

有理型単葉関数の係数について

東京学大 教育 窪田 佳尚

1. Riemann の写像定理により, 任意の単連結領域は円板の内部および外部に等角に写像されることが知られている。ここでは, その写像の係数の評価を問題にする。その問題は次のように正規化して考えられる。

$|z| < 1$ で正則単葉な関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族を S とおき, $f(z) (\in S)$ の逆関数を

$$g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n w^n$$

とおくとき, $\sup_{f \in S} |\alpha_n|$ を求めよ。また, $|z| > 1$ で正則単葉な関数

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

の族と Σ_0 とおき, $g(z) (\in \Sigma_0)$ の逆関数を

$$\phi(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^{-n}$$

とおくとき, $\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n|$ を求めよ.

$\sup_{f \in S} |\alpha_n|$ に関しては, Löwner [5] によつて完全な解決が得られている:

$$\sup_{f \in S} |\alpha_n| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 2^n}{(n+1)!} \quad (n \geq 2).$$

他方, $\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n|$ に関しては, まだ完全な解決は得られていない. Springer [8] は $\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_1| = 1$ を証明し, また次の予想を述べた:

$$g_p(z) = z(1+z^{-p})^{\frac{2}{p}} \quad (p: \text{正の整数})$$

の逆関数を

$$\phi_p(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(p)} w^{-n}$$

とおくとき,

$$\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_n| = -c_n^{(p)},$$

ここで p は $n+1$ の最小素約数である。

この予想が $n=1, 2$ のとき正しいことは $\beta_1 = -b_1$, $\beta_2 = -b_2$ より明らかである。また $n=5, 7, 9$ のときこの予想が正しいことは [4] で証明されている。いろいろな考察から n が奇数

のとき予想

$$\sup_{g \in \Sigma_0} |\beta_{2k-1}| = -c_{2k-1}^{(2)} = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}$$

は正しいように思われる。一方 $n=4$ のとき、関数

$$g(z) = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \quad (\cos \alpha = -\frac{1}{4})$$

の逆関数を考えると

$$\beta_4 = \frac{2}{5} + \frac{3}{8} > \frac{2}{5} = -c_4^{(5)}$$

となりこの予想は正しくない。

ここでは Σ_0 のある部分族 Σ_0^* を考え、 $\sup_{g \in \Sigma_0^*} |\beta_n|$ を問題にする。

定義. $g(z) \in \Sigma_0$ かつ、 $w = g(z)$ による $\{z \mid |z| > 1\}$ の像領域の補集合が $w=0$ に関して starlike となるような関数 $g(z)$ の族を Σ_0^* とおく。

このとき、 $\sup_{g \in \Sigma_0^*} |\beta_n| = \sup_{g \in \Sigma_0^*} \operatorname{Re} \{\beta_n\}$ であるから以後

$$(1) \quad \sup_{g \in \Sigma_0^*} \operatorname{Re} \{\beta_n\}$$

を問題にする。

Σ_0^* は compact であるから極値問題(1)の極値関数(すなわち値 $\sup_{g \in \Sigma_0^*} \operatorname{Re} \{\beta_n\}$ を達成するような関数)は存在する。ま

は Nehari-Netanyahu の論文 [6] における同じ論法によって極値関数 $g(z)$ は

$$(2) \quad g(z) = z \prod_{\nu=1}^{n+1} (1 - e^{i\theta_\nu} z^{-1})^{\mu_\nu}, \quad \mu_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} \mu_\nu = 2$$

の形をしていることがわかる。

ここでは Σ_0^* の中で変分を考え、極値関数に関する別の必要条件を与える。

定理. $g(z)$ が極値問題 (1) の極値関数ならば、微分方程式

$$(3) \quad \frac{zg'(z)}{g(z)} \left(zF_n(z) - \lambda z + \frac{\bar{\lambda}}{z} - \frac{1}{z} \overline{F_n\left(\frac{1}{z}\right)} \right) \\ = \frac{1}{n} z^2 F_n'(z) - \lambda z + (n+1)\beta_n - \frac{\bar{\lambda}}{z} + \frac{1}{n} \frac{1}{z^2} \overline{F_n'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

をみたす。ここで $F_n(z)$ は $g(z)$ の逆関数 $\phi(w)$ の Faber 多項式

$$\log \frac{\phi(w) - t}{w} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n(t) w^{-n}$$

