

Periodic Waves as Exact Imbricate Series of Rational Growing Modes

阪府大 工 数理工 渡辺 陽介 (Yosuke Watanabe)
阪府大 工 数理工 田尻 昌義 (Masayoshi Tajiri)

Boussinesq 方程式において, その厳密解である rational growing mode 解を, 非線形性を考慮して足し合わせることで (非線形重畳) により, 非線形周期波動解を構成することができる。また, 非線形 Schrödinger 方程式においても, その rational growing mode 解を求め, その非線形重畳により, 非線形周期波動解を構成した。

§1. Introduction

様々なソリトン方程式に対し, その周期解を, ソリトンなどの空間的に局在した構造 (以下, 基本構成要素と呼ぶことにする) の和として表すことは, しばしば行われてきたことである。最初, M. Toda は, Toda 格子方程式と KdV 方程式に対して, それぞれのクノイダル波がソリトンの列により表せることを示した¹⁾。また KdV 方程式に対しては, A. Korpel and P. P. Banerjee も Fourier 変換の手法を用いて同様なことを示している²⁾。これは, $U(x - c_s t)$ をある非線形方程式のソリトン解としたときに, 周期解 $u(x - ct)$ を, その周期を h とし,

$$u(x - ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n U(x - ct - nh), \quad (1)$$

の形に表すものである³⁾。ここで, 周期波の位相速度 c は, 非線形相互作用により, 構成ソリトンの速度 c_s とは異なっている。

また, $(2+1)$ 次元においても, 代数ソリトンの足し合わせで, 周期解が構成できることが知られている。A. A. Zaitsev は, K-P 方程式において, 代数ソリトンの, 空間一方向 (x または y 方向) に関する足し合わせを行い, 周期ソリトン解を求めた⁴⁾。更に, M. Tajiri and Y. Murakami は, 代数ソリトンを, x と y の空間二方向に足し合わせることで, 格子ソリトン解を構成した⁵⁾。この場合, 二重和を考えることになるので, 格子ソリトン解は, 楕円関数 (Weierstrass の p 関数) で表される。ここで注意したいことは, 代数ソリトンを基本構成要素とした場合, ソリトンを構成要素とした (1) 式の場合とは異なり, 基本構成要素の形, すなわち, 足し合わせるための代数ソリトンの形を, 修正しなければならない, という点である。これは, 代数ソリトン間の非線形相互作用により, 位相速度が異なるのみならず, 代数ソリトンの裾野も変形し, 関数形 $U(x, y, t)$ 自身も変化する点である。しかし, 代数ソリトンを変形した関数によって構成された格子ソリトン解は, 足し合わせの周期を ∞ にした場合, 代数ソリトン解に帰着するので, 代数ソリトンを基本構成要素としてよいことがわかる。

本研究では, Boussinesq 方程式と非線形 Schrödinger 方程式それぞれに対して, 我々が rational growing mode と呼んでいる代数的な解を基本構成要素と考えて, 周期解を構成することを考えてみた。

§2. Boussinesq 方程式

2-1. Boussinesq 方程式の厳密解

N. Yajima は, 次の形の Boussinesq 方程式,

$$v_{tt} - v_{xx} - 6(v^2)_{xx} - v_{xxxx} = 0, \quad (2)$$

に対して, Hirota の方法を用いて, growing mode と呼ばれる解を求めた⁶⁾。Boussinesq 方程式 (2) は, 大きい波数の波に対して, 線形不安定である。growing mode 解は, 初期の状態から指数的に成長し, 有限時間の経過後最大値をとり, その後は減衰していく, 時間的に局在した解である。また, この解は, x 方向に関しては周期的である。

以下では, 取扱う Boussinesq 方程式を, (2) 式の第 2 項の符号を代えた,

$$u_{tt} + u_{xx} - 6(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (3)$$

とする。ここで, もし $u = v - 1/6$ と変換すれば, v は (2) 式に従う, すなわち, (3) 式の解に一定値 $1/6$ を加えれば, (2) 式の解になることを注意しておく。よって, (3) 式に対しても, Yajima の手法によって, 同様な growing mode 解を求めることができる。また, (3) 式の線形分散関係を調べてみると, 全ての波数に対して, 不安定であることがわかる。M. Tajiri and Y. Murakami は, (3) 式に対して,

$$u = -2 \frac{(x^2 - t^2 - 3)}{(x^2 + t^2 + 3)^2}, \quad (4)$$

なる厳密解を求めた⁷⁾。この解は, 空間的, 時間的に局在し, かつ, 全平面で正則である。また, その成長, 減衰は代数的であるので, 彼らはこの解を, rational growing mode 解と名付けた。我々は, 以下で, この rational growing mode の足し合わせを考えることによって, Boussinesq 方程式 (3) の周期解を構成する。

