

最小normal論理Kより小さい擬論理の標準形展開

梶山女学園大学 大芝 猛 (Takeshi Oshiba)

知識論理またはmulti-modal logic は命題論理の標準形展開の拡張により特性化される。
n 個の modal operator $K_1, \dots, K_n$ に関する様々な公理をもついくつかの n-modal logic
L について、高々 m 変数 $p_1, \dots, p_m$ を含む論理式 A の標準形展開は、

「命題論理の最小項の集合 $\underline{{}^{(m)}W^{(0)}} = \{ p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \}$

$$\text{但し } p^\delta \begin{cases} = p & (\delta = 1) \\ = \neg p & (\delta = 0) \end{cases}$$

とこれを元にした基礎集合 (拡張された最小項の集合) の列

$$\underline{{}^{(m)}W^{(k+1)}} = \{ \langle g, \begin{bmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{bmatrix} \rangle \mid g \in {}^{(m)}W^{(k)}, U_1, \dots, U_n \subseteq {}^{(m)}W^{(k)} \}$$

($k=0, 1, 2, \dots$)」を

「論理 L の公理系と推論に対応して制限した集合列」: $\underline{{}^{(m)}W_L^{(k)}} = \{ f \in {}^{(m)}W^{(k)} \mid \text{not } L \text{ 上 } \neg^* f \}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) (L の基底集合列という) の上で行える。[3], [4]

以下は multi-modal でも可能であるが、uni-modal の場合に限って述べる。

○標準形展開の目的 は 論理式 $A \in {}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対し (${}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ は高々 m 変数 $p_1, \dots, p_m$ を含み、modal operators の深さ (degree) k の論理式の集合)、A の証明可能性 (L での) を A の標準形展開の要素である最小項の集合 ${}^{(m)}W_{A \cdot L}$ が ${}^{(m)}W_L^{(k)}$ と一致するか? で判定することにある:

$$(\#) \quad L \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_{A \cdot L} = {}^{(m)}W_L^{(k)}$$

但し、 ${}^{(m)}W_{A \cdot L} = {}^{(m)}W_A \cap {}^{(m)}W_L^{(k)}$ であり、 ${}^{(m)}W_A (\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$ の定義は後述の (def) 内に記述される。

特に L が命題論理 L_0 の場合には (*) は ${}^{(m)}W_{L_0}^{(0)} = {}^{(m)}W^{(0)}$, ${}^{(m)}W_{A \cdot L_0} = {}^{(m)}W_A$ であるため、よく知られたつぎの形となる。

$$L_0 \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_A = {}^{(m)}W^{(0)}$$

ここで、つぎの Proposition が成立する。

[Proposition] 前記(井)が成立するための必要充分条件はつぎの(N1) & (N2)である。

- (1) Aのでのsetwise-expansion ${}^{(m)}W_A (\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$ につき、そのlogical meaning $*{}^{(m)}W_A$ (最小項の論理和) がAとLで同値となること：

$$(N1): L \vdash A \equiv *{}^{(m)}W_A$$

- (2) 各基底集合 ${}^{(m)}W^{(k)}$ のlogical meaning $({}^{(m)}W^{(k)})$ 内の最小項の論理和)がLで証明可能なこと：

$$(N2): L \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$$

(def) このような標準形展開に用いられる、基礎集合 ${}^{(m)}W^{(k)}$ 、その部分集合、それらの要素(最小項)などの“logical meaning *”は次のように定義する：

- (1) $U = \{f_1, \dots, f_r\} (\subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$ につき、 $*U \equiv *f_1 \vee \dots \vee *f_r$
 (2) $(*f =) * <g, K[U]> \equiv *g \wedge *K[U]$
 (3) $*K[U] \equiv K(*U) \wedge \bigwedge_{U \not\subseteq X \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} \neg K(*X)$

(def) ${}^{(m)}W_A$ の定義：論理式Aのset-wise expansion (論理Lに独立な)

- 1) ${}^{(m)}W_{p_j} = \{p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m \in \{0, 1\}\}$
 2) ${}^{(m)}W_{B \wedge C} = {}^{(m)}W_B^{<k>} \cap {}^{(m)}W_C^{<k>}, k = \max(\deg(B), \deg(C))$
 3) ${}^{(m)}W_{B \vee C} = {}^{(m)}W_B^{<k>} \cup {}^{(m)}W_C^{<k>}, k = \max(\deg(B), \deg(C))$
 4) ${}^{(m)}W_{\neg B} = {}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B, k = \deg(B)$
 5) ${}^{(m)}W_{B \supset C} = ({}^{(m)}W^{<k>} - {}^{(m)}W_B^{<k>}) \cup {}^{(m)}W_C^{<k>}, k = \max(\deg(B), \deg(C))$
 6) ${}^{(m)}W_{K(B)} = \{<g, K[X]> \mid g \in {}^{(m)}W^{(k)}, X \subseteq {}^{(m)}W_B\}, k = \deg(B)$