であり、 λ はある定数である。

2. $f(z) \in S$ かつ $w=f(z)$ による $\{z \mid |z| < 1\}$ の像領域が $w=0$ に関して starlike であるような関数 $f(z)$ の族を S^* とおき、さらに $f(z) \in S^*$ かつ $a_2=0$ となるような関数 $f(z)$ の

族を S_0^* とおくことにする。 $g(z) \in \Sigma_0^*$ と $f(z) = 1/g(1/z) \in S_0^*$ とは同値であるから、 Σ_0^* の代りに S_0^* の中で変分を考える。

Hummel [2], [3] は S^* の中で次のような変分を考えている。 $f(z)$ を S^* の元とする。 $w = f(z)$ による $\{z \mid |z| < 1\}$ の像領域を D とおき、 D の境界を C とおく。 $f(z)$ の逆写像を $\varphi(w)$ とおき、 w_0 を D 内の一点、 α を $|\alpha| = 1$ なる複素数、 ε を正の実数とすると、

$$w^* = w \left\{ 1 + \varepsilon \left(\alpha \frac{1 - \overline{\varphi(w_0)} \varphi(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} + \overline{\alpha} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{1 - \overline{\varphi(w_0)} \varphi(w)} \right) \right\}$$

による C の像を C^* とおくと、 C^* は *starlike* なある単連結領域 D^* の境界になる。 そこで $\{z \mid |z| < 1\}$ を D^* に等角に写す関数

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

を考え

$$f^*(z) = \frac{F(z)}{A_1} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^* z^n$$

とおくと $f^*(z) \in S_0^*$ となり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $f^*(z) \rightarrow f(z)$ となるような S_0^* 内の関数族が得られる。

そこで、 $f(z) \in S_0^*$ から S_0^* に属する $f^*(z)$ を得るために、

$$w^* = w \left\{ 1 + \varepsilon \sum_{v=1}^2 \left(\alpha x_v \frac{1 - \overline{\varphi(w_0)} \varphi(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} + \overline{\alpha} \overline{x_v} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{1 - \overline{\varphi(w_0)} \varphi(w)} \right) \right\}$$

と考へ、 $w_v \in D$ および複素数 x_v と適当にとつて、 $f^*(z) \in S_0^*$ とするよゝにする。

$g(z)$ と極値問題 (1) の極値関数とする。 $g(z)$ の逆関数と

$$(4) \quad \phi(w) = w + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^{-n}$$

とおき、 $f(z) = 1/g(\frac{1}{z})$ 、さらに $f(z)$ の逆関数と $\rho(w)$ とおく。

$g(z)$ は (2) の形をしてゐるから $\rho(w)$ は $w = f(z)$ による $\{z \mid |z| < 1\}$ の像領域 D の境界 C 上まで、有限個の点を除いて解析的に接続できる。そこで

$$(5) \quad w^* = w + \varepsilon v(w),$$

$$(6) \quad v(w) = w \sum_{v=1}^2 \left(\alpha x_v \frac{1 - \overline{\rho(w_v)} \rho(w)}{\rho(w) - \rho(w_v)} + \bar{\alpha} \bar{x}_v \frac{\rho(w) - \rho(w_v)}{1 - \overline{\rho(w_v)} \rho(w)} \right)$$

($\varepsilon > 0$, $|\alpha| = 1$, $w_v \in D$, x_v : 複素数)

による C の像を C^* とおき、 C^* を境界とする starlike 単連結領域を D^* とおくと、[1] の理論を適用することによつて、 D^* は $\{z \mid |z| < 1\}$ に等角に写し、 $w=0$ と $z=0$ に写す写像は

$$(7) \quad e^{i\theta} \rho(w) (1 - \varepsilon g(w) + o(\varepsilon)) \equiv e^{i\theta} \rho^*(w)$$

で与えられることが分かる。ただし

$$(8) \quad g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\rho'(x)^2 v(x)}{\rho(x)(\rho(x) - \rho(w))} dx + \overline{\left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\rho'(x)^2 v(x)}{\rho(x)(1 - \overline{\rho(w)} \rho(x))} dx \right)} \rho(w),$$

ここで Γ は w を含む D のある部分領域 Δ の境界で、有限個の解析曲線から成る、というものとす。

$$(9) \quad \tilde{\phi}(w) = \frac{1}{\phi^*\left(-\frac{1}{w}\right)} = cw + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}$$