2-2. Boussinesq 方程式における周期解の構成

まず, x 方向に周期的な解を構成するために, rational growing mode の, x 方向に関する足し合わせを,

$$u = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + i\nu(t) - mh)^2} + \frac{1}{(x - i\nu(t) - mh)^2} \right], \quad (5)$$

と仮定する。ここで, m は整数であり, 周期 h は実数である。 $\nu(t)$ は決定すべき t の関数である。(5) 式を (3) 式に代入すると, 関数 $\nu(t)$ は,

$$\nu(t) = \frac{1}{\gamma} \log \left[\sqrt{K} \cosh(\delta t + \sigma) + \sqrt{K \cosh^2(\delta t + \sigma) - 1} \right], \quad (6)$$

と決定される。ここで,

$$\gamma = \frac{2\pi}{h}, \quad (7)$$

$$K = \frac{1+4\gamma^2}{1+\gamma^2}, \quad (8)$$

$$\delta = \gamma\sqrt{1+\gamma^2}, \quad (9)$$

である。(6) ~ (15) 式を, (5) 式に代入すると, 次のように growing mode 解,

$$u = \gamma^2 \frac{\sqrt{K} \cosh(\delta t + \sigma) \cos \gamma x - 1}{(\sqrt{K} \cosh(\delta t + \sigma) - \cos \gamma x)^2}, \quad (10)$$

が得られる。この解は, Yajima の方法を用いて得られる growing mode 解と一致している。また, この解は, 全平面で正則であることがわかる。

次に, 時間 t に関して周期的で, 空間 x に関して局在した stationary breather 解を構成することを考える。rational growing mode の, t 方向に関する足し合わせを,

$$u = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + i\nu(t) - nh)^2} + \frac{1}{(x - i\nu(t) - n\bar{h})^2} \right], \quad (11)$$

と仮定する。ここで, n は整数であり, 周期 h は純虚数 ($\bar{h}$ はその複素共役) にとる。 $\nu(t)$ は決定すべき t の関数であり, growing mode 解を求めたときと同様な手続を踏むと, stationary breather 解,

$$u = \gamma'^2 \frac{1 - \sqrt{K'} \cosh \gamma' x \cos(\delta' t + \sigma')}{(\cosh \gamma' x - \sqrt{K'} \cos(\delta' t + \sigma'))^2}, \quad (12)$$

$$\gamma' = \frac{2\pi i}{h}, \quad (13)$$

$$K' = \frac{1-4\gamma'^2}{1-\gamma'^2}, \quad (14)$$

$$\delta' = \gamma'\sqrt{1-\gamma'^2}, \quad (15)$$

が得られる。stationary breather 解 (12) の存在条件は, 分母が 0 にならないことより,

$$0 < K' < 1, \quad (16)$$

である。

以上述べたように, growing mode 解と stationary breather 解は, rational growing mode を, それぞれ, x 方向, t 方向に足し合わせるにより得られる。今度は, rational growing mode を, x 方向と t 方向に同時に足し合わせるにより, これら二方向に周期的な解である intermitted wave mode 解を構成することを考える。intermitted wave mode 解は二重周期をもつことから, rational growing mode の, x と t に関する足し合わせを, Weierstrass の p 関数を用いて,

$$u = -\alpha^2 \left[\sum_{m,n}' \left\{ \frac{1}{(\alpha\xi + i\nu(t) - (mah + 2\pi in))^2} - \frac{1}{(mah + 2\pi in)^2} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(\alpha\xi + i\nu(t))^2} \\
& + \sum_{m,n}' \left\{ \frac{1}{(\alpha\xi - i\nu(t) - (m\alpha h + 2\pi in))^2} - \frac{1}{(m\alpha h + 2\pi in)^2} \right\} \\
& + \frac{1}{(\alpha\xi - i\nu(t))^2} + C \Big] \quad (17)
\end{aligned}$$

$$= -\alpha^2 [\wp(\alpha\xi + i\nu(t)|\omega_1 = \alpha h/2, \omega_3 = \pi i) + \wp(\alpha\xi - i\nu(t)|\omega_1, \omega_3) + C], \quad (18)$$

