

時間変化する減衰調和振動子の一樣漸近安定性

島根大学大学院 総合理工学研究科 杉江 実郎・石原 和樹

Jitsuro Sugie and Kazuki Ishihara

Department of Mathematics, Shimane University, Matsue 690-8504, Japan

1 序文

2 階線形微分方程式

$$x'' + h(t)x' + \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

を考える。ただし、 $'$ は d/dt を表し、減衰係数 h は区間 $[0, \infty)$ において非負かつ局所的積分可能な関数、角振動数 ω は正の定数であるとする。方程式 (1) の唯一の平衡点は、原点 $(x, x') = (0, 0)$ である。減衰係数 h が非負の定数であるとき、方程式 (1) は減衰調和振動子と呼ばれることが多い。方程式 (1) は単純な形をしているが、自然科学や工学の分野において幅広い応用を有し、種々の物理現象を表すモデルとして、多くの研究成果が報告されている。

微分方程式の定性的理論において、平衡点の漸近安定性と一樣漸近安定性に関する研究は重要な位置を占めている。減数係数 h が零もしくは急激に減少して消滅するときは、平衡点は漸近安定や一樣漸近安定にならないことは容易に理解できるが、逆に、減数係数 h が急激に増加しても、平衡点は漸近安定や一樣漸近安定にならない。

本稿の目的は、方程式 (1) の平衡点が一樣漸近安定になるためには、減衰係数 h の増加がどの程度まで許されるかを明確にすることである。この増加を抑制する条件は成長条件と呼ばれている。本稿では、平衡点の一樣漸近安定性を保証する成長条件を幾種類か与えるとともに、それらの間の関係性を明らかにする。

本題に入る前に、平衡点の漸近安定性に関する研究の歴史と、そこで得られた結果を手短に紹介する。方程式 (1) は線形であるから、平衡点が吸収的であれば安定である（平衡点の吸収性や安定性の定義については、[32] を参照せよ）。しかって、平衡点が漸近安定であることを示すためには、方程式 (1) のすべての解とその導関数が $t \rightarrow \infty$ のとき、零に収束することを証明すればよい。方程式 (1) の平衡点が漸近安定であることを保証する十分条件、または必要十分条件を得るために、多くの努力が払われた（例えば、[1, 3, 4, 8–11, 13, 16, 18, 19, 21, 24–27, 31] を見よ）。その中でも、Smith [21] によって与えられた判定基準を特筆しなければならない。そのため

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds$$

と定める。このとき、次の結果が成り立つ。

定理 A ある $\underline{h} > 0$ が存在して、任意の $t \geq 0$ に対して

$$h(t) \geq \underline{h} \quad (2)$$

であると仮定する。このとき、方程式 (1) の平衡点が漸近安定であるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} dt = \infty. \quad (S)$$

である。

減衰係数 h が条件 (2) を満たすとき、つまり h が正の下界 $\underline{h}$ をもつとき、減衰係数 h はしばしば *large damping* と呼ばれる。また、減衰係数 h が上界 $\bar{h}$ をもつか、 $h(t) = t$ であるとき Smith の条件 (S) は満たされる。一方、 $h(t) = t^2$ であるときは条件 (S) は満たされない（証明は [11] を参照せよ）。これらの事実から、条件 (S) は減衰係数 h の急激な増加を禁止していることが分かる。条件 (S) は条件 (2) の下で、方程式 (1) の平衡点が漸近安定になるための必要十分条件であるが、一般には、条件 (S) が満たされるかどうかを確認することが困難である。Artstein and Infante [1] は、この事実に言及していないが、平衡点の漸近安定性を保証する別の成長条件を与えた。

定理 B 条件 (2) を仮定する。もし

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t^2} < \infty \quad (A)$$

が満たされるならば、方程式 (1) の平衡点は漸近安定である。

Artstein and Infante の条件 (A) は、不定積分 H が t^2 よりも緩やかに増加することを要求している。また彼らは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、分母の t の指数 2 を $2 + \varepsilon$ に変えることはできないという意味で、指数 2 が最適であることも示した。勿論、平衡点の漸近安定性を示すために必ずしも必要ではないことが分かる。例えば、 $h(t) = (2 + t) \log(2 + t)$ である場合、 $H(t)/t^2$ は非有界であり、条件 (A) は成り立たない。しかし、Ballieu and Peiffer [3] によれば、この場合は方程式 (1) の平衡点は漸近安定であることが証明できる。

条件 (S) には、確認が難しいという弱点があるのに対して、条件 (A) には、不定積分 H が分かれば、満たされるかどうかの確認が容易であるという利点がある。

条件 (A) は方程式 (1) の平衡点が漸近安定になるための十分条件であるから、条件 (A) が成り立てば、必然的に条件 (S) も成り立つのであるが、Hatvani, Krisztin and Totik [11] は、この事実を別の視点から証明している。彼らは、 $t \rightarrow \infty$ のとき $H(t)$ が無限大に発散するという仮定の下で、任意の $c > 0$ に対する離散成長条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(H^{-1}(nc) - H^{-1}((n-1)c) \right)^2 = \infty \quad (D)$$

は条件 (S) と同値であることを証明した。ただし、任意の $s \geq 0$ に対して

$$H^{-1}(s) = \min \{t \in [0, \infty) : H(t) \geq s\}$$

である。彼らは、条件 (A) が満たされるならば、条件 (D) が成り立つことも証明した。さらに、任意に固定した $N \in \mathbb{N}$ に対して、別の成長条件

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{\int_{i-1}^i h(s) ds} = \infty \quad (\text{H})$$

を与え、条件 (2) を含むある条件の下で、条件 (H) が満たされるならば、条件 (D) も成り立つことを明らかにした。

我々は Artstein and Infante [1] の結果を用いることによって、条件 (A) が満たされるならば、条件 (H) も成り立つことを証明できる。これらの事実を要約すると、次の図のようになる。

