

数論幾何における STIEFEL-WHITNEY 類

斎藤 毅 (東大 数理)

トポロジーにおいて、ベクトル束の特性類は重要な役割を果たしているが、数論幾何でも、同じように ℓ 進層の特性類を考えることができる。ここでは Stiefel-Whitney 類とよばれる特性類について考える。

0. 特性類とは.

位相空間 S 上の複素ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その Chern 類 $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(S, \mathbb{Z})$ が定義される。同様に、実ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その Stiefel-Whitney 類 $sw_i(\mathcal{E}) \in H^i(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。実ベクトル束とは、複素