とおく

$$(10) \quad \phi^*(w) = \tilde{\phi}\left(\frac{w}{c}\right) = w + \beta_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* w^{-n}$$

とおく $\phi^*(w)$ は Σ に属する starlike である関数 $f^*(z)$ の逆関数に属する。(7), (9) より

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \zeta^{n-1} \tilde{\phi}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{1}{w^{n+1} \phi^*(w)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{1}{w^{n+1} \phi(w)} \{1 + \varepsilon g(w) + o(\varepsilon)\} dw \\ &= \beta_n + \varepsilon \gamma_n + o(\varepsilon) \quad (n \geq -1), \end{aligned}$$

さらに

$$(11) \quad \gamma_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{n+1} \phi(w)} dw \quad (n \geq -1)$$

である、 $c_{-1} = c$, $\beta_{-1} = 1$ である。従って、(10) より

$$(12) \quad \beta_0^* = \varepsilon \gamma_0 + o(\varepsilon)$$

$$(13) \quad \beta_n^* = \beta_n + \varepsilon (\gamma_n + n \gamma_{-1} \beta_n) + o(\varepsilon)$$

を得る。

そこで $\beta_0^* = 0$ とするよう x_ν, w_ν をとり, 任意 $\alpha \in \mathbb{C}$, α に対して不等式

$$\operatorname{Re} \{\beta_n^*\} \leq \operatorname{Re} \{\beta_n\}$$

が成り立つことより, 極値関数 $g(z)$ がみたすべき微分方程式を導く。

3. $\gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n$ ($n \geq 0$) の計算

(8) に (6) を代入して $z=w, w_\nu$ における留数を計算することにして,

$$\begin{aligned} g(z) = \sum_{\nu=1}^2 \left[(1-|\varphi(w_\nu)|^2) \left\{ \alpha x_\nu \frac{w \varphi'(w)}{\varphi(w)(\varphi(w)-\varphi(w_\nu))} + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \frac{w \varphi'(w)}{\overline{\varphi(w_\nu)} \varphi(w)(1-\overline{\varphi(w_\nu)} \varphi(w))} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha x_\nu \frac{w_\nu \varphi'(w_\nu) \varphi(w)}{\varphi(w_\nu)^2 (\varphi(w)-\varphi(w_\nu))} + \alpha x_\nu \frac{w_\nu \varphi'(w_\nu)}{\varphi(w_\nu)^2} + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \frac{\overline{w_\nu \varphi'(w_\nu)} \varphi(w)}{\overline{\varphi(w_\nu)} (1-\overline{\varphi(w_\nu)} \varphi(w))} \right\} \right. \\ \left. - \frac{w \varphi'(w)}{\varphi(w)} \left\{ \alpha x_\nu \overline{\varphi(w_\nu)} + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \frac{1}{\overline{\varphi(w_\nu)}} \right\} \right] \end{aligned}$$

を得る。次にこれを (11) に代入し

$$\varphi(w) = 1/\phi(\zeta), \quad w = 1/\zeta, \quad w_\nu = 1/\zeta_\nu$$

を用いると

$$\begin{aligned} \gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n &= \sum_{\nu=1}^2 \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2} \left[\frac{\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^n \phi'(\zeta) \phi(\zeta)}{\phi(\zeta_\nu) - \phi(\zeta)} d\zeta \right. \\ (14) \quad &+ \frac{\bar{\alpha} \bar{x}_\nu \overline{\phi(\zeta_\nu)}^2}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^n \phi'(\zeta) \phi(\zeta)}{\overline{\phi(\zeta_\nu)} \phi(\zeta) - 1} d\zeta - \frac{\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) \phi(\zeta_\nu)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^{n-1} \phi(\zeta)}{\phi(\zeta_\nu) - \phi(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

$$+ \alpha x_\nu \beta_n \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) + \frac{\bar{\alpha} \bar{x}_\nu \bar{\zeta}_\nu \overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta^{n-1} \phi(\zeta)}{\overline{\phi(\zeta_\nu)} \phi(\zeta) - 1} d\zeta \\ + n \beta_n \left\{ -\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu) + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \overline{\phi(\zeta_\nu)} + \alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) \right\}]$$

を得る。ここで Faber 多項式を導入する。 $\phi(\zeta)$ に対して

$$(15) \quad \log \frac{\phi(\zeta) - t}{\zeta} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(t) \zeta^{-m}$$