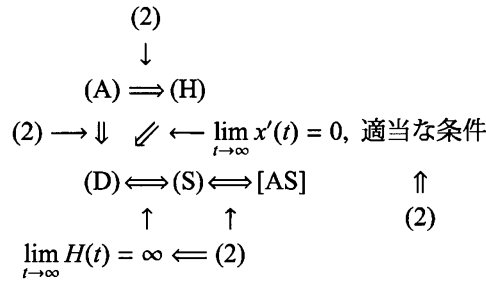


図 1: “ $\longrightarrow$ ”, “ $\implies$ ”, “ $\iff$ ”, [AS] はそれぞれ “加える”, “ならば”, “同値”, “漸近安定性” を示している。

方程式 (1) の平衡点が漸近安定 [AS] であるとは、(1) の任意の解 x に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$$

となることをいう。周知のように、平衡点がたとえ [AS] であっても、一様漸近安定であるとは限らない。平衡点が一様漸近安定であることを示すためには、方程式 (1) の各解とその導関数が、同じレベルの速さで零に収束することを確認する必要がある。一様漸近安定性の解析では、この点に注意を払わなければならない。

正確に定義するために、いくつか表記を与える。まず、 $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t))$, $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ とし、任意の適当なノルムを $\|\cdot\|$ と書く。さらに、 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ を通る方程式 (1) の解を $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ と表記する。尚、初期値に関する方程式 (1) の解の一意性は保証されている。

平衡点が結局的一様安定 [EvUS] であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ と $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ かつ $t_0 \geq \alpha$ ならば、任意の $t \geq t_0$ に対して、 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ となることをいう。ここで、[EvUS] は eventually uniformly stable の略語である。安定性理論では、“ultimately” という副詞を「終局的」と訳すことが一般的であるので、区別するため、“eventually” を「結局」の訳することにする。もし、 $\alpha(\varepsilon)$ を ε の値に関係なく、常

に 0 に選ぶことができるならば、平衡点は一様安定 [US] であるという。このことから分かるように、平衡点の一様安定性では、初期値 $\mathbf{x}_0$ のノルムが十分小さく、初期時刻 t_0 が 0 以上である任意の解に着目している。一方、平衡点の結局的一様安定性で着目する解は、初期値 $\mathbf{x}_0$ について同じであるが、初期時刻 t_0 には α 以上であるという限定条件がついている。言い換えると、初期時刻 t_0 が小さい解は無視していることになる。次に、平衡点が結局吸収的 [EvUA] であるとは、ある $\alpha_0 \geq 0$ と $\delta_0 > 0$ が存在して、任意の $\eta > 0$ に対して、ある $T(\eta) > 0$ が存在して、 $t_0 \geq \alpha_0$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_0$ であれば、任意の $t \geq t_0 + T(\eta)$ に対して、 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ となることをいう。もし、 α_0 を 0 に選ぶことができるならば、平衡点は一様吸収的 [UA] であるという。さらに、平衡点が結局的一様漸近安定 [EvUAS] であるとは、平衡点が [EvUS] かつ [EvUA] であることをいい、平衡点が一様漸近安定 [UAS] であるとは、平衡点が [US] かつ [UA] であることをいう。安定性の様々な定義については、[2, 5, 6, 15, 20, 32] を参照せよ。

方程式 (1) の平衡点が [UAS] であることと、指数漸近安定であることは同値であることがよく知られている。ここでいう、平衡点が指数漸近安定 [ExpAS] であるとは、ある $\kappa > 0$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、 $t_0 \geq 0$ かつ $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ ならば、任意の $t \geq t_0$ に対して、 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \exp(-\kappa(t-t_0))$ となることである。方程式 (1) の平衡点が [ExpAS] であるならば、次の条件を満たすリアプノフ関数 $V(\cdot, \cdot): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する:

$$(i) \ a(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{x}\|)$$

$$(ii) \ \dot{V}_{(1)}(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{x}\|) \quad \text{または} \quad \dot{V}_{(1)}(t, \mathbf{x}) \leq -dV(t, \mathbf{x})$$

$$(iii) \ |V(t, \mathbf{x}_1) - V(t, \mathbf{x}_2)| \leq f(t)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

ただし、 a, b, c は連続かつ増加正定値関数、 d は正の定数、 f は正の適当な関数である。この結果は [UAS] に関する逆定理と呼ばれている。もし、方程式 (1) の零解がただ単に漸近安定 [AS] であるだけならば、上記の条件を満たすような良いリアプノフ関数が必ずしも存在するとは限らない。この事実は [UAS] と [AS] の大きな違いである。上記の [UAS] に関する逆定理を用いることによって、方程式 (1) に小さな摂動項を加えても、一様漸近安定性は保たれることを証明することができる。現象をモデリングするとき、小さな誤差はつきものである。このため、現実の現象解析において、摂動問題を考える必要がある。この観点から、[UAS] についての研究は非常に重要であるといえる。

本稿では、用語として “uniformly with respect to $\sigma \geq 0$ ” を用いる。パラメータ σ をもつ関数族 $f_\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f_\sigma(t) = \infty$ uniformly with respect to $\sigma \geq 0$ とは、任意の $M > 0$ に対して、ある $T > 0$ が存在して、 $\sigma \geq 0$ かつ $t \geq T$ ならば、 $f_\sigma(t) \geq M$ であることを意味する。また $[c]$ を、実数 c をこえない最大の整数を表すことにする。

Sugie and Onitsuka [30] は次の結果を与えた。

定理 C 任意の $d > 0$ に対して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+d} h(s) ds > 0 \quad (3)$$

と仮定する。もし

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \frac{\int_{\sigma}^s e^{H(\tau)} d\tau}{e^{H(s)}} ds = \infty \quad \text{uniformly with respect to } \sigma \geq 0 \quad (4)$$