但し、 $U \subseteq {}^{(m)}W^{<1>}, k \geq 1$ 対し、 $U^{<k>} = U^{\dots^{k-1}}$ とし、

$U' = \{<g, K[X]> \mid g \in U, X \subseteq {}^{(m)}W^{(1)}\}$ とする。

[註]これらの定義から直接：Proposition ${}^{(m)}W_{*U} = U (U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$ (※) が証明される。

○ある論理Lにたいし、(井)をみたす ${}^{(m)}W_L^{(k)} (k=0, 1, 2, \dots; m=0, 1, 2, \dots)$ は「Lを標準形展開的にcharacterizeする」という。(set-wise expression like に)

○Lが K(クブキの最小normal論理), S4, S5 等について、それらをcharacterizeする ${}^{(m)}W_K^{(k)}, {}^{(m)}W_{S4}^{(k)}, {}^{(m)}W_{S5}^{(k)}$ 等は ${}^{(m)}W^{(k)}$ にそれぞれの論理の公理からくる制限条

件を与えた集合として、得られる。例えば、

最小normal論理K [公理: $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$ とトトロジ-; 推論: m.p., $\frac{\psi}{K(\psi)}$]

に対しては、

$$\underline{{}^{(m)}W_K^{(0)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(0)}}, \quad \underline{{}^{(m)}W_K^{(1)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(1)}},$$

$$\underline{{}^{(m)}W_K^{(k+2)}} = \{ \langle g, K[U], K[V] \rangle \mid g \in \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}, U \subseteq \underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}}, V \subseteq \underline{{}^{(m)}W^{(k+1)}}, 'V=U \}$$

で与えられる。但し $'V = \{ f \mid \langle f, K[X] \rangle \in V \text{ for some } X \subseteq \underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}} \}$ 。

ここで、 $g \in \underline{{}^{(m)}W^{(k)}} \text{ \& } 'V=U$

$$\Leftrightarrow \forall \phi \forall \psi (\max(\deg(\phi), \deg(\psi)) = k \Rightarrow \langle g, K[U], K[V] \rangle \in \underline{{}^{(m)}W_{K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))}})$$

のように $'V=U$ は公理 $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$ からくる制約条件である。

一般に (＃) を成立させるための N1, N2 が証明されるためには、論理Lの中の公理 $K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$ が用いられている。最小normal論理Kも (S4, S5 も) この公理を含んでいる。

しかし、このことによって、Kの標準形展開の基底集合は $\underline{{}^{(m)}W_K^{(k)}} \subsetneq \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$ のように基底集合 $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$ の真部分集合であって、基底集合 $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$ の項全体は展開のために用いられていない。そこで、つぎのように

PROBLEM : 基底集合 $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$ のすべての項が標準形展開のために必要となる論理L : $\underline{{}^{(m)}W_L^{(k)}} = \underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$ となる論理Lの存在が問題となる。(Kより弱い論理)

○通常の意味での論理は公理と推論で規定される。従ってもしPROBLEMのような論理Lで推論がKの推論(m.p., $\frac{\psi}{K(\psi)}$)と同じ論理があれば、かかる論理Lを規定する公理は、Kの

公理 $A1: K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi))$ より弱い公理であるといえる。しかし、N1, N2が示される程度には強い公理である。

(このような公理は通常の代入法則を許す意味では、現在不明と考えられる?)

○この問題に対する解答の1つは

「次の(†)のように“代入則を制限して用いる $A1^r$ ”を用いた論理」(擬論理?) Pによって与えることができる。「[2]によれば、かかるPも'論理'である。」

Pの公理: トトロジ-および

$$\underline{A1^r} : \{ K(\phi \supset \phi) \supset (K(\phi) \supset K(\phi)) \mid \phi, \psi \text{ は同じdegreeを持つ論理式} \} \dots (\dagger)$$

Pの推論: m.p. , $\frac{\psi}{K(\psi)}$

このPを用いるならば、 $P \vdash^{(m)} W_P^{(k)} = {}^{(m)}W^{(k)}$ を示すことができ、

$$(N1): P \vdash A \equiv {}^{* (m)}W_A$$

$$(N2): P \vdash {}^{* (m)}W^{(k)}$$

$$(N3): P \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_A = {}^{(m)}W^{(k)}$$

