

An asymptotic formula for a certain mean value on
a divisor problem

柳沢 直樹 (中央情報院)

Nao-ki Yamagisawa

ここでは発表に現われをすべし定理として述べるのではなく、
与えられたものの内の1つに限って述べることにします。こ
こで、

$$\sigma_a(m) = \sum_{N \ni d|m} d^a \quad \text{for } a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$$

とし、 $\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数とし

$$(1) \quad \Delta_a(x) = \sum_{m \leq x} \sigma_a(m) - \zeta(1-a)x - \frac{\zeta(1+a)}{1+a} x^{1+a} + \frac{1}{2} \zeta(1-a)$$

とします。また、 a は $-1 < a < 0$ を満たす定数とします。

$\sigma_a(m)$ の生成関数が $\zeta(s)\zeta(s-a)$ であることから、 $\Delta_a(x)$ の
公式においてすぐに見えてくる留数を集めて、(1) の右辺の
第2～第4項を Main term と考え、 O -term $\Delta_a(x)$ を評価
しようという問題は、Dirichlet の物数問題と同じく古くか

る様な ε_2 により考察されていようとして、現に 1932 年に S. Chowla は、 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ であるときは

$$(2) \quad \int_1^x (\Delta a(x) - \frac{1}{2} f(-a))^2 dx \\ = \left(\frac{1}{12} \frac{f(-2a) f(1-a)^2}{f(2-2a)} + \frac{1}{4} f(-a)^2 \right) x \\ + O(x^{\frac{3}{2}+a} \log x)$$

を証明してゐる。Chowla はこれをどうやって示したのか
という点、今日 Chowla - Walum の関数と呼ばれてゐる

$$(3) \quad G_{a,1}(x) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^a \bar{B}_1\left(\frac{x}{n}\right) \quad (\bar{B}_1(t) = \{t\} - \frac{1}{2})$$

を用ゐ、 $\Delta a(x)$ が

$$(4) \quad \Delta a(x) = -G_{a,1}(x) - x^a G_{-a,1}(x) + O(x^{a/2})$$

と書けることを示さねば

$$(5) \quad \sum_{\substack{m, n \\ m \wedge n = 1 \\ m, n \leq \sqrt{x}}} \int_{m \wedge n}^x n^a \bar{B}_1\left(\frac{x}{m}\right) \bar{B}_1\left(\frac{x}{n}\right) dx$$

のような積分の和の漸近式あるいは評価式をみつけるという
方法をとつてゐる。こゝで最も困難なのは (5) の処理で
て、たとえば $\int \bar{B}_1\left(\frac{x}{m}\right) \bar{B}_1\left(\frac{x}{n}\right) dx$ は、積分区間が長さ mn
なものであつてあまり大きくはならない、きつんといふ

$$\int_0^{[m, n]} \overline{B}_1\left(\frac{x}{m}\right) \overline{B}_1\left(\frac{x}{n}\right) dx = \frac{1}{12} [m, n]$$

となつてゐるのですが、問題の積分区間の長さが $[m, n]$ の位数になり、または、 $[m, n]$ 以下の大きさになり得るわけだ、こゝに、左ものかうまく集まつて (2) の O -term になることを示さなければならぬという点だ。Chowla は Fourier 解析を使い、 $\overline{B}_1(t)$ の Fourier 展開 $\sum_n -\frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n t)$ を基にしてこれを処理してゐます。しかしこの展開も条件収束であつて、また $\sin(2\pi n_1 \frac{x}{m}) \sin(2\pi n_2 \frac{x}{m})$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$) の積分も評価する ($\ll |\frac{n_1}{m} - \frac{n_2}{m}|^{-1}$ くらいであつた) といふことを含めて、あまり追跡しなれないような計算を [1] にあつて実行されております。これには敬意を表せざるを得ません。

さて、この [1] の存在はあまり知られてゐないのだから、何も知ることもなく、[3] にあつて (2) と同様な

$$(6) \quad \int_0^X \Delta_n(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{1+q}(n)}{n} \right)^2 \right) X + O(X^{\frac{3}{2}+q} \log X)$$

を、主定理の系として示しました。こゝでも (4) が出発点となつてゐる点は問ひなのだが、(5) の処理を簡単に行なふことで (6) を示しました。この場合は次を用いました。