が満たされるならば、(1)の平衡点は一樣漸近安定である。

条件(3)を満たすとき、減衰係数 h は integrally positive であるという。この概念は、Matrosov [14] によって初めて導入された ([7–9, 17, 24, 28, 29] も参照せよ)。明らかに、条件(2)が成り立てば条件(3)も成り立つ。しかし、逆は必ずしも成り立たない。減衰係数 h が integrally positive であっても、無限個の零点をもつかもかもしれない。典型的な例は $\sin^2 t$ である。

条件(4)と条件(S)を比較する。まず、共通点として、どちらも $\exp(H(\tau) - H(s))$ の2重積分であることに気付く。相違点としては、条件(4)はその2重積分が $\sigma \geq 0$ に関して一樣に発散することを要求しているが、条件(4)は $\sigma = 0$ のときのみ発散すればよい。したがって、成長条件(4)は一樣発散条件であるといってよい。条件(4)に似た成長条件は、2次元線形系の零解が漸近安定になるための十分条件として、Hatvani [9] によって導入されている。

定理Cと同じ証明方法を用いて、次の結果が得られる。

定理D 条件(3)と仮定する。もし、ある $m \geq 0$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \frac{\int_{\sigma}^s e^{H(\tau)} d\tau}{e^{H(s)}} ds = \infty \quad \text{uniformly with respect to } \sigma \geq m \quad (\text{SU})$$

が満たされるならば、(1)の平衡点は結局的一樣漸近安定である。

勿論、平衡点が一樣漸近安定 [UAS] ならば、それは結局的一樣漸近安定 [EvUAS] であるが、一般には、その逆は成り立たない。Strauss and Yorke [22] は逆も成り立つための必要十分条件を以下のように与えた ([23] も参照せよ)。

定理E 平衡点が結局的一樣漸近安定であると仮定する。このとき、平衡点が一樣漸近安定であるための必要十分条件は、恒等的に零である関数が区間 $[t_0, \infty)$ において定義される一意な解となることである。

方程式(1)は線形であるから、解の初期値に関する一意性が成り立つので、定理Eから [EvUAS] と [UAS] が同値であることが分かる。したがって、定理Dから条件(SU)は、方程式(1)の平衡点が一樣漸近安定になるための成長条件であることになる。本稿では、一樣発散条件である(SU)以外に、一樣漸近安定性を保証する他の成長条件を与え、それらの条件間の関係を明らかにする。

2 減衰係数 h の急激な増加を抑制する条件

第1節で述べたように、Hatvani [11] らは、Smithの条件(S)と同値である漸近安定性に関する離散成長条件を与えた。この結果に刺激を受け、Sugie and Onitsuka [30] は、一

様漸近安定性に関する離散成長条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N}^{n+N} (H^{-1}(i) - H^{-1}(i-1))^2 = \infty \quad \text{uniformly with respect to } N \in \mathbb{N} \quad (5)$$

を与え、条件 (3) の下で、条件 (5) が満たされるならば、条件 (4) も成り立つことを証明した。同じアイデアによって、我々は、あるが $N^* \in \mathbb{N}$ 存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N}^{n+N} (H^{-1}(i) - H^{-1}(i-1))^2 = \infty \quad \text{uniformly with respect to } N \geq N^* \quad (\text{DU})$$

ならば、条件 (SU) も成り立つことを証明できる。したがって、条件 (DU) は条件 (SU) の離散化であると考えてよい。

残念ながら、一般には、具体的に与えられた減衰係数 h が条件 (SU) や (DU) を満たすか否かを確認することは容易ではない。この節では、Artstein and Infante [1] と Hatvani [11] らによって与えられた条件 (A) と (H) に対応する一様漸近安定性に関する成長条件を与える。また、これらの新しい成長条件と条件 (SU) や条件 (DU) の間の関係も明らかにする。

定理 1 条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$ を仮定する。もし、ある $\varepsilon_0 > 0$ と $m \geq 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{2-\varepsilon_0}} \int_t^{t+\tau} h(s) ds < \infty \quad \text{uniformly with respect to } \tau \geq m \quad (\text{AU})$$

が満たされるならば、条件 (DU) が成り立つ。

注意 1 条件 (3) が満たされるならば、条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$ も成り立つ。条件 (AU) は Artstein and Infante [1] が与えた条件 (A) の τ に関する一様収束版である。

定理 2 ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \geq N$ に対して

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{n-1}^n h(s) ds > 0 \quad (6)$$

であると仮定する。もし、条件 (AU) が満たされるならば、ある $N^* \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=N}^{n+N} \frac{1}{\int_{i-1}^i h(s) ds} = \infty \quad \text{uniformly with respect to } N \geq N^* \quad (\text{HU})$$

が成り立つ。

注意 2 条件 (3) が満たされるならば、条件 (6) も成り立つ。条件 (HU) は Hatvani [11] らが与えた条件 (H) の N に関する一様発散版である。

定理 3 ある $T > 0$ が存在して

$$\begin{cases} \text{区間 } [T, \infty) \text{ において, } 1/h \text{ は有界であり,} \\ \text{区間 } [T, \infty) \text{ において, } (1/h)' \text{ は上に有界である} \end{cases} \quad (7)$$

と仮定する。このとき、条件 (HU) が満たされるならば、条件 (SU) が成り立つ。

上記の 3 つの定理に定理 D と定理 E を併せると、以下のような [UAS] に関する成長条件間の関係が明らかになる。

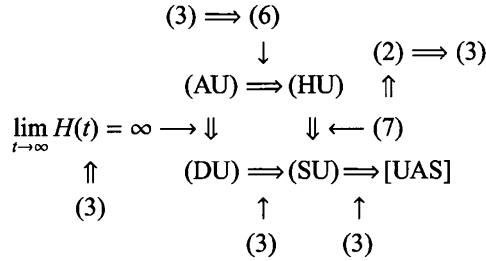


図 2: “ $\longrightarrow$ ”, “ $\implies$ ”, [UAS] はそれぞれ “加える”, “ならば”, “一様漸近安定性” を示している。