を証明することができる。

従って、擬論理Pは“命題論理の標準形展開の完全な意味での拡張”の成立する論理といえる。

参考文献

- [1] M.Sato:A Study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method, Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyouto University, 1977
- [2] R.Goldbratt:Logics of Time and Computation, Center for Study of Languages and Information, 1992
- [3] 大芝猛,小橋一秀:知識命題の標準形を用いる妥当性,数理解析研究所講究録906, 1995
- [4] 大芝猛,小橋一秀:知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化,数理解析研究所講究録950, 1996

Appendix: [Proposition] $((N1) \& (N2)) \Leftrightarrow (\#)$ の証明

$((N1) \& (N2)) \Rightarrow (\#)$ part:

「(N1): 任意の $A \in {}^{(m)}L^{(k)}$ に対し $L \vdash A \equiv {}^{* (m)}W_A$

(N2): $L \vdash {}^{* (m)}W^{(k)}$ 」が成立するならば、

(#) 任意の $A \in {}^{(m)}L^{(k)}$ に対し $L \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}W_A \cdot L = {}^{(m)}W_L^{(k)}$

(Proof) if part: 仮定 ${}^{(m)}W_A \cdot L = {}^{(m)}W_L^{(k)}$ から ${}^{(m)}W_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}W_A$. 従って、

$$L \vdash {}^{* (m)}W_L^{(k)} \Rightarrow L \vdash {}^{* (m)}W_A. \quad (1)$$

一方、(N2): $L \vdash {}^{* (m)}W^{(k)}$ と定義 ${}^{(m)}W_L^{(k)} = \{f \in {}^{(m)}W^{(k)} \mid \text{not } L \vdash \neg * f\}$

から、 $L \vdash {}^{* (m)}W_L^{(k)}$ (2) が成立. 従って (N1), (1), (2) から $L \vdash A$.

only if part: $L \vdash A \& {}^{(m)}W_A \cdot L \neq {}^{(m)}W_L^{(k)}$ とせよ. 従って、 ${}^{(m)}W_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}W_A$ で

はない故、 $\exists f_0 \in {}^{(m)}W_L^{(k)}$ s.t. $f_0 \notin {}^{(m)}W_A$. ${}^{(m)}W_A \subseteq {}^{(m)}W^{(k)} - \{f_0\}$. 故に $L \vdash A$

と (N1) から、 $L \vdash {}^{* (m)}W^{(k)} - \{f_0\}$. ${}^{(m)}W_{*f_0} = \{f_0\}$ ((def)の[註](*)) と

${}^{(m)}W \neg *f_0$ の定義から $L \vdash {}^{(m)}W \neg *f_0$. 再び (N1) から $L \vdash \neg *f_0$. 故に $f_0 \notin {}^{(m)}W_{L^{(k)}}$. これは矛盾。

(#) $\Rightarrow$ (N1) & (N2) part:

(N1): (#) のAとして $A \supset {}^{(m)}WA$ と $*{}^{(m)}WA \supset A$ をとる。

$$\begin{aligned} {}^{(m)}W(A \supset {}^{(m)}WA) &= ({}^{(m)}W^{(k)} - {}^{(m)}WA) \cup {}^{(m)}W *{}^{(m)}WA \\ &= ({}^{(m)}W^{(k)} - {}^{(m)}WA) \cup {}^{(m)}WA \quad (\text{def})[\text{註}](*) \\ &= {}^{(m)}W^{(k)} \end{aligned}$$

$${}^{(m)}W(A \supset {}^{(m)}WA) \cap {}^{(m)}WL^{(k)} = {}^{(m)}W^{(k)} \cap {}^{(m)}WL^{(k)}$$

$${}^{(m)}W(A \supset {}^{(m)}WA) \cdot L = {}^{(m)}WL^{(k)}$$

故に、[#] より、 $L \vdash A \supset {}^{(m)}WA$. 同様に、 $L \vdash *{}^{(m)}WA \supset A$.

(N2): [#] のAとして $*{}^{(m)}W^{(k)}$ をとる。

$$\begin{aligned} {}^{(m)}W(*{}^{(m)}W^{(k)}) \cdot L &= {}^{(m)}W(*{}^{(m)}W^{(k)}) \cap {}^{(m)}WL^{(k)} \\ &= {}^{(m)}W^{(k)} \cap {}^{(m)}WL^{(k)} \quad (\text{def})[\text{註}](*) \\ &= {}^{(m)}WL^{(k)} \end{aligned}$$

従って、[#] より、 $L \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$ も成立。