と仮定する。ここで、 $\sum_{m,n}'$ は $(m, n) = (0, 0)$ を除く全ての整数 m, n についての和であり、また、 $\xi = x + \delta$ とおいた。代入して $\nu(t)$ を決定すると、

$$\nu(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{e_1 - e_3}} \text{cn}^{-1}[E \text{cn}(\sqrt{3}\omega t + \theta, k_2), k_1], \quad (19)$$

$$e_1 = \wp\left(\frac{\pi}{2\alpha}|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_3\right), \quad (20)$$

$$e_3 = \wp\left(\frac{i h}{4}|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_3\right), \quad (21)$$

$$E = \sqrt{\frac{A - B}{A}}, \quad (22)$$

$$A = (e_1 - e_3) \left(\frac{1}{3} + 4\alpha^2 C - e_3 \right), \quad (23)$$

$$B = (e_1 - e_3)^2, \quad (24)$$

$$\omega = k_1 \sqrt{A} \sqrt{\frac{1 - k_1^2}{k_1^2} + E^2}, \quad (25)$$

$$k_1^2 = -\frac{2e_3 + e_1}{e_1 - e_3}, \quad (26)$$

$$k_2 = \frac{E}{\sqrt{(1 - k_1^2)/k_1^2 + E^2}}, \quad (27)$$

となる。このとき、存在条件は、

$$A - B > 0, \quad (28)$$

である。

§3. 非線形 Schrödinger 方程式

3-1. Benjamin-Feir Instability と非線形 Schrödinger 方程式の厳密解

次の形の非線形 Schrödinger 方程式、

$$iu_t + \beta u_{xx} + \delta |u|^2 u = 0, \quad (29)$$

を考える。このとき、分散関係は (29) 式の u に $\tilde{u}(x, t) \equiv u_0 \exp[i(kx - \omega t + \phi)]$ を代入することにより、

$$\omega = \beta k^2 - \delta u_0^2, \quad (30)$$

である。また、微小攪乱 (増幅率を σ とする) に対する、線形安定性を調べると、

$$\sigma^2 = \beta^2 k^2 [2(\delta/\beta)u_0^2 - k^2], \quad (31)$$

となるので、 $\beta\delta > 0$ のとき、小さい波数 ($0 < k^2 < 2\delta u_0^2/\beta$) に対して、不安定であることがわかる (Benjamin-Feir Instability)。以下では、我々は、 $\beta\delta > 0$ の場合について、考えていくことにする。

3-2. rational growing mode 解

Boussinesq 方程式の場合と同じ考え方で周期解を構成するために、非線形 Schrödinger 方程式 (29) に対して、我々は、

$$u = u_0 \exp[i\delta u_0^2 t + i\phi] \left(1 - 4 \frac{1 + 2i\delta u_0^2 t}{1 + (2\delta u_0^2/\beta)x^2 + 4\delta^2 u_0^4 t^2} \right), \quad (32)$$

なる解を求めた。これは、非線形 Schrödinger 方程式の rational growing mode 解である。この解は、方程式、

$$iu_t + u_{xx} + 2(|u|^2 - M^2)u = 0, \quad (33)$$

に対し、N. N. Akhmediev らが求めた rational soliton-like 解と同じ形をしている^{8,9)}。rational growing mode 解 (32) の挙動を図 1 に示す。解 (32) は、以下のように、Hirota の方法により求めることができる。2-ソリトン解の表現、

$$u = g/f, \quad (34)$$

$$(iD_t + D_x^2)g \cdot f = 0, \quad (35)$$

$$D_x^2 f \cdot f = |g|^2, \quad (36)$$

$$g = u_0 \exp(i\theta) [1 + \exp(\eta_1 + 2i\phi_1) + \exp(\eta_2 + 2i\phi_2) + a_3 \exp(\eta_1 + \eta_2)], \quad (37)$$