3 定理の証明

この節では、3 つの定理にそれぞれ証明を与える。

定理 1 の証明 まず, $t_0 = 0$ とおき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $t_n = H^{-1}(n)$ と定めて, 数列 $\{t_n\}$ を作る. 条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$ から, この数列は単調増加し, $n \rightarrow \infty$ のときに無限大に発散することが分かる. したがって

$$t_{N^*-1} \geq m$$

となる $N^* \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる. 簡単のため, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ と書く. 条件 (DU) が満たされることを示すためには, 任意の $L > 0$ に対して, ある $M(L) \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq M$ と $N \geq N^*$ に対して

$$\sum_{i=N}^{n+N} (\Delta t_i)^2 > L$$

が成り立つことを示せば十分である. 条件 (AU) から, ある定数 $K > 0$ と $T > 0$ が存在して, 任意の $\tau \geq m$ と $t \geq T$ に対して

$$\int_{\tau}^{t+T} h(s) ds < Kt^{2-\varepsilon_0} \quad (8)$$

であることが分かる. 任意の $L > 0$ に対して

$$M(L) = \max \left\{ 1, \left[KT^{2-\varepsilon_0} \right], \left[\left(K^2 L^{2-\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} \right] \right\} \in \mathbb{N} \quad (9)$$

とおく.

さて, $N_0 \geq N^*$ を満たす $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$t_{M+N_0} < t_{N_0-1} + T$$

であると仮定する. このとき, H は区間 $[0, \infty)$ において増加関数であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $H(t_n) = n$ であるから

$$\begin{aligned} M + N_0 &= H(t_{M+N_0}) \leq H(t_{N_0-1} + T) \\ &= H(t_{N_0-1}) + \int_{t_{N_0-1}}^{t_{N_0-1}+T} h(s) ds \\ &= N_0 - 1 + \int_{t_{N_0-1}}^{t_{N_0-1}+T} h(s) ds \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $\{t_n\}$ は増加数列であるから, $t_{N_0-1} \geq t_{N^*} \geq m$ であることが分かるので, $\tau = t_{N_0-1}$, $t = T$ として (8) を用いることができる. したがって

$$M \leq \int_{t_{N_0-1}}^{t_{N_0-1}+T} h(s) ds - 1 < KT^{2-\varepsilon_0} - 1$$

が得られる. しかし, これは (9) に矛盾する. 故に, 任意の $N \geq N^*$ に対して

$$t_{M+N} \geq t_{N-1} + T \quad (10)$$

が成り立つ.

不等式 (8) は, 任意の $\tau \geq m$ と $t \geq \tau + T$ に対して

$$\int_{\tau}^t h(t) ds < K(t - \tau)^{2-\varepsilon_0} \quad (11)$$

に書き換えることができる. 数列 $\{t_n\}$ の単調増加性から

$$t_{N-1} \geq t_{N^*-1} \geq m$$

である. したがって, (11) の τ として t_{N-1} を選ぶことができる. また, (10) より, (11) の t として t_{M+N} を選ぶことができる. そのため, 任意の $N \geq N^*$ に対して

$$\int_{t_{N-1}}^{t_{M+N}} h(t) ds < K(t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0}$$

が成り立つ. この不等式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{M+1}{(t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0}} &= \frac{H(t_{M+N}) - H(t_{N-1})}{(t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0}} \\ &= \frac{1}{(t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0}} \int_{t_{N-1}}^{t_{M+N}} h(s) ds < K \end{aligned}$$

が得られる. これを整理すると, 任意の $N \geq N^*$ に対して

$$(t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0} > \frac{M+1}{K} \quad (12)$$

となる. Cauchy-Bunyakovski-Schwarz の不等式より, 任意の $N \geq N^*$ に対して

$$\left(\sum_{i=N}^{M+N} \Delta t_i \right)^2 \leq \sum_{i=N}^{M+N} 1^2 \sum_{i=N}^{M+N} (\Delta t_i)^2 = (M+1) \sum_{i=N}^{M+N} (\Delta t_i)^2$$

であるから, (12) を用いて, $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{n+N} (\Delta t_i)^2 &\geq \sum_{i=N}^{M+N} (\Delta t_i)^2 \geq \frac{1}{M+1} \left(\sum_{i=N}^{M+N} \Delta t_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{M+1} \left((t_{M+N} - t_{N-1})^{2-\varepsilon_0} \right)^{2/(2-\varepsilon_0)} \\ &> \frac{1}{M+1} \left(\frac{M+1}{K} \right)^{2/(2-\varepsilon_0)} = \frac{(M+1)^{\varepsilon_0/(2-\varepsilon_0)}}{K^{2/(2-\varepsilon_0)}} \end{aligned}$$

であることが分かる. さらに, M の選び方 (9) に注意すると

$$M > K^{2/\varepsilon_0} L^{(2-\varepsilon_0)/\varepsilon_0} - 1$$

であるから, 最終的に

$$\sum_{i=N}^{n+N} (\Delta t_i)^2 > L$$

が得られる. これが示したかった評価式である. □

定理 2 の証明 定理 1 の証明の場合と同様に, 不等式 (8) が成り立つことに注意する. 任意の $L > 0$ に対して

$$M(L) = \max \left\{ 1, [T], \left\lceil (KL)^{\frac{1}{\varepsilon_0}} \right\rceil \right\} \in \mathbb{N} \quad (13)$$

