

2 階非線型微分方程式の

周期解について

埼玉大 理工 佐藤 祐吉

§ 1. 序

Sansone-Conti 著 *Non-linear Differential Equations*
Chapter VI § 7 *On an Equation of Dynamics and*
Aerodynamics of Wires において、微分方程式

$$(*) \quad \ddot{x} + (|x| - \gamma)\dot{x} + x - p^2 x^3 = 0$$

$$p > 0, \gamma > 0 \text{ const.}$$

の周期解の存在について、次のような結果が述べられている。

$$p\gamma^2 \geq 8\sqrt{3}/9$$

のとき、(*) の周期解は存在しない。

$$\begin{cases} 0 < p\gamma^2 < 8\sqrt{3}/9 \\ \left[\frac{\gamma}{2} + \left[\frac{\gamma^2}{4} + \frac{8\sqrt{3}}{9\gamma^2} \right]^{1/2} \right] < \left[-\gamma + (\gamma^2 + 1)^{1/2} \right] / 2p \end{cases}$$

のとき、少なくとも 1 つ (*) の周期解が存在する。

ここでは、函数族 $|x| - \gamma$, $x - p^2 x^3$ を含むようなより広い

函数族を考える。即ち、 $F(y)$, $g(x)$ は連続で、

$$(1) \quad \begin{cases} F(y) > 0 & \text{for } \beta_2 > y \text{ and } y > \beta_1 \\ F(y) < 0 & \text{for } \gamma_2 < y < \gamma_1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} g(x)x > 0 & \text{for } \alpha_2 < x < 0 \text{ and } 0 < x < \alpha_1 \\ g(x)x < 0 & \text{for } \alpha_2 > x \text{ and } x > \alpha_1 \end{cases}$$

ここで、 α_i , β_i , γ_i は定数で、 $\beta_2 \leq \gamma_2 < 0 < \gamma_1 \leq \beta_1$

の条件のもとで、微分方程式

$$(A) \quad \ddot{x} + F(\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

の周期解の存在について考える。

更に、(A)の解は初期条件に関して一意性は保証されていると仮定する。加えて、

$$\begin{cases} g(x) \text{は } x=0, \alpha_i (i=1,2) \text{ で微分可能とする。} \\ g'(\alpha_i) < 0, (i=1,2) \end{cases}$$

(A)の代りに、

$$(B) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -F(y)y - g(x) \end{cases}$$

とおくと、この system の critical pt. は原点 $(0,0)$ と $(\alpha_1, 0)$ と $(\alpha_2, 0)$ の以上の点である。

点 $(\alpha_1, 0)$ は saddle pt. で勾配

$$-\frac{F(0)}{2} \pm \left[\left(\frac{F(0)}{2} \right)^2 - g'(\alpha_1) \right]^{1/2}$$

を挟んだ separatrix がある。従って、 $(\alpha_1, 0)$ の index $j((\alpha_1, 0))$ は Bendixson's formula

$$2j((\alpha_1, 0)) = 2 + n_e - n_h$$

ここで、 n_e は elliptic sector の数

n_h は hyperbolic sector の数

によって、 $n_e = 0$, $n_h = 4$ であるから、 -1 である。

$(\alpha_2, 0)$ の index も同様に -1 である。 $(0, 0)$ が nonrotation pt. ならば、 $n_e = 0$, $n_h = 0$ より、 $+1$ である。

従って、(B) の limit cycle が存在するならば、原点のみを内部に含まねばならない。

§ 2. limit cycle の存在について

定理 1. (1), (2), (3) と

$$(4) \quad \int_0^{\alpha_i} g(w) dw \leq \frac{1}{2} \gamma_i^2 \quad (i=1, 2)$$

ならば、(B) の limit cycle は存在しない。

証明. (B) の閉軌道 Γ が存在すると仮定する。

Γ は critical pt. $(0, 0)$ のみを内部に含むので、strip $\alpha_2 < x < \alpha_1$, $-\infty < y < \infty$ に含まれ、丁度 2 点で x 軸と交わる。その交点を $P=(x_0, 0)$ ($x_0 > 0$), $Q=(x_1, 0)$ ($x_1 < 0$) で表わす。

