

カオティック順序を基軸としてグランドフルタ不等式を見る

前橋工科大学 亀井栄三郎 (EIZABURO KAMEI)

1. フルタ不等式は作用素平均を用いると chaotic order で成り立つ事が分かる

A, B をヒルベルト空間上の正作用素とする。このとき

$$(LH) \quad A \geq B \implies A^\alpha \geq B^\alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

というのが Löwner-Hinz の不等式である。フルタ不等式はこの拡張として与えられた。次に、ヒルベルト空間上の正作用素 A, B に対し作用素平均 (α -power mean) は次のように定められる [18]。

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

これを用いる事でフルタ不等式は見通しが良くなり、独自の領域を開拓していくことが出来る、というのがここにおける主張である。以下、フルタ型の不等式は全て作用素平均を用いて表していく事とする。古田の与えた原型の不等式 [7] は次のように表される [2],[12]。

Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then for $r \geq 0, 1 \leq p$*

$$(F) \quad A^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} B^p \leq A \quad \text{and} \quad B \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} A^p.$$

そこで、作用素平均の手法を用いて別証明を与えてみると、これら2つに分断された不等式を一行に繋ぐことが分かった [12](cf. [8])。

Satellite theorem of the Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then for $r \geq 0, 1 \leq p$*

$$(SF) \quad A^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} B^p \leq B \leq A \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} A^p.$$

これは更に次のように一般化できる [13],[14]。

$$(SF') \quad A^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} B^p \leq B^\alpha \leq A^\alpha \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} A^p \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

次に A, B を可逆な正作用素とし、 $\log A \geq \log B$ のとき、 $A \gg B$ と表す。これを **chaotic order** と呼ぶ。一般に $A \gg B \implies A \geq B$ であるが逆は成り立たない事は知られている。そこで $A \gg B$ の仮定の下で (SF) が成り立つのか、ということについて調べてみた。まず、chaotic order を使っていく上での出発点となる次の結果を述べておく。これは $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A^\alpha - I}{\alpha} = \log A$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{B^\alpha - I}{\alpha} = \log B$ であることより、(SF') における $\alpha = 0$ の場合であるとみなすことで、次のように呼ぶこととする [3]。

Chaotic Furuta inequality: *If $A \gg B$, then for $r \geq 0, p \geq 0$*

$$(CF) \quad A^{-r} \sharp_{\frac{r}{p+r}} B^p \leq I \leq B^{-r} \sharp_{\frac{r}{p+r}} A^p.$$

この結果を用いることで (SF) は仮定を $A \gg B$ に緩めても次の形で成り立つことが解る [17]。

Satellite theorem of chaotic Furuta inequality: *If $A \gg B$, then for $r \geq 0, p \geq 1$*

$$(SCF) \quad A^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} B^p \leq B \ll A \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1}{p+r}} A^p.$$

(SCF) は更に次のように一般化できる [16],[17](cf.[6]).

Theorem A. *If $A \gg B$, then the following (1) and (2) hold.*

$$(1) \quad A^{-r} \#_{\frac{s+r}{p+r}} B^p \leq B^\delta \text{ and } A^\delta \leq B^{-r} \#_{\frac{s+r}{p+r}} A^p \text{ for } r \geq 0 \text{ and } 0 \leq \delta \leq p$$

$$(2) \quad A^{-r} \#_{\frac{\alpha+r}{p+r}} B^p \leq A^\alpha \text{ and } B^\alpha \leq B^{-r} \#_{\frac{\alpha+r}{p+r}} A^p \text{ for } -r \leq \alpha \leq 0 \text{ and } 0 \leq p.$$

2. グランドフルタ不等式も chaotic order で見直せないか

(F) の一般化として古田は次の形を与えた [9]。これは $t=0$ のとき (F) を与え、 $t=1$ のときは [1] で与えられた不等式と一致する。

The grand Furuta inequality: *If $A \geq B \geq 0$, then for $1 \leq p$, $0 \leq t \leq 1$ and $t \leq r$, $1 \leq s$*

$$(GF) \quad A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A \text{ and } B \leq B^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (B^t \natural_s A^p).$$

ここで使われている $\natural$ の記号は作用素平均と区別するためのものである。

$$A \natural_r B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}, \quad r \in \mathbb{R} \quad r \notin [0, 1]$$

これは作用素平均が A, B を繋ぐ path の内分点であると解釈できるのに対して、外分点を表しているともみることにも出来るため極めて有用である。

グランドフルタ不等式も又作用素平均の見方を与えることで、次のように一行にまとめることが出来る。ここで本質的な役割を果たすのは次の結果である [4],[5],[15]。

Theorem B. *If $A \geq B > 0$, then*

$$(A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B$$

holds for $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$.