とおく. 条件 (6) から, 任意の $n \geq N_*$ に対して, $a_n > 0$ を満たすように自然数 N_* を選ぶことができる. したがって, Cauchy-Bunyakovski-Schwarz の不等式を用いると, 任意の $N \geq N_*$ に対して

$$(M+1)^2 = \left(\sum_{i=N}^{M+N} 1 \right)^2 = \left(\sum_{i=N}^{M+N} \sqrt{a_i} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^2 \leq \sum_{i=N}^{M+N} a_i \sum_{i=N}^{M+N} \frac{1}{a_i} \quad (14)$$

が得られる. ここで

$$N^* = \max \{ m+1, N_* \}$$

とおくと, $N \geq N^*$ ならば $N-1 \geq N^*-1 \geq m$ である. また, M の選び方 (13) から $M+1 > T$ である. したがって, (8) の τ と t として, それぞれ $N-1$ と $M+1$ を選ぶことができる. そのため, 任意の $N \geq N^*$ に対して

$$\sum_{i=N}^{M+N} a_i = \int_{N-1}^{M+N} h(s) ds < K(M+1)^{2-\varepsilon_0}$$

が成り立つ。したがって、(14) から、任意の $N \geq N^*$ に対して

$$\sum_{i=N}^{M+N} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{K}(M+1)^{\epsilon_0}$$

であることが分かる。再び、(13) を用いると、任意の $n \geq M$ と $N \geq N^*$ に対して

$$\sum_{i=N}^{n+N} \frac{1}{\int_{j_{i-1}}^i h(s) ds} \geq \sum_{i=N}^{M+N} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{K}(M+1)^{\epsilon_0} > L$$

が得られる。これは、条件 (HU) が成り立つことを示している。 $\square$

定理 3 を証明するためには、Sugie and Onitуска [30] と同じ方法を用いることによって得られる次の結果が必要である。

補題 4 ある関数 $k: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と $T > 0$ が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } t \geq T \text{ に対して, } 0 \leq h(t) \leq k(t) \text{ であり,} \\ \text{区間 } [T, \infty) \text{ において, } 1/k \text{ は有界であり,} \\ \text{区間 } [T, \infty) \text{ において, } (1/k)' \text{ は上に有界である} \end{array} \right.$$

と仮定する。もし、ある $m \geq 0$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \frac{1}{k(s)} ds = \infty \quad \text{uniformly with respect to } \sigma \geq 0$$

が満たされるならば、条件 (SU) が成り立つ。

注意 3 補題 4 の仮定から分かるように、減衰係数 h が微分可能である必要はない。

定理 3 の証明 定理 3 を証明するために、補題 4 の観点から、ある $m \geq 0$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \frac{1}{h(s)} ds = \infty \quad \text{uniformly with respect to } \sigma \geq m \quad (15)$$

であることを示せば十分である。

条件 (7) から、任意の $t \geq T^*$ に対して

$$\frac{1}{h(t)} \leq c$$

となるような定数 $c > 0$ と $T^* > 0$ が存在する。したがって、 $h(t) \geq 1/c > 0$ であることが分かる。ここで、 $i^* = [T^*] + 2 \in \mathbb{N}$ とおくと、Cauchy-Bunyakovski-Schwarz の不等式によって

$$1 = \left(\int_{i-1}^i ds \right)^2 = \left(\int_{i-1}^i \sqrt{h(s)} \frac{1}{\sqrt{h(s)}} ds \right)^2 \leq a_i \int_{i-1}^i \frac{1}{h(s)} ds$$

が得られる。ただし、 $\{a_i\}$ は定理 2 で与えられた数列である。したがって、任意の $i \geq i^*$ に対して

$$\int_{i-1}^i \frac{1}{h(s)} ds \geq \frac{1}{a_i}$$

となる。また、 $N^{**} = \max\{N^*, i^*\}$ とおく。このとき、条件 (HU) から、任意の $L > 0$ に対して、ある $M(L) \in \mathbb{N}$ が存在して、 $N \geq N^{**}$ ならば

$$\int_{N-1}^{M+N} \frac{1}{h(s)} ds \geq \sum_{i=N}^{M+N} \int_{i-1}^i \frac{1}{h(s)} ds \geq \sum_{i=N}^{M+N} \frac{1}{a_i} > L \quad (16)$$

であることが分かる。さらに、 $m = N^{**} - 1$ とおくと、任意の $\sigma \geq m$ に対して

$$N - 2 < \sigma \leq N - 1$$

を満たす $N \in \mathbb{N}$ を選ぶことができる。このとき、明らかに $N \geq N^{**}$ である。最後に、 $T(L) = M(L) + 2$ とおくと、(16) によって、任意の $t \geq T$ に対して

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\sigma} \frac{1}{h(s)} ds \geq \int_{N-1}^{T+N-2} \frac{1}{h(s)} ds = \int_{N-1}^{M+N} \frac{1}{h(s)} ds > L$$

が得られる。これは、条件 (15) が成り立つことを意味する。 $\square$

4 平衡点が一様漸近安定である例

図 2 で示したように、条件 (AU) が、方程式 (1) の平衡点が一様漸近安定であることを保証する条件の中で、確認が一番容易である。対照的に、他のすべての条件を含む条件 (SU) は確認が困難である。特に、条件 (SU) において、 σ に関して一様に 2 重積分が発散するかどうかを判断することが難しい。この状況を示すため、次の 1 つの例を与える。

例 5 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$h(t) = \begin{cases} 1+n & \text{if } n-1/n \leq t \leq n, \\ 1 & \text{if } n < t < n+1-1/(n+1) \end{cases} \quad (17)$$

