k) := S_m^{\text{HT}}(2k) \cup T_m^{\text{HT}}(2k)$  を  $L_{2k}^{\text{HT}}$  の  $m$  番目のトラックと呼ぶ.

**定義 4.4.**  $n = 2k + 1$  とする. このとき, 合計  $2k$  種類の添え字の集合  $S_m^{\text{HT}}(2k)$  ( $1 \leq m \leq k$ ) および  $T_m^{\text{HT}}(2k)$  ( $1 \leq m \leq k$ ) を以下のように定義する:

$$S_m^{\text{HT}}(2k + 1) := \{(i, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq i \leq 2k - m\} \quad (1 \leq m \leq k), \quad (8a)$$

$$T_m^{\text{HT}}(2k + 1) := \{(m, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid m < i \leq 2k - m + 1\} \quad (1 \leq m \leq k). \quad (8b)$$

$1 \leq m \leq k$  について  $\mathcal{T}_m(2k + 1) := S_m^{\text{HT}}(2k + 1) \cup T_m^{\text{HT}}(2k + 1)$  を  $L_{2k+1}^{\text{HT}}$  の  $m$  番目のトラックと呼ぶ.

いま,  $\mathcal{I}^{\text{HT}}(n) := \bigsqcup_{1 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mathcal{T}_m(n)$  とおくと, 各  $(i, j) \in \mathcal{I}^{\text{HT}}(n)$  について高さ関数の  $(i, j)$ -成分の値が定まれば高さ関数が決定できることに注意する. また, 点対称交代符号行列においても,  $(i, j) \in \mathcal{T}(m)$  のとき, 高さ関数の  $(i, j)$ -成分の取りうる値は  $(m + 1)$  種類のいずれかであることに注意して, 集合  $\mathbb{P}_n^{\text{HT}}$  を以下のようにおく:

$$\mathbb{P}_n^{\text{HT}} := \bigsqcup_{1 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{(i, j, l) \in \mathbb{Z}^3 \mid (i, j) \in \mathcal{T}_m(n), 1 \leq l \leq m\}. \quad (9)$$

このとき,  $\#\mathbb{P}_n^{\text{HT}}$  について計算すると以下ようになる.

$$\#\mathbb{P}_{2k}^{\text{HT}} = \frac{1}{3}k(2k^2 + 1) = \sum_{1 \leq m \leq k} m^2 + \sum_{1 \leq m \leq k-1} m^2 \quad (10a)$$

$$\#\mathbb{P}_{2k+1}^{\text{HT}} = \frac{1}{3}k(k+1)(2k+1) = 2 \sum_{1 \leq m \leq k} m^2 \quad (10b)$$

この結果から, 点対称交代符号行列における類似として  $B$  型ポジティブルートポセットを用いたより詳細な記述を目指している.

## 5 謝辞

本稿は 2022 年度 RIMS 共同研究「組合せ論的表現論における最近の展開」における発表をまとめた内容である. この度は貴重な発表の機会を与えてくださった関係各所の皆様方にこの場を借り

て感謝を述べさせていただきます.

## 参考文献

- [1] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., “Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.
- [2] G. Kuperberg, “Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof”, *Ann. of Math.*, **156** (2002) 835 – 866.
- [3] Doron Zeilberger, “Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture” *Elec. J. Comb.*, **3** (1996) R13
- [4] Davis M. Bressoud, *Proofs and Confirmations — The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press (1999).
- [5] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition*, Cambridge University Press(2011)
- [6] B. Wieland, “Large Dihedral Symmetry of the set of Alternating Sign Matrices, *Electr. J. Comb.*, **7** (2000) R37
- [7] J. Striker and N. Williams, “Promotion and rowmotion”, *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.
- [8] J. de Gier, “Loops, matchings and alternating-sign matrices”, *Discrete Math.*, **298** (2005) 365 – 388.
- [9] S. Okada, “Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices and Characters of Classical Groups”, *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006) 43 – 69.
- [10] Luigi Cantini and Andrea Sportiello, “Proof of Razumov-Stroganov conjecture”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **5** (2011) 1549 –1574
- [11] 松本拓磨, “点対称交代符号行列と B 型ルート系の関係”, 岡山大学修士論文 (2020)