で定義される多項式 $F_m(t)$ を $\phi(\zeta)$ の Faber の多項式という。

(15) の両辺を t でおびらで微分することにより、

$$(16) \quad \frac{1}{\phi(\zeta) - t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F'_m(t) \zeta^{-m}$$

$$(17) \quad \frac{\zeta \phi'(\zeta)}{\phi(\zeta) - t} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) \zeta^{-m}$$

を得る。従って、 $n \geq 1$ のとき、(14) はこの Faber 多項式を

用いて

$$(18) \quad \sigma_n + n \sigma_{-1} \beta_n = \sum_{\nu=1}^2 \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2} \\ \times \left[\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) \phi(\zeta_\nu) \left\{ \frac{1}{n+1} F'_{n+1}(\phi(\zeta_\nu)) + \frac{\beta_1}{n-1} F'_{n-1}(\phi(\zeta_\nu)) + \dots + \frac{\beta_k}{n-k} F'_{n-k}(\phi(\zeta_\nu)) \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \beta_{n-1} F'_1(\phi(\zeta_\nu)) + \frac{(n+1)\beta_n}{\phi(\zeta_\nu)} \right\} \right. \\ \left. + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \bar{\zeta}_\nu \frac{\overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}} \left\{ \frac{1}{n+1} F'_{n+1}\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\right) + \frac{\beta_1}{n-1} F'_{n-1}\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta_k}{n-k} F'_{n-k}\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\right) + \dots + \beta_{n-1} F'_1\left(\frac{1}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}}\right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu) \left\{ F_{n+1}(\phi(\zeta_\nu)) + \beta_1 F_{n-1}(\phi(\zeta_\nu)) + \cdots + \beta_k F_{n-k}(\phi(\zeta_\nu)) \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \beta_{n-1} F_1(\phi(\zeta_\nu)) + (n+1)\beta_n \right\} \\
& + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \overline{\phi(\zeta_\nu)} \left\{ F_{n+1}\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right) + \beta_1 F_{n-1}\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right) + \cdots + \beta_k F_{n-k}\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right) \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \beta_{n-1} F_1\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right) + (n+1)\beta_n \right\} \Big]
\end{aligned}$$

と表わされる。ところで、(16), (17) の両辺の ζ^{-n} の係数を比較することによって、

$$\frac{1}{n+1} F'_{n+1}(x) + \frac{\beta_1}{n-1} F'_{n-1}(x) + \cdots + \beta_{n-1} F'_1(x) = \frac{x}{n} F'_n(x),$$

$$F_{n+1}(x) + \beta_1 F_{n-1}(x) + \cdots + \beta_{n-1} F_1(x) + (n+1)\beta_n = x F_n(x)$$

を得る。したがって (18) は

$$\begin{aligned}
\gamma_n + n\gamma_{-1}\beta_n &= \sum_{\nu=1}^2 \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2} \\
&\times \left[\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) \left\{ \frac{\phi(\zeta_\nu)^2 F'_n(\phi(\zeta_\nu))}{n} + (n+1)\beta_n \right\} + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \overline{\zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu)} \frac{F'_n\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right)}{n \phi(\zeta_\nu)^2} \right. \\
&\quad \left. - \alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)^2 F_n(\phi(\zeta_\nu)) + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \overline{F_n\left(\frac{1}{\phi(\zeta_\nu)}\right)} \right]
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
(19) \quad T(\zeta) &= \frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2} \left[\zeta \phi'(\zeta) \left\{ \frac{1}{n} \phi(\zeta)^2 F'_n(\phi(\zeta)) + (n+1)\beta_n + \frac{1}{n \phi(\zeta)^2} \overline{F'_n\left(\frac{1}{\phi(\zeta)}\right)} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \phi(\zeta)^2 F_n(\phi(\zeta)) + \overline{F_n\left(\frac{1}{\phi(\zeta)}\right)} \right]
\end{aligned}$$

とおく

$$(20) \quad \operatorname{Re} \{ \sigma_n + n \sigma_{-1} \beta_n \} = \operatorname{Re} [\alpha \{ x_1 T(\zeta_1) + x_2 T(\zeta_2) \}]$$