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

とおき、函数

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

を考える。

$\lambda(x, y)$ は (B) の解に沿って、

$$(5) \quad \frac{d\lambda}{dt} = -F(y)y^2$$

$\lambda_0 = \lambda(P)$ とおくと、 $G(x)$ は $0 < x < \alpha_1$ ($\alpha_2 < x < 0$) で増加 (減少) 函数であるから、

$$\lambda_0 = G(x_0) < G(\alpha_1)$$

次の case が考えられる。

Case 1. $G(x_0) \leq G(\alpha_2)$

Case 2. $G(x_0) > G(\alpha_2)$

Case 1 では、閉曲線 $\lambda(x, y) = \lambda_0$ は領域 $\alpha_2 \leq x < \alpha_1$, $y_2 \leq y \leq y_1$ に含まれる。

所で、 $F(y) < 0$ 对 $y_2 < y < y_1$ であるから、(5) から、点 P を通る (B) の解は t が増加するとき、閉曲線 $\lambda(x, y) = \lambda_0$ の内部から外部に出る。故に、 Γ と $\lambda(x, y) = \lambda_0$ は点 P 以外でも交わらなければならない。それは等式 (5) に反する。

Case 2 では、閉曲線 $\lambda(x, y) = G(\alpha_2)$ を考えると、点 P は外部で、点 Q は内部にあることになり同様に矛盾が導かれる。

定理 2. (1), (2), (3) と更に、

(i) $\exists y_1 > \tau_1, \exists y_2 < \tau_2$ such that

$$F(y_i)|y_i| > K_i \quad (i=1, 2)$$

ここで、 $K_1 = -\min_{\alpha_2 < x < 0} g(x)$, $K_2 = \max_{0 < x < \alpha_1} g(x)$

(ii) $0 < \mu_i < 1$ ($i=1, 2$) such that

$$(6) \quad \eta_i^2 \leq \beta_i^2 + 2 G(\mu_i \alpha_i) \quad (i=1, 2)$$

$$(7) \quad -F(h_i(x)) - \frac{g(x)}{h_i(x)} \leq -\frac{\beta_i}{(1-\mu_i)\alpha_i}$$

for $\mu_i \alpha_i < x < \alpha_i$ if $i=1$
for $\alpha_2 < x < \mu_2 \alpha_2$ if $i=2$

ここで、 $\eta_1 = \inf\{y | F(y)y > K_1, y > 0\}$

$$\eta_2 = \sup\{y | F(y)y < -K_2, y < 0\}$$

$$h_i(x) = \frac{(\alpha_i - x)\beta_i}{(1-\mu_i)\alpha_i} \quad (i=1, 2)$$

のとき、(B)の周期解は少なくとも1つ存在する。

仮定(iii)は次のように置き換えることができる。即ち、

定理3. (1), (2), (3)と定理2の(i)と更に、

(iii)' $0 < \exists x_1 < \alpha_1, \alpha_2 < \exists x_2 < 0$ such that

$$(8) \quad \eta_i^2 \leq \beta_i^2 + 2 G(x_i) \quad (i=1, 2)$$

$$(9) \quad \beta_i^2 \leq 2 \int_{\alpha_i}^{x_i} \{-g(s) + L_i\} ds \quad (i=1, 2)$$

ここで、 η_i は定理2と同様。

$$L_1 = -\min_{y>0} F(y)y$$

$$L_2 = -\max_{y<0} F(y)y$$

ならば、(B)は少なくとも1つ周期解を持つ。

証明. 省略

§3. 定理の Example

定理1, 2, 3 を微分方程式

$$(*) \quad \ddot{x} + (|\dot{x}| - q)\dot{x} + x - p^2 x^3 = 0$$

に適用する。

$$\alpha_1 = \frac{1}{p}, \alpha_2 = -\frac{1}{p}, \beta_1 = \gamma_1 = q, \beta_2 = \gamma_2 = -q$$

とおくと、(1), (2), (3)は満足する。

不等式(4)は、(*)の trajectory は原点に関して対称であることに注意すると、

$$\int_0^{1/p} (x - p^2 x^3) dx = \frac{1}{4p^2} \leq \frac{1}{2} q^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2} \leq p^2 q^2}$$