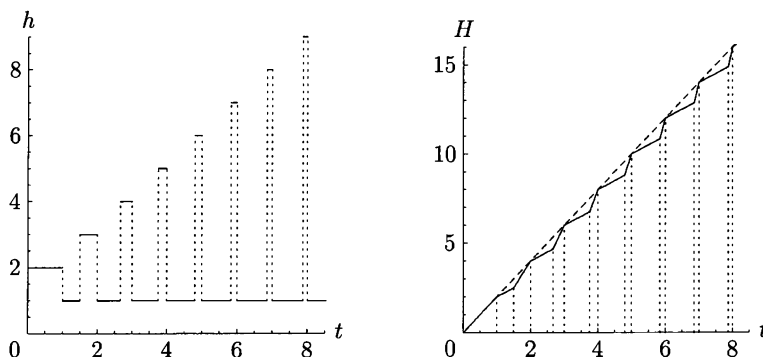
である方程式 (1) を考える。このとき、平衡点は一様漸近安定である。

条件 (2) が $\underline{h} = 1$ に対して満たされるので、条件 (3) も成り立つ。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、積分 H は

$$s = H(t) = \begin{cases} (1+n)t - n(n-1) & \text{if } n-1/n \leq t \leq n, \\ t+n & \text{if } n < t < n+1-1/(n+1) \end{cases}$$

となる (図 3 を見よ)。したがって、 H は区間 $[0, \infty)$ において単調増加関数であり、条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$ が満たされる。また、任意の $\tau \geq 0$ と $t \geq 0$ に対して、ある $p \in \mathbb{N}$ と $q \in \mathbb{N}$ が存在して

$$p-1 \leq \tau < p \quad \text{かつ} \quad q-1 \leq t < q$$

図 3: 関数 h と H のグラフ

を満たすことから

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{t+\tau} h(s)ds &= H(t+\tau) - H(\tau) < H(p+q) - H(p-1) \\ &= 2(p+q) - 2(p-1) = 2(q+1) < 2(t+2) \end{aligned}$$

となる. 条件 (AU) が満たされることを示すために, $\varepsilon_0 = 1$ かつ $m = 0$ とおく. このとき, 上記の不等式より, 任意の $t \geq 4$ に対して

$$\frac{1}{t^2 - \varepsilon_0} \int_{\tau}^{t+\tau} h(s)ds < \frac{2(t+2)}{t} \leq 3$$

が成り立つ. これは, 条件 (AU) が満たされることを意味するので, 図 2 から, 平衡点は一樣漸近安定であることが分かる.

方程式 (1) の各解 x とそれに対応する導関数 x' の組は t の変化に伴って, 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上を連続的に移動し, 1 つの解曲線を描く. また, 方程式 (1) の平衡点は 2 次元平面上の原点 $(0, 0)$ に対応する. 第 1 節で述べたように, 方程式 (1) の平衡点が漸近安定であることと, すべての解曲線が原点に漸近することは同値である. 方程式 (1) は線形であるから, 平衡点自身ではない 1 つの解曲線が原点に漸近するならば, すべての解曲線も原点に漸近することが知られている. したがって, 1 つの解曲線を描くことによって, 方程式 (1) の平衡点が漸近安定であるかどうかを判断できる (図 4 を見よ). しかし, 平衡点の一樣漸近安定性は 1 つの解曲線からは判断できない.

条件 (AU) が満たされるため, 図 2 から分かるように, 条件 (DU), (HU), (SU) も満たされる. 確かに, 条件 (DU) と (HU) が満たされることは, 以下のように直接に確認することができる. しかし, 条件 (SU) が満たされることを示すのは難しい.

まず, 条件 (DU) を確認する. 積分 H は単調に無限大へ発散することから, 関数 H^{-1} は H の通常の逆関数になる. 簡単な計算から, 逆関数 H^{-1} は

$$t = H^{-1}(s) = \begin{cases} \frac{s + n(n-1)}{1+n} & \text{if } 2n-1-1/n \leq s \leq 2n, \\ s-n & \text{if } 2n < s < 2n+1-1/(n+1) \end{cases}$$

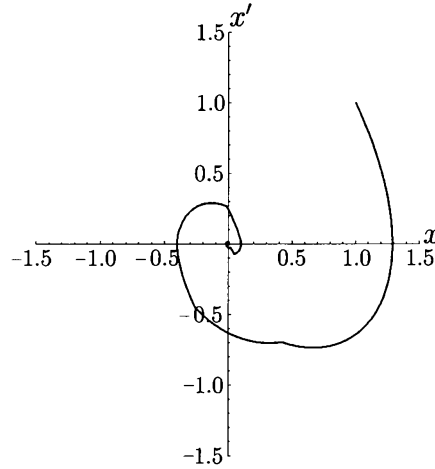


図 4: 減衰係数 h は (17) で表され, 角振動数 ω は 2.2 である方程式 (1) の初期条件 $(x(0), x'(0)) = (1, 1)$ を満たす解曲線の相平面図

となる (図 5 を見よ). したがって

$$H^{-1}(2n) = \frac{2n + n(n-1)}{1+n} = n, \quad H^{-1}(2n-1) = \frac{2n-1 + n(n-1)}{1+n} = n - \frac{1}{1+n} \quad (18)$$

である. 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P = \left\lfloor \frac{N+3}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N} \quad \text{かつ} \quad p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$$

とおくと, $2P-3 \leq N < 2P-1$ かつ $2(p+P)-1 \leq n+N$ となる. したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{n+N} (H^{-1}(i) - H^{-1}(i-1))^2 &> \sum_{i=2P-1}^{2(p+P)-1} (H^{-1}(i) - H^{-1}(i-1))^2 \\ &= \sum_{j=P}^{p+P} (H^{-1}(2j-1) - H^{-1}(2j-2))^2 \end{aligned}$$