を得る。

同様にして

$$\sigma_0 = \sum_{\nu=1}^2 \frac{|\phi(\zeta_\nu)|^2 - 1}{|\phi(\zeta_\nu)|^2} \left[\alpha x_\nu \zeta_\nu \phi'(\zeta_\nu) \phi(\zeta_\nu) + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \bar{\zeta}_\nu \frac{\overline{\phi'(\zeta_\nu)}}{\overline{\phi(\zeta_\nu)}} - \alpha x_\nu \phi(\zeta_\nu)^2 + \bar{\alpha} \bar{x}_\nu \right]$$

を得る。従って

$$(21) \quad \begin{aligned} A(\zeta) &= \frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2} \{ \zeta \phi'(\zeta) \phi(\zeta) - \phi(\zeta)^2 \}, \\ B(\zeta) &= \frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2} \left\{ \zeta \frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} + 1 \right\} \end{aligned}$$

とおく

$$(22) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \sigma_0 \} &= \operatorname{Re} [\alpha \{ x_1 (A(\zeta_1) + B(\zeta_1)) + x_2 (A(\zeta_2) + B(\zeta_2)) \}], \\ \operatorname{Im} \{ \sigma_0 \} &= \operatorname{Im} [\alpha \{ x_1 (A(\zeta_1) - B(\zeta_1)) + x_2 (A(\zeta_2) - B(\zeta_2)) \}] \end{aligned}$$

を得る。

4. 次に, $\beta_0^* = 0$ となるように x_ν, w_ν をとることにし,
て (13), (20) から微分方程式を得る議論を行う。

(I) $\frac{1}{\zeta_0} \in D$ かつ $|A(\zeta_0)| \neq |B(\zeta_0)|$ なる ζ_0 が存在する場合。

このとき, ζ_2 とし ζ_0 ととり, ζ_1 とし $\frac{1}{\zeta} \in D$ なる任意の ζ
をとる。このとき $\beta_0^* = 0$ となるためには,

$$x_1 = 1 + o(1),$$

$$(23) \quad x_2 = \frac{1}{|A_0|^2 - |B_0|^2} \{ -\bar{A}_0 A(\zeta) + \bar{B}_0 B(\zeta) + \alpha^2 (\bar{B}_0 \overline{A(\zeta)} - \bar{A}_0 \overline{B(\zeta)}) \} + o(1)$$

とおけばよい。これに $A_0 = A(\zeta_0)$, $B_0 = B(\zeta_0)$.

このとき, $g^*(z) \in \Sigma_0^*$ とするから

$$\operatorname{Re} \{ \beta_n^* \} \leq \operatorname{Re} \{ \beta_n \}.$$

よって (13) より

$$\operatorname{Re} \{ x_n + n x_{-1} \beta_n + o(1) \} \leq 0.$$

従って, (20) より

$$\operatorname{Re} \{ \alpha x_1 T(\zeta) + \alpha x_2 T_0 + o(1) \} \leq 0$$

これに, $T_0 = T(\zeta_0)$. したがって (23) を代入すると

$$\operatorname{Re} \left[\alpha T(\zeta) + \frac{1}{|A_0|^2 - |B_0|^2} \{ \alpha (-\bar{A}_0 A(\zeta) + \bar{B}_0 B(\zeta)) T_0 + \alpha^2 (\bar{B}_0 \overline{A(\zeta)} - \bar{A}_0 \overline{B(\zeta)}) T_0 \} + o(1) \right] \leq 0.$$

そこで

$$\lambda = \frac{\bar{A}_0 T_0 - B_0 \bar{T}_0}{|A_0|^2 - |B_0|^2}$$

とおくと

$$\operatorname{Re} [\alpha \{ T(\zeta) - \lambda A(\zeta) - \bar{\lambda} B(\zeta) \} + o(1)] \leq 0$$

を得る。ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\operatorname{Re} [\alpha \{ T(\zeta) - \lambda A(\zeta) - \bar{\lambda} B(\zeta) \}] \leq 0$$

となり, α が $|\alpha|=1$ なる任意の複素数であることから微分

程式

$$T(\zeta) - \lambda A(\zeta) - \bar{\lambda} B(\zeta) = 0$$

を得る。ところで

$$\frac{|\phi(\zeta)|^2 - 1}{|\phi(\zeta)|^2} \neq 0 \quad (\zeta \in D)$$

であるから、この方程式より

$$\begin{aligned} \zeta \phi'(\zeta) \left\{ \frac{1}{n} \phi(\zeta)^2 F_n'(\phi(\zeta)) - \lambda \phi(\zeta) + (n+1) \beta_n - \frac{\bar{\lambda}}{\phi(\zeta)} + \frac{1}{n} \frac{1}{\phi(\zeta)^2} \overline{F_n'(\frac{1}{\phi(\zeta)})} \right\} \\ - \phi(\zeta) \left\{ \phi(\zeta) F_n(\phi(\zeta)) - \lambda \phi(\zeta) + \frac{\bar{\lambda}}{\phi(\zeta)} - \frac{1}{\phi(\zeta)} \overline{F_n(\frac{1}{\phi(\zeta)})} \right\} = 0 \end{aligned}$$