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + b_3 \exp(\eta_1 + \eta_2), \quad (38)$$

$$\eta_j = P_j x - \Omega_j t + \eta_j^0 \quad (j = 1, 2), \quad (39)$$

$$\theta = kx - \omega t, \quad (40)$$

は普通、「 η_j , P_j が実数」に対して導かれているが、我々は、代りに η_j , P_j を、

$$\eta_2^* = \eta_1, \quad (41)$$

$$P_2^* = P_1 = i\varepsilon\alpha, \quad (42)$$

と選ぶ。但し、*は複素共役を表す。 ϕ_j を、

$$\phi_2 = \phi_1 \pm \pi, \quad (43)$$

と選び, $|\varepsilon| \rightarrow 0$ とするとき, 解,

$$u = u_0 \exp(i\theta) \left(1 - 4 \frac{1 + 2i\delta u_0^2 t}{1 + (2\delta u_0^2/\beta)(x - 2\beta kt)^2 + 4\delta^2 u_0^4 t^2} \right), \quad (44)$$

が得られる。 $k = 0$ とおくと, rational growing mode 解 (32) が得られる。

3-3. rational growing mode 解による周期解の構成

rational growing mode 解 (32) は,

$$u = u_0 \exp[i\delta u_0^2 t + i\phi] \left(1 + \frac{1}{i\delta u_0^2 t + \sqrt{1 + (2\delta u_0^2/\beta)x^2/2}} \right) \times \left(1 + \frac{1}{i\delta u_0^2 t - \sqrt{1 + (2\delta u_0^2/\beta)x^2/2}} \right), \quad (45)$$

と変形できる。最初に, Boussinesq 方程式の場合と同様に, x 方向に周期的で時間 t について局在している, growing mode 解を構成する。(45) 式の形から, rational growing mode の x 方向に関する足し合わせを,

$$u = u_0 \exp[i(\sigma t + \phi)] \left(1 + b \sum_n \frac{1}{i\alpha t + \nu(x) + n} \right) \left(1 + b \sum_{n'} \frac{1}{i\alpha t - \nu(x) + n'} \right), \quad (46)$$

と仮定する。但し, 無限和は

$$\sum_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N},$$

を表している。(46) 式を (29) 式に代入すると, $\sigma, \alpha, \nu(x)$ が

$$\sigma = \delta u_0^2 (1 + \pi^2 b^2)^2, \quad (47)$$

$$\alpha = \delta u_0^2 (1 + \pi^2 b^2) b, \quad (48)$$

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 b^2}} \cos \left(\sqrt{\frac{2\pi^2 \alpha b}{\beta}} x + C \right) \right], \quad (49)$$

と決定される。(47) ~ (49) 式を (46) 式に代入すると, growing mode 解,

$$u = u_0 (1 + \pi^2 b^2) \exp[i\delta u_0^2 (1 + \pi^2 b^2)^2 t + i\phi] \times \left[1 - \frac{2\pi b}{1 + \pi^2 b^2} \frac{\pi b \cosh 2\pi \alpha t + i \sinh 2\pi \alpha t}{\cosh 2\pi \alpha t - (1/\sqrt{1 + \pi^2 b^2}) \cos(\sqrt{2\pi^2 \alpha b/\beta} x + C)} \right], \quad (50)$$

が得られる。growing mode 解の挙動を図 2 に示す。M. J. Ablowitz and B. M. Herbst は, $\beta = 1, \delta = 2$ の場合に, Hirota's method の 2-ソリトン解から, 彼らが single homoclinic orbit と呼んでいる解を求めている¹⁰⁾ が, これは, 我々が構成した growing mode 解に一致する。

次に rational growing mode を, t 方向に足し合わせて, stationary breather 解を構成する。rational growing mode 解の, t 方向に関する足し合わせを,

$$u = u_0 \exp[i(\sigma t + \phi)] \left(1 + ib \sum_n \frac{1}{\alpha t + i\nu(x) + n} \right) \times \left(1 + ib \sum_{n'} \frac{1}{\alpha t - i\nu(x) + n'} \right), \quad (51)$$

と仮定し, growing mode 解を構成したときと同様の手続を踏むと, stationary breather 解,

$$u = u_0(1 - \pi^2 b^2) \exp[i\delta u_0^2(1 - \pi^2 b^2)^2 t + i\phi] \times \left[1 + \frac{2\pi b}{1 - \pi^2 b^2} \frac{\pi b \cos 2\pi\alpha t - i \sin 2\pi\alpha t}{\cos 2\pi\alpha t - (1/\sqrt{1 - \pi^2 b^2}) \cosh(\sqrt{-2\pi^2 \alpha b/\beta} x + C)} \right], \quad (52)$$