Lemma (Yamagisawa [3]) $f(t), g(t)$ を区分的に連続、単調、有界な固定された関数で、しかもこれらは周期

$A(>0)$ をもつとある。また

$$\int_0^A f(t) dt = 0$$

であるとする。このとき、任意の $n \leq \sqrt{x}$ に対し

$$\sum_{m \leq \sqrt{x}} \left| \int_{X_m}^{Y_m} f\left(\frac{x}{m}\right) g\left(\frac{x}{m}\right) dx \right| \ll O_1(n) X \log X$$

が、 $0 < Y_m - X_m \ll X$ を満たす実数列 $\{X_m\}, \{Y_m\}$ によってなりたつ。

この証明には、Fourier 解析などを用いる。[3] を読んでいただければご理解いただけることと存じますが、Abel 変換などをくり返し使う程度で片付いております。また、 $G_{a,1}(x)$ の係数は全部 1 になることが、完全次が成立しております。

([3], Lemma 5) a, b を $a+b < -1, a, b \in (-1, 0)$ であるように固定するとき、

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^x \left(\sum_{m \leq \sqrt{x}} a_m \cdot n^a f\left(\frac{x}{m}\right) \right) \left(\sum_{m \leq \sqrt{x}} b_m \cdot n^b f\left(\frac{x}{m}\right) \right) dx \\ = Cx + O\left(x^{\frac{3}{2} + \frac{a+b}{2}} \log x\right) \end{aligned}$$

がなりたつ、ここで a_m, b_m は単に有界な正の実数列である。

その Lemma はもう少し一般の場合も述べてありますが、(1) の a_m, b_m は < 1 ならば何でもよいという結果でして、 $G_{a,1}$

の係数が与る, (2.11) のは自乗積分を考へるにはあまり重要で
なり, (2.11) のわけで, 左とせば a_m をわざと作. 左よりに
とる $\sum_{m \leq \sqrt{x}} a_m m^a f(\frac{x}{m}) = O(x^{\frac{1+a}{2}})$ ないとなりたすま
す. Chowla - Wadwa の予想と呼ばれた $G_{a,1}(x)$ を直接に評
価する (この場合 $\langle x^e \rangle$) という問題は, この点から考へても非
常に難かしい問題であると思ひます.

→ (2), $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ のときは, Voronoi 公式を用いて, 最良
なのは Meurman [2] の

$$\int_0^x \Delta_a(x)^2 dx = \frac{1}{(6+4a)\pi^2} \frac{\zeta(\frac{3}{2}-a)\zeta(\frac{3}{2}+a)\zeta(\frac{3}{2})^2}{\zeta(3)} x^{\frac{3}{2}+a} + O(x)$$

for any constant a ($-\frac{1}{2} < a < 0$), and

$$\int_0^x \Delta_{-\frac{1}{2}}(x)^2 dx = \zeta(\frac{3}{2})^2 \frac{1}{24 \cdot \zeta(3)} x \log x + O(x)$$

であ. [2] より

$$\int_0^x \Delta_a(x)^2 dx = O(x) \quad (-1 < a < -\frac{1}{2})$$

も証明されていますが, 実は [1] によつて (6) がわかつてい

たわけです. [3] より $\int_0^x \Delta_a(cx) \Delta_b(x) dx$ (a, b は定数
で $a+b < -1$, $a, b \in (-1, 0)$, また c は正の有理数) の漸近
式を導いてありますが, 重要な系は (6) です. また, この

Chowla-Walton の関数は, $-1 < q < -\frac{1}{2}$ 2

$$\Delta_a(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \sigma_a(n) \chi(n) - L(0, \chi) L(-a, \chi)$$

(χ は原始指標) の自乗積分を考えた際にも使えます,
 7.12 又 -1 多項式 $\bar{B}_1(t)$ の代わりに

$$P(t, \chi) = - \sum_{n \in t} \chi(n) - \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q \chi(m) m$$

(q は χ の conductor) を使った

$$G_{a,1}(x, \chi) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} n^a P\left(\frac{x}{n}, \chi\right)$$

を考えたこと, [3] において $\int_0^x |\Delta_a(x, \chi)|^2 dx$ の漸近
 式が求まっています.

(1998. 12. 29)

References

- (1) L. Chowla, Contributions to the analytic theory of numbers, Math. Z. 35 (1932), 279-299
- (2) T. Neuman, The mean square of the error term in a generalization of Dirichlet's divisor problem, Acta Arith. 76 (1996), 351-368.
- (3) N. Yamagisawa, An asymptotic formula for a certain mean value in a divisor problem, Journal of Number Theory 73 (1998), 339-358.