を得る。これを $g(z)$ に変換する微分方程式に書きなおすことに
よって定理の微分方程式 (3) を得る。

(II) $\frac{1}{\zeta} \in D$ なる任意の ζ に対して $|A(\zeta)| = |B(\zeta)|$ となる場合。

このとき、

$$\zeta \phi'(\zeta) \phi(\zeta) - \phi(\zeta)^2 = e^{i\theta} \left(\zeta \frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} + 1 \right)$$

であるから、極値関数 $g(z)$ は

$$(z^2 + e^{i\theta}) g'(z) = (z - e^{i\theta} z^{-1}) g(z)$$

をみたす。これを $g(z) = z + b_1 z^{-1} + \dots$ と代入して

$$z^2 + (e^{i\theta} - b_1) + \dots = z^2 + (b_1 - e^{i\theta}) + \dots$$

より、 $b_1 = e^{i\theta}$ 。従って、

$$g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$$

を得る。ところで, $g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$ の逆関数は

$$\phi(w) = w - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} e^{ik\theta} w^{-(2k-1)}$$

であるから, n が偶数 n とし $g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$ は (1) の極値関数ではあり得ない。また $n = 2k-1$ とし $g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$ が (1) の極値関数ならば,

$$\theta = \frac{\pi}{k} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

でなければならぬ。 $g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$ の逆関数の Faber 多項式は

$$F_{2k-1}(z) = z^{2k-1} + e^{i\theta} \binom{2k-3}{2k-1} z^{2k-3} + \dots + e^{i\theta} \binom{2k-2\lambda-1}{2k-1} z^{2k-2\lambda-1} \\ + \dots + e^{i(k-1)\theta} \binom{2k-1}{k-1} z$$

であるから $g(z) = z + e^{i\theta} z^{-1}$, $\theta = \frac{\pi}{k} + 2m\pi$ は $\lambda = 0$ の微分方程式 (3) をみたす。

以上より定理は証明された。

5. $n=4$ のとき微分方程式 (3) は

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} \left(z^5 + 4b_1 z^3 + 4b_2 z^2 + (4b_3 + 6b_1^2 - \lambda)z - (4b_3 + 6b_1^2 - \bar{\lambda})z^{-1} - 4b_2 z^{-2} - 4b_1 z^{-3} - z^{-5} \right) \\ = z^5 + 2b_1 z^3 + b_2 z^2 - \lambda z - 5(b_4 + 3b_1 b_2) - \bar{\lambda} z^{-1} + \bar{b}_2 z^{-2} + 2\bar{b}_1 z^{-3} + z^{-5}$$

となる。 §1 の逆関数

$$g(z) = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{z}\right)^{\frac{4}{5}} \quad (\cos \alpha = -\frac{1}{4})$$

は Σ_0^* に属し, か, $\lambda = \frac{9}{16}$ のこの微分方程式をみたす。この事実と, 他のいろいろな考察から

$$\sup_{g \in \Sigma_0^*} |g_4| = \frac{2}{5} + \frac{3}{8}$$

と思われる。

参考文献

- [1] P. L. Duren and M. Schiffer, The theory of the second variation in extremal problems for univalent functions. J. Analyse Math. 10 (1962/63) 193~252.
- [2] J. A. Hummel, A variational method for starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) 82~87.
- [3] J. A. Hummel, Extremal problems in the class of starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 741~747.
- [4] Y. Kubota, Coefficients of meromorphic univalent functions. Kōdai Math. Sem. Rep. 28 (1977) 253~261.
- [5] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I. Math. Ann. 89

(1923) 103~121.

- [6] Z. Nehari and E. Netanyahu, On the coefficients of meromorphic schlicht functions. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 15~23.
- [7] Ch. Pommerenke, Univalent functions. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1975.
- [8] G. Springer, The coefficients problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle. Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 421~450.