が求まる。stationary breather 解の挙動を図 3 に示す。

以上, rational growing mode を基本構成要素として, growing mode 解と stationary breather 解を構成したが, 今度は逆に, 構成された growing mode 解の, 足し合わせの周期を無限大にすることを考えてみる, すなわち, growing mode 解 (50),

$$u = u_0 \exp[i(\sigma t + \phi)] \left(1 + \frac{b}{\alpha} \sum_n \frac{1}{it + \nu(x)/\alpha + n/\alpha} \right) \times \left(1 + \frac{b}{\alpha} \sum_{n'} \frac{1}{it - \nu(x)/\alpha + n'/\alpha} \right), \quad (53)$$

において ($\sigma, \alpha, \nu(x)$ はそれぞれ (47), (48), (49) 式で与えられている), 足し合わせの周期 n/α を, 無限大にすることをを行う。その際, b/α を有限 ($= c$) に保つように, $\alpha, b \rightarrow 0$ とする。この極限操作により,

$$u \Rightarrow u_0 \exp[i(\delta u_0^2 t + \phi)] \left(1 + c \frac{1}{it + \nu(x)/\alpha} \right) \left(1 + c \frac{1}{it - \nu(x)/\alpha} \right), \quad (54)$$

$$\nu(x) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \sqrt{c^2 + \frac{2c}{\beta} x^2}, \quad (55)$$

となり ($C = 0$ とした), (54), (55) 式で $c = 1/\delta u_0^2$ とおくと rational growing mode 解 (32) となる。stationary breather 解も, 同様の極限操作により, rational growing mode 解に帰着することが示される。このような, 「構成」とは逆の考察からも, rational growing mode が, growing mode 解と stationary breather 解の基本構成要素となっていることがわかる。

§4. まとめと今後の課題

Boussinesq 方程式において, rational growing mode の足し合わせで, growing mode 解, stationary breather 解, および, intermitted wave mode 解を構成した。また非線形 Schrödinger 方程式においては, rational growing mode 解をまず求め, Boussinesq 方程式

の場合と同様に, rational growing mode の足し合わせで, growing mode 解と stationary breather 解を構成した。逆に, growing mode 解で, 足し合わせの周期を無限大にすることによって, rational growing mode 解に帰着することも示した。このようにして, rational growing mode が, 本論で取上げたような周期解において, 基本的な要素であることを示してきた。今回の研究に関する, 今後の課題としては, とりあえず次の三点が挙げられる。

まず第一点として, Boussinesq 方程式と非線形 Schrödinger 方程式において, rational growing mode の足し合わせによって, 他の解を構成するということである。具体的には, まず, 非線形 Schrödinger 方程式における intermitted wave mode 解を構成することが挙げられる。この問題に関しては, 我々は, 解を ζ 関数, あるいは, ϑ 関数によって表すことができる, という予想をもっており, 具体的な形を与えている。しかし, 二重和に関する考察がまだ十分ではなく, 厳密な議論が必要である。また, Boussinesq 方程式には, breather 解と呼ばれる解が知られている¹¹⁾。解の挙動を計算した図をみると, この解に対して rational growing mode の足し合わせを考えることは, 興味深い問題である。

第二点は, 本研究で取上げた二つの方程式以外のソリトン方程式において, 線形不安定を与える波数と, rational growing mode 解の存在条件との関係について調べることである。rational growing mode が存在する方程式については, その足し合わせによって周期解を構成することを考えていきたい。

