

大域的結合写像による非線形最適化

松尾則之¹, 野沢浩²

1 最急降下法と結合写像

最急降下法は次の方程式で記述される.

$$r_i(t+1) = r_i(t) - \mu \nabla O(r_i) \quad (1)$$

ここで, r_i は m 次元位置変数, t は離散時刻, μ は正定数, O は評価関数である.

式(1)を, ある出力を受け取り動くメインシステムと勾配に応じて適当な出力を出すサブシステムに分ける. メインシステムは以下のようになる.

$$r_i(t+1) = r_i(t) - \mu \left\{ \frac{\sum_j x_{ij}^+(t)}{n} - \frac{\sum_j x_{ij}^-(t)}{n} \right\} \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ は, 次元に対する添え字であり, $j = 1, 2, \dots, n$ は, サブシステムに対する添え字である. サブシステムはメインシステムの勾配を入力とする結合写像[2],

$$y_{ij}^-(t) = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\sum_{k \neq j} \omega_a x_{ik}^-(t)}{n-1} + \frac{\sum_k \omega_b x_{ik}^+(t)}{n} \right\} - \nu \frac{\partial O(r)}{\partial r_i(t)} + \gamma \quad (3)$$

$$x_{ij}^-(t+1) = F_{y_i^-(t)}\{x_{ij}^-(t)\} \quad (4)$$

$$y_{ij}^+(t) = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\sum_{k \neq j} \omega_a x_{ik}^+(t)}{n-1} + \frac{\sum_k \omega_b x_{ik}^-(t)}{n} \right\} + \nu \frac{\partial O(r)}{\partial r_i(t)} + \gamma \quad (5)$$

$$x_{ij}^+(t+1) = F_{y_i^+(t)}\{x_{ij}^+(t)\} \quad (6)$$

$$F_y(x) = \alpha x + (1-\alpha) \frac{1}{1 + \exp\{(-y/x)/\beta\}} \quad (7)$$

である. ここで, $\mu, \omega, \omega_a, \omega_b, \nu, \gamma, \alpha, \beta$ は制御用のパラメタである.

以上が, 我々の提案するカオス的最急降下法である.

¹nobita@nikongw.nikon.co.jp (株) ニコン技術開発本部光学技術開発部

²nozawa@c-toys.com カオスおもちゃ工房

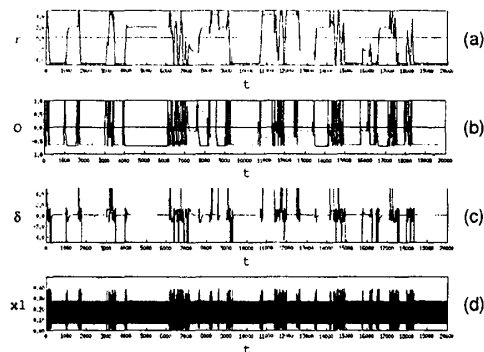


図 1: (a) 位置 r_1 , (b) 評価関数 O , (c) 微分 $\frac{\partial O(r)}{\partial r_1}$, (d) x_{ij}^+ と x_{ij}^- の重ね書き, 横軸は時間 t .

2 シミュレーション

本論文では 1 次元と 2 次元についてそれぞれ, 以下に示す 2 つの問題 [3] についてシミュレーションを行った.

• 1 次元多峰性関数

$$O(r) = \frac{1}{5000} (r-4.5)(r-3.7) \times (r-3)(r-1)(r+2) \times (r+3)(r+4)(r+5) \quad (8)$$

• Six-hump camelback (SHC) 関数

$$O(r) = \frac{1}{3} r_1^6 - 2.1 r_1^4 + 4 r_1^2 + r_1 r_2 - 4 r_2^2 + 4 r_2^4 \quad (9)$$

2.1 1 次元多峰性関数の場合

シミュレーションでは $\alpha = 0.7, \beta = 0.006, \gamma = 0.1, \omega = 1.435, \omega_a = 0.3, \omega_b = -1.0, \nu = 0.001, \mu = 1.0, i = 1, j = 1, 2$ とした.

微分が 0 になっているところが解である. そのときにはサブシステムの出力 x がそろい, 位置変数 r も同じ値をとり続ける. しかし, その後自発的に出力が乱れ, 他の解に移っていき局所解にトラップされることはない. システムは様々な解を探索 (カオス的遍歴 [4]) し続ける. また, システムが大域的最適解 $r = 1.91$ に多く滞在している様子が見てとれる.

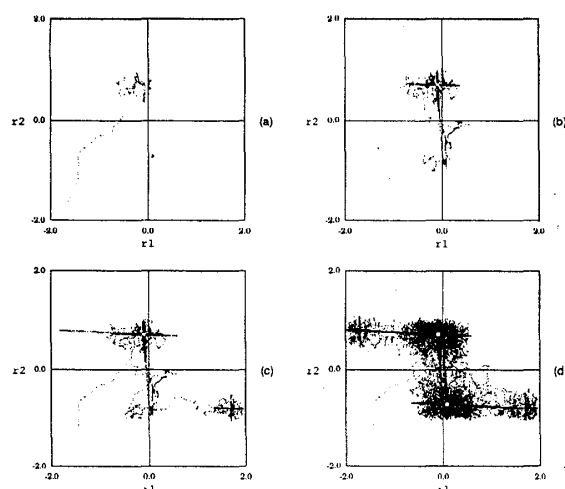


図 2: r_1 と r_2 をランダムな初期値から (a)1000 ステップ (b)5000 ステップ (c)10000 ステップ (d)100000 ステップまでプロット. 2つの大域的最適解 $(r_1, r_2) = (-0.0898, 0.7126)$ と $(r_1, r_2) = (0.0898, -0.7126)$ が灰色の丸で示してある.

2.2 Six-hump camelback (SHC) 関数の場合

シミュレーションでは $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.006$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1.43$, $\omega_a = 0.3$, $\omega_b = -1.0$, $\nu = 0.002$, $\mu = 0.2$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ とした.

図 2(a) では大域的最適解にすぐに到達し, 図 2(b) では二つの大域的最適解を探し出し, 図 2(c) では左上と右下の局所解を探し出している. そして, 100000 ステップまでのプロットから, 局所解よりも大域的最適解付近に長く滞在していることがわかる. 図 2(d) から, システムが解を見つけたときには十字の軌跡を描くことがみてとれる. また, 解から解への移動は直線的である.

3 おわりに

シミュレーションの結果からわかるように, 最適解の探索をする結合写像モデルを構築することに成功した. これは構成論的手法の有効さを示す例になっていると思う.

ここで, 強調しておきたいことは, 「外部」というものを一切使わずに, 内部の記述のみで閉じているモデルを構築することができた」という点である.

解から解へは山を越えねばならずそこを直線的に移動することは, にわかには理由がつかめない. おそらく片方の位置変数に対する勾配の値が 0 付近のところを渡っていると思われるが, 詳しいことは解析中である.

今回我々が使用した, 線形関数を非線形関数に変更する手法は, 様々なところで利用できるとと思われる (例えば, 不良設定問題, 組合せ最適化問題, 数値計算法等).

現在, それらの問題に対する研究を行っているが, 詳細については別の機会に報告する予定である.

参考文献

- [1] K. Kaneko, Ph.D Thesis "Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems" (1983)(enlarged version of published by World Sci. Pub.,1986a).
- [2] H.-Nozawa, Physica D 75(1994)179-189.
- [3] 藤田得光, 安田忠一郎, 横山隆一, 信学論 (A) J78-A 11(1995)1485-1492.
- [4] I. Tsuda, 「カオスの脳観」サイエンス社 (1990).