この場合には、(*)の周期解は存在しない。

定理2に対しては、

$$K_1 = K_2 = 2\sqrt{3}/9p$$

$$\eta_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9p}}$$

$$\eta_2 = -\eta_1$$

となるので、(b)は、

$$\left[\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9p}} \right]^2 \leq q^2 + \frac{\mu_1^2(2-\mu_1^2)}{2p^2}$$

ところで、

$$\left[\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{q^2 p}}\right]^2 \leq q^2 \left[1 + \frac{4\sqrt{3}}{9pq^2}\right]$$

より、 $M_1 = M_2 = \mu$ とおいて、

$$p \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \mu^2 (2 - \mu^2)$$

ならば、(6) は成り立つ。

$$h_1(x) = q \cdot \frac{1 - px}{1 - \mu}, \quad h_2(x) = -q \cdot \frac{1 + px}{1 - \mu}$$

である。従って (7) は、

$$(\varphi(x) \equiv) -q^2 \frac{1 - px}{1 - \mu} + q^2 - x(1 + px)(1 - \mu) \leq -\frac{pq^2}{1 - \mu}$$

$$\text{for } \frac{\mu}{p} < x < \frac{1}{p}$$

$$-q^2 \frac{1 + px}{1 - \mu} + q^2 + x(1 - px)(1 - \mu) \leq -\frac{pq^2}{1 - \mu}$$

$$\text{for } -\frac{1}{p} < x < -\frac{\mu}{p}$$

となる。

$\varphi(x)$ は、 $x = x_0 = \frac{pq^2 - (1 - \mu)^2}{2p(1 - \mu)^2}$ で最大値をとる。

(a) $\frac{\mu}{p} \leq x_0 < \frac{1}{p}$, (b) $x_0 < \frac{\mu}{p}$, (c) $x_0 > \frac{1}{p}$ の場合には、 $\varphi(x)$ は区間 $[\frac{\mu}{p}, \frac{1}{p}]$ でそれぞれ (a) $x = x_0$, (b) $x = \frac{\mu}{p}$, (c) $x = \frac{1}{p}$ で最大値をとるので、

$$(a) \varphi(x_0), (b) \varphi\left(\frac{\mu}{p}\right), (c) \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leq -\frac{pq^2}{1 - \mu}$$

となれば、(7) は成り立つ。

以上のことより、 $0 < \mu < 1$ に対して、

$$1^\circ. \quad p \leq \min\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} \mu^2 (2 - \mu^2), \mu - \frac{1}{3}\right]$$

$$\frac{(2\mu + 1)(1 - \mu)^2}{p} \leq q^2 \leq \frac{2(1 - \mu)^2}{p(1 + p - \mu)}$$

$$2^{\circ}. \quad \mu - \frac{1}{3} < p \leq \min \left[\frac{3\sqrt{3}}{8} \mu^2 (2 - \mu^2), \frac{\mu + \mu^2}{2\mu + 1} \right]$$

$$q^2 \leq \frac{1}{p} (1 - \mu)^2 [1 + 2(\mu - p) + 2\{(\mu - p) + (\mu - p)^2\}^{1/2}]$$

$$3^{\circ}. \quad \frac{\mu + \mu^2}{2\mu + 1} < p \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \mu^2 (2 - \mu^2)$$

$$q^2 \leq \frac{\mu(1 + \mu)(1 - \mu)^2}{p^2}$$

μ, q が $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}$ のいずれかを満足するとき、周期解が存在する。 1° は case (a)(c) より、 2° は case (a)(b) より、 3° は case (b) より出る。

定理3に対しては、 $x_1 = \mu \frac{1}{p}$ $0 < \mu < 1$ とおくと、前と同様に(8)は、

$$p \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \mu^2 (2 - \mu^2)$$

ならば、十分であり、(9)は、

$$q^2 \leq 2 \int_{1/p}^{\mu/p} \left[-x + p^2 x^3 + \frac{q^2}{4} \right] dx$$

となるので、

$$\mu [-2\mu + \mu^3 + p q^2] \geq q^2 p (1 + 2p) - 1$$

となる。