Satellite theorem of the grand Furuta inequality. *If $A \geq B > 0$, then for $r \geq 0$, $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$,*

$$(SGF) \quad A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B \\ \leq A \leq (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{1}{\beta}} \leq B^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p).$$

古田の提起した (GF) 型不等式の類別

[10],[11] において古田は (GF) 型不等式の類別として次のような形を示し、それぞれにおいて chaotic order と usual order の相違を明らかにしようと試みている。

Type I (c) $A \gg B \iff$ for $t \geq 0$, $-t \leq r$, $0 \leq p$, $\frac{t}{p+t} \leq s \leq 1$

$$(F1) \quad I \geq A^{-r-t} \#_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t} \geq A^{-r-t} \#_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \natural_s B^p)$$

Type I (u) $A \geq B \iff$ for $t \geq 0$, $-t \leq r$, $1 \leq p$, $\frac{1+t}{p+t} \leq s \leq 1$

$$(F2) \quad A \geq A^{-r-t} \#_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t} \geq A^{-r-t} \#_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \#_s B^p)$$

Type II (c) $A \gg B \iff$ for $t \geq 0$, $-t \leq r$, $0 \leq p$, $1 \leq s \leq \frac{2p+t}{p+t}$

$$(F3) \quad I \geq A^{-r-t} \#_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \#_s B^p) \geq A^{-r-t} \#_{\frac{r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t}$$

Type II (u) $A \geq B \iff$ for $t \geq 1$, $0 \leq r$, $1 \leq p$, $1 \leq s \leq \frac{2p+t+1}{p+t}$

$$(F4) \quad A \geq A^{-r-t} \#_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} (A^{-t} \#_s B^p) \geq A^{-r-t} \#_{\frac{1+r+t}{(p+t)s+r}} B^{(p+t)s-t}$$

そこで、上で与えられている p, r, s, t についての条件を整理し、更に $s = \frac{\beta+t}{p+t}$ と置き直すことで上で与えられている (F1), (F2), (F3), (F4) は次のように書き直すことが出来る。

$$(F'1) \quad r \geq 0, t \geq 0, 0 \leq \beta \leq p; I \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$$

$$(F'2) \quad r \geq 0, t \geq 0, 1 \leq \beta \leq p; A \geq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$$

$$(F'3) \quad r \geq t \geq 0, 0 \leq p \leq \beta \leq 2p; I \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta$$

$$(F'4) \quad r \geq t \geq 1, 1 \leq p \leq \beta \leq 2p+1; A \geq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^\beta$$

こうすることで全て chaotic order の仮定の下にまとめることが出来る。その準備として次の lemma を用意しておく。

Lemma If $A \gg B$ and $0 \leq p \leq \beta \leq 2p$, then

$$B^\beta \leq A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p \leq A^{-r} \#_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p$$

holds for $r \geq t \geq 0$.

Proof. By Theorem A (1), we have

$$\begin{aligned} A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p &= B^p \#_{\frac{\beta-p}{p+t}} A^{-t} \\ &= B^p (B^{-p} \#_{\frac{\beta-p}{p+t}} A^t) B^p \leq B^p (B^{-p} \#_{\frac{\beta-p}{p+t}} (B^{-p} \#_{\frac{1+p}{p+p}} A^r)) B^p \\ &= B^p (B^{-p} \#_{\frac{\beta-p}{p+p}} A^r) B^p = B^{\frac{p}{2}} (I \#_{\frac{\beta-p}{p+p}} B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}}) B^{\frac{p}{2}} \\ &= B^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{p}{2}} A^r B^{\frac{p}{2}})^{\frac{\beta-p}{p+p}} B^{\frac{p}{2}} = B^{\frac{p}{2}} (B^{-\frac{p}{2}} A^{-r} B^{-\frac{p}{2}})^{\frac{\beta-p}{p+p}} B^{\frac{p}{2}} \\ &= B^p \#_{\frac{\beta-p}{p+p}} A^{-r} = A^{-r} \#_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p. \end{aligned}$$