が得られる. さらに, (18) から

$$\begin{aligned} \sum_{j=P}^{p+P} (H^{-1}(2j-1) - H^{-1}(2j-2))^2 &= \sum_{j=P}^{p+P} \left(j - \frac{1}{1+j} - (j-1) \right)^2 \\ &= \sum_{j=P}^{p+P} \left(\frac{j}{1+j} \right)^2 \geq \sum_{j=P}^{p+P} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(p+1) \\ &= \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n-2}{8} \end{aligned}$$

であることが分かる. したがって, 任意の $L > 0$ に対して, 定数 $M(L) = 8L + 2$ が存在して, $n \geq M$ ならば

$$\sum_{i=N}^{n+N} (H^{-1}(i) - H^{-1}(i-1))^2 > \frac{n-2}{8} > \frac{M-2}{8} = L$$

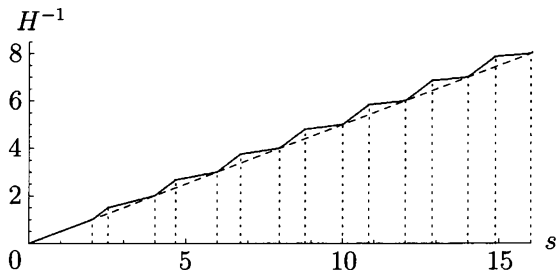


図 5: H の逆関数 H^{-1} のグラフ

となる。これは、 $N^* = 1$ とする条件 (DU) である。

次に、条件 (HU) を確認する。再び

$$a_n = \int_{n-1}^n h(s) ds$$

と書く。この例では、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n = 2$ であることが容易に確認できる。したがって

$$\sum_{i=N}^{n+N} \frac{1}{\int_{i-1}^i h(s) ds} = \frac{n+1}{2}$$

となる。これは、 $N^* = 1$ とする条件 (HU) が満たされていることを意味する。

例 5 の減衰係数 h は区分連続であり、連続ではない。定理 3 を適用するためには、減衰係数 h が微分可能であることが必要であるから、条件 (HU) が満たされるだけでは、平衡点が一様漸近安定であることを示すことができない。このことから、定理 3 の仮定には改善の余地があることが分かる。

5 付録

図 1 に示した [AS] に関する成長条件間の関係は、次のように改良することができる。

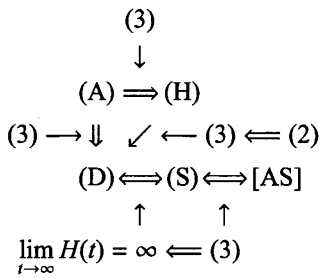


図 5: “ $\longrightarrow$ ”, “ $\implies$ ”, “ $\Longleftrightarrow$ ”, [AS] はそれぞれ “加える”, “ならば”, “同値”, “漸近安定性” を示している。

紙面の都合上、次の関係のみ証明する。

命題 6 条件 (3) を仮定する。このとき、条件 (A) が満たされるならば、条件 (H) も成り立つ。

命題 6 を証明するためには、Artstein and Infante [1] のアイデアから得られる次の補題が必要となる。

補題 7 ある $K > 0$ と $m \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \geq m$ に対して

$$a_n > 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=m}^n a_i \leq Kn^2$$

である数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$$

を満たす。

証明 任意に固定した自然数 $n \geq m$ に対して、 $b_j = a_{2^n+j} > 0$ ($j = m, \dots, 2^n$) とおく。このとき、仮定から

$$\sum_{j=m}^{2^n} b_j = \sum_{j=m}^{2^n} a_{2^n+j} = \sum_{i=2^n+m}^{2^{n+1}} a_i < \sum_{i=m}^{2^n+m-1} a_i + \sum_{i=2^n+m}^{2^{n+1}} a_i = \sum_{i=m}^{2^{n+1}} a_i \leq 2^{2(n+1)} K$$

が得られる。Cauchy-Bunyakovski-Schwarz の不等式から

$$(2^n - m + 1)^2 = \left(\sum_{j=m}^{2^n} \sqrt{b_j} \frac{1}{\sqrt{b_j}} \right)^2 \leq \sum_{j=m}^{2^n} b_j \sum_{j=m}^{2^n} \frac{1}{b_j} < 2^{2(n+1)} K \sum_{j=m}^{2^n} \frac{1}{b_j}$$

が成り立つ。したがって

$$\sum_{j=m}^{2^n} \frac{1}{b_j} > \frac{(2^n - m + 1)^2}{2^{2(n+1)} K}$$

であることが分かる。この不等式を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{a_i} &> \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{1}{a_{m+k}} + \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{j=m}^{2^n} \frac{1}{a_{2^n+j}} \right) > \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{j=m}^{2^n} \frac{1}{b_j} \right) \\ &> \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(2^n - m + 1)^2}{2^{2(n+1)} K} = \frac{1}{K} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1 - (m-1)/2^n}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と評価できる。自然数 n は任意であるから、十分大きくすると

$$\frac{1 - (m-1)/2^n}{2}$$

は $1/2$ に限りなく近づく. そのため

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$$

が成り立つ. □

命題 6 を証明する準備が整った.

命題 6 の証明 条件 (A) から, ある $K > 0$ と $T_1 > 0$ が存在して, 任意の $t \geq T_1$ に対して

$$\int_0^t h(s) ds < Kt^2 \quad (19)$$

が成り立つ. 減衰係数 h は条件 (3) を満たすから, ある $\nu > 0$ と $T_2 > 0$ が存在して, 任意の $t \geq T_2$ に対して