第三点は, 得られた厳密解について, その Fourier 成分の時間発展を考察し, 物理的な意味づけをすることである。

以上三点を, 今後の課題として, 研究を進めていきたい。

参考文献

- 1) M. Toda : Phys. Rep. **18** (1975) 1.
- 2) A. Korpel and P. P. Banerjee : Phys. Lett. **A82** (1981) 113.
- 3) J. P. Boyd : Adv. Appl. Mech. **27** (1990) 1.
- 4) A. A. Zaitsev : Sov. Phys. Dokl. **28** (1983) 720.
- 5) M. Tajiri and Y. Murakami : J. Math. Phys. **34** (1993) 2400.
- 6) N. Yajima : Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 678.
- 7) M. Tajiri and Y. Murakami : J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 2791.
- 8) N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii and N. E. Kulagin in: Inter-University Proc., Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations, Gor'kii State University (1985) [in Russian].
- 9) V. M. Eleonskii, I. M. Krichever and N. E. Kulagin : Sov. Phys. Dokl. **31** (1986) 226.
- 10) M. J. Ablowitz and B. M. Herbst : SIAM J. Appl. Math. **50** (1990) 339.
- 11) M. Tajiri and Y. Murakami : J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3585.

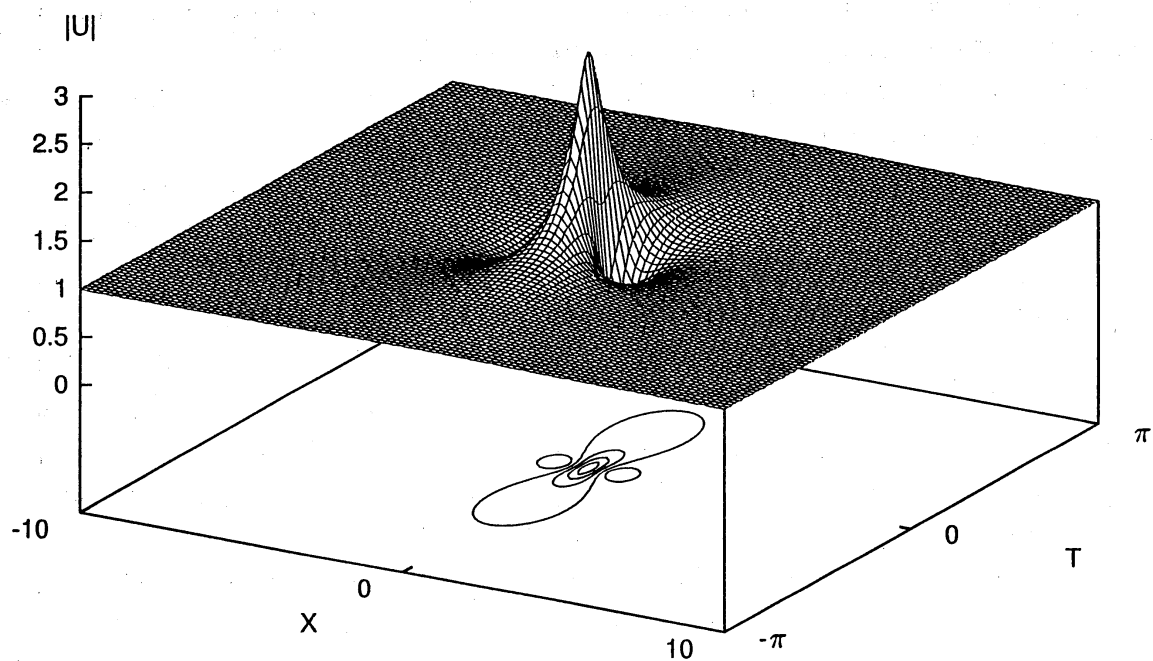


図1 非線形 Schrödinger 方程式の rational growing mode 解

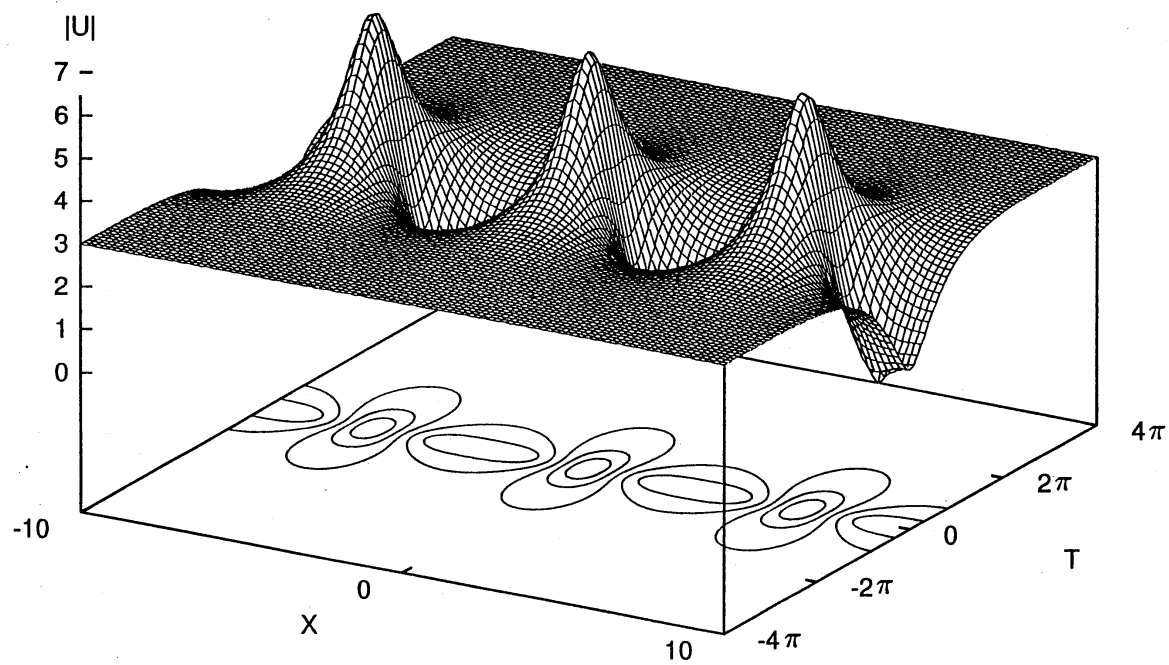


図2 非線形 Schrödinger 方程式の growing mode 解

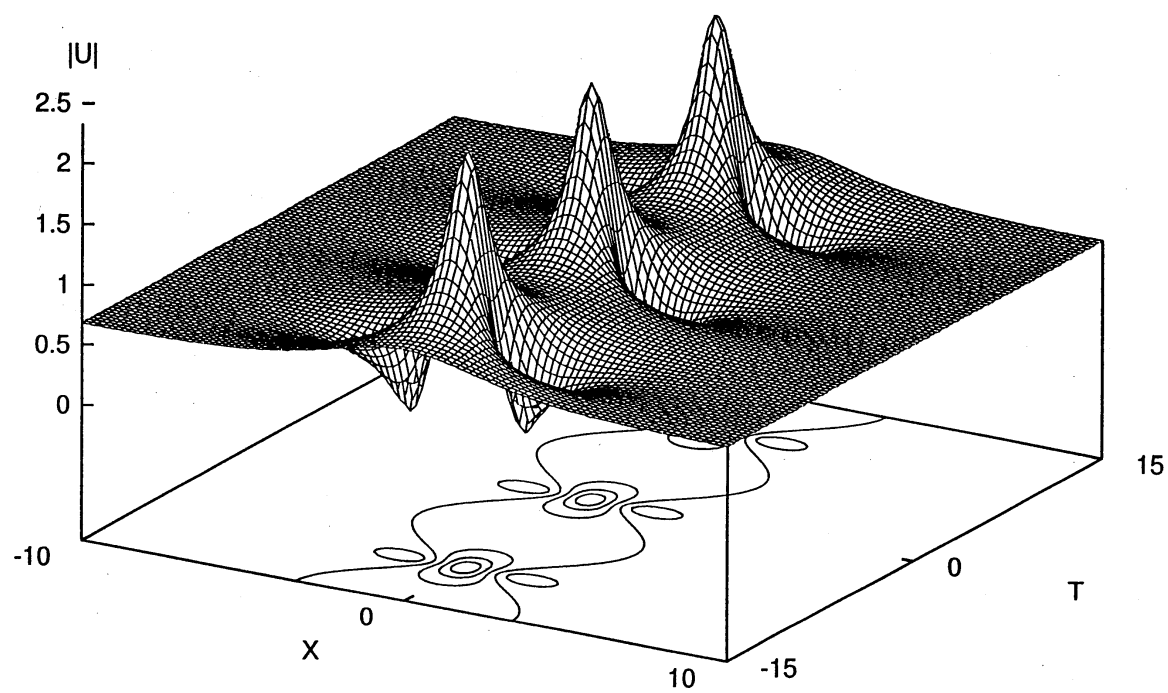


図3 非線形 Schrödinger 方程式の stationary breather 解