So the second inequality holds. The first one follows from

$$B^{-p} \#_{\frac{p-\beta}{t+p}} A^t = B^{-p} \#_{\frac{-p+\beta}{p}} (B^{-p} \#_{\frac{p}{t+p}} A^t) \geq B^{-p} \#_{\frac{-p+\beta}{p}} I = I \#_{\frac{2p-\beta}{p}} B^{-p} = B^{\beta-2p}.$$

Theorem 1. Let $A \gg B$ for $A, B > 0$ and $\delta \in \mathbb{R}$, then the following statements hold:

(1) If $r \geq 0$, $t \geq 0$ and $0 \leq \delta \leq \beta \leq p$, then

$$B^\delta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

(2) If $r \geq t \geq |\delta|$ and $|\delta| \leq p \leq \beta \leq 2p + |\delta|$, then

$$A^{-t} \#_{\frac{\delta+t}{\beta+t}} B^p \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Proof. (1) It is proved by applying Theorem A twice. As a matter of fact, it follows from $B^\delta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta$ and $B^\beta \geq A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p$.

(2) By lemma and Theorem A (2), we have

$$\begin{aligned} A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta &\leq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \\ &\leq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-r} \#_{\frac{\beta+r}{p+r}} B^p) = A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^p = B^p \#_{\frac{p-\delta}{p+t}} A^{-r} \\ &= B^p \#_{\frac{p-\delta}{p+t}} (B^p \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} A^{-r}) = B^p \#_{\frac{p-\delta}{p+t}} (A^{-r} \#_{\frac{-t+r}{p+t}} B^p) \leq B^p \#_{\frac{p-\delta}{p+t}} A^{-t} = A^{-t} \#_{\frac{\delta+t}{\beta+t}} B^p, \end{aligned}$$

where the last inequality is ensured by Theorem 2.

Theorem 1 は、古田の提起した Type I と Type II についてそれぞれ (c) と (u) を統一的に拡張したものとなっている。

Corollary . Let $A, B > 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, then the following hold:

(1) If $A^\delta \geq B^\delta$, $0 \leq \delta \leq \beta \leq p$ and $r \geq 0$, $t \geq 0$, then

$$A^\delta \geq B^\delta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

(2) If $A^{|\delta|} \geq B^{|\delta|}$, $|\delta| \leq p \leq \beta \leq 2p + |\delta|$ and $r \geq t \geq |\delta|$, then

$$A^{|\delta|} \geq B^{|\delta|} \geq A^{-t} \#_{\frac{\delta+t}{\beta+t}} B^p \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Proof. (1) If $\delta = 0$, then Theorem (1) implies Type I-(c), that is,

$$I \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p).$$

If $\delta > 0$, since

$$A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta = (A^\delta)^{-\frac{r}{\beta}} \#_{\frac{\frac{r}{\beta} + \frac{t}{\beta}}{\frac{\beta}{\beta} + \frac{t}{\beta}}} (B^\delta)^{\frac{\beta}{\beta}} \leq (B^\delta)^{\frac{\beta}{\beta}} = B^\beta,$$

we have $A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$. Similarly, we obtain

$$A^{-r} \#_{\frac{\delta+r}{\beta+r}} B^\beta = (A^\delta)^{-\frac{r}{\beta}} \#_{\frac{1+\frac{r}{\beta}}{\frac{\beta}{\beta} + \frac{t}{\beta}}} (B^\delta)^{\frac{\beta}{\beta}} \leq B^\delta \leq A^\delta.$$

So the case $\delta = 1$ is Type I-(u).

(2) In the case $\delta = 0$, Theorem (2) contains Type II (c), that is,

$$I \geq A^{-t} \#_{\frac{t}{\beta+t}} B^p \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} (A^{-t} \#_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p) \geq A^{-r} \#_{\frac{r}{\beta+r}} B^\beta.$$

Since $A \gg B$ holds for $\delta \neq 0$, if $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$), Theorem A (1)(resp. (2)) implies $B^\delta \geq A^{-t} \sharp_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p$ (resp. $A^\delta \geq A^{-t} \sharp_{\frac{\delta+t}{p+t}} B^p$). So Theorem 3 (2) leads the conclusion. Especially, the case $\delta = 1$ is Furuta's Type II (u).