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \geq \nu$$

となる. 自然数 m を $m \geq \max\{T_1, T_2\}$ となるように選ぶ. また

$$a_n = \int_{n-1}^n h(s) ds$$

とおく. このとき, (18) と (19) から, 任意の $n \geq m$ に対して, $a_n \geq \nu > 0$ であり

$$\sum_{i=m}^n a_i = \int_{m-1}^n h(s) ds \leq \int_0^n h(s) ds < Kn^2$$

を満たす. したがって, 補題 7 から, 条件 (H) が成り立つ. □

参考文献

- [1] Z. Artstein and E. F. Infante, *On the asymptotic stability of oscillators with unbounded damping*, Quart. Appl. Math., **34** (1976/77), 195–199. MR0466789 (57 #6665)
- [2] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2005. MR2146587 (2005m:93001)
- [3] R. J. Ballieu and K. Peiffer, *Attractivity of the origin for the equation $\ddot{x} + f(t, x, \dot{x})|\dot{x}|^q \dot{x} + g(x) = 0$* , J. Math. Anal. Appl., **65** (1978), 321–332. MR0506309 (80a:34057)
- [4] L. H. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund and P. Taraba, *On stability of linear time-varying second-order differential equations*, Quart. Appl. Math., **64** (2006), 137–151. MR2211381 (2006m:34126)
- [5] A. Halanay. *Differential Equations: Stability, Oscillations, time lags*, Academic, New York–London, 1966. MR0216103 (35 #6938)

- [6] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York–London–Sydney, 1969. MR0419901 (54 #7918); (revised) Krieger, Malabar, 1980. MR0587488 (82e:34001)
- [7] L. Hatvani, *On partial asymptotic stability and instability* III (Energy-like Ljapunov functions), *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **49** (1985), 157–167. MR0839935 (88a:34066)
- [8] L. Hatvani, *On the uniform attractivity of solutions of ordinary differential equations by two Lyapunov functions*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **67** (1991) 162–167. MR1114963 (92g:34063)
- [9] L. Hatvani, *On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system*, *Nonlinear Anal.*, **25** (1995), 991–1002. MR1350721 (96k:34105)
- [10] L. Hatvani, *Integral conditions on the asymptotic stability for the damped linear oscillator with small damping*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124** (1996), 415–422. MR1317039 (96d:34062)
- [11] L. Hatvani, T. Krisztin and V. Totik, *A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator*, *J. Differential Equations*, **119** (1995), 209–223. MR1334491 (96k:34104)
- [12] L. Hatvani and V. Totik, *Asymptotic stability of the equilibrium of the damped oscillator*, *Diff. Integral Eqns.*, **6** (1993), 835–848. MR1222304 (94c:34080)
- [13] A. O. Ignatyev, *Stability of a linear oscillator with variable parameters*, *Electron. J. Differential Equations*, **1997** (1997), No. 17, pp. 1–6. MR1476064 (98i:34076)
- [14] V. M. Matrosov, *On the stability of motion*, *Prikl. Mat. Meh.*, **26** (1962), 885–895; translated as *J. Appl. Math. Mech.*, **26** (1962), 1337–1353. MR0153934 (27 #3895)
- [15] A. N. Michel, L. Hou and D. Liu, *Stability Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2008. MR2351563 (2008i:93001)
- [16] J. J. Levin and J. A. Nohel, *Global asymptotic stability for nonlinear systems of differential equations and applications to reactor dynamics*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **5** (1960), 194–211. MR0119524 (22 #10285)
- [17] M. Onitsuka and J. Sugie, *Uniform global asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **141** (2011), 1083–1101. MR2838369 (2012i:34070)
- [18] P. Pucci and J. Serrin, *Precise damping conditions for global asymptotic stability for nonlinear second order systems*, *Acta Math.*, **170** (1993), 275–307. MR1226530 (94i:34103)

- [19] P. Pucci and J. Serrin, *Asymptotic stability for intermittently controlled nonlinear oscillators*, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994), 815–835. MR1271312 (95c:34092)
- [20] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*, Applied Mathematical Sciences, 22, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977. MR0450715 (56 #9008)
- [21] R. A. Smith, *Asymptotic stability of $x'' + a(t)x' + x = 0$* , Quart. J. Math. Oxford, (2) **12** (1961), 123–126. MR0124582 (23 #A1894)
- [22] A. Strauss and J. A. Yorke, *Perturbing uniform asymptotically stable nonlinear systems*, J. Differential Equations, **6** (1969), 452–483. MR0252781 (40 #5998)
- [23] A. Strauss and J. A. Yorke, *Perturbing uniformly stable linear systems with and without attraction*, SIAM J. Appl. Math., **17** (1969), 725–738. MR0252782 (40 #5999)
- [24] J. Sugie, *Convergence of solutions of time-varying linear systems with integrable forcing term*, Bull. Austral. Math. Soc., **78** (2008), 445–462. MR2472280 (2009k:34102)
- [25] J. Sugie, *Influence of anti-diagonals on the asymptotic stability for linear differential systems*, Monatsh. Math., **157** (2009), 163–176. MR2504784 (2010d:34103)
- [26] J. Sugie, *Global asymptotic stability for damped half-linear oscillators*, Nonlinear Anal., **74** (2011), 7151–7167.
- [27] J. Sugie, S. Hata and M. Onitsuka, *Global asymptotic stability for half-linear differential systems with periodic coefficients*, J. Math. Anal. Appl., **371** (2010), 95–112. MR2660989 (2011g:34113)
- [28] J. Sugie and M. Onitsuka, *Global asymptotic stability for half-linear differential systems with coefficients of indefinite sign*, Arch. Math. (Brno), **44** (2008), 317–334. MR2493428 (2010b:34118)
- [29] J. Sugie and M. Onitsuka, *Integral conditions on the uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems with time-varying coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 2493–2503. MR2607879 (2011d:34103)
- [30] J. Sugie and M. Onitsuka, *Growth conditions for uniform asymptotic stability of damped oscillators*, Nonlinear Anal., **98** (2014), 83–103. MR3158447
- [31] A. G. Surkov, *Asymptotic stability of certain two-dimensional linear systems*, Differential'nye Uravneniya, **20** (1984), 1452–1454. MR0759607 (85j:34098)
- [32] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966. MR0208086 (34 #7896)