しかしながら、(GF) 又は (SGF) においては $t \geq 0$ に対し A^{-r} と $(A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)$ の平均であるのに対し、これらは A^{-r} と $(A^{-t} \sharp_{\frac{\beta+t}{p+t}} B^p)$ の平均となっており、(GF) 又は (SFG) の場合とは異なる。[10], [11] において古田の掲げている不等式の中で (GF) の version と見なせるのは次であろう。

For $r \geq 0$ and $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta \leq 2p - t$,

$$(GF') \quad A \geq B \iff A \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^\beta \geq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p).$$

古田はこれを Type I (u) の例としているが、 $1 \leq \frac{\beta-t}{p-t} \leq 2$ であることより、

$$A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p = B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t}) B^p \leq B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} B^{-t}) B^p \leq B^\beta,$$

であるから、(LH) より直ちに得られる事柄である。そこで (GF) の場合と同様 (GF') の一般化を与えておく。ここでも (GF) における Theorem B に相当する次の事柄が得られる。

Theorem 2. If $A \geq B > 0$, then for $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$ the following holds.

$$(A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p$$

Proof. First of all, suppose that $1 \leq \frac{\beta-t}{p-t} \leq 2$. Then

$$A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p = B^p \sharp_{\frac{p-\beta}{p-t}} A^t = B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t}) B^p \leq B^p (B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} B^{-t}) B^p = B^\beta$$

By (LH), we have $(A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq B^p$.

Since $p \geq 1$, we have $B_1 = (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{p}} \leq B \leq A$. Next if we take β_1 with $1 \leq \frac{\beta_1-t}{\beta-t} \leq 2$, then the preceding argument ensures that

$$A^t \sharp_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p = A^t \sharp_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) = A^t \sharp_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B_1^\beta \leq B_1^{\beta_1},$$

that is, $A^t \sharp_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p \leq (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta_1}{\beta}}$. So

$$(A^t \sharp_{\frac{\beta_1-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta}{\beta_1}} \leq (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\beta}{\beta}} \leq B^p$$

follows from (LH). Repeating this method, we have the conclusion.

Theorem 2 を用いることで (GF') は次のように精密化され一般化できる。

Theorem 3. If $A \geq B > 0$ and $r \geq 0$, $0 \leq t \leq 1 \leq p \leq \beta$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{p}{\beta}} \leq A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} B^p \leq B.$$

Proof. Put $C = (A^t \sharp_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{1}{p}}$. Then we have $A \geq B \geq C$ and $C^p \leq B^p$ by Theorem 2. Therefore Theorem A (1) implies that

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{\beta+r}} C^\beta \leq C^p,$$

and so

$$\begin{aligned} A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} (A^t \sharp_{\frac{p-t}{p-t}} B^p) &= A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} C^\beta = A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} (A^{-r} \#_{\frac{p+r}{p+r}} C^\beta) \\ &\leq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} C^p \leq A^{-r} \#_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \end{aligned}$$

by $C^p \leq B^p$ and (SF).

References

- [1] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, *Linear Alg. and Its Appl.*, 197(1994), 113-131.
- [2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, *J.Operator Theory*, 23(1990), 67-72.
- [3] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, *Linear Alg. and Appl.*, 149(1991), 91-96.
- [4] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(1996), 2751-2756.
- [5] M.Fujii and E.Kamei, On an extension of grand Furuta inequality, *Sci. Math. Japon.*, 56(2002), 501-504.
- [6] M.Fujii and Y.Kim, Operator convexity in Furuta type operator inequalities, *J. Nonlinear Convex Anal.*, to appear.
- [7] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101(1987), 85-88.
- [8] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, *Proc. Japan Acad.*, 65(1989), 126.
- [9] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, *Linear Alg. and Its Appl.*, 219(1995), 139-155.
- [10] T.Furuta, $A \geq B > 0$ ensures $A^{1+r-t} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}}) A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1+r-t}{(p-t)s+r}}$ for $t \in [0, 1], r \geq t, p \geq 1, s \geq 1$ and related inequalities, preprint.
- [11] T.Furuta, Some topics on order preserving operator inequalities, 京都大学数理解析研究所講究録 1259, 119-129.
- [12] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, *Math. Japon.*, 33(1988), 883-886.
- [13] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, *Math. Japon.*, 49(1999), 65-71.
- [14] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, II, *Math. Japon.*, 50(1999), 179-182.
- [15] E.Kamei, Parametrized grand Furuta inequality, *Math. Japon.*, 50(1999), 79-83.
- [16] E.Kamei, Chaotic order and Furuta inequality, *Sci. Math. Japon.*, 53(2001), 221-225.
- [17] E.Kamei and M.Nakamura, Remark on chaotic Furuta inequality, *Sci. Math. Japon.*, 53(2001), 535-539.
- [18] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, 246(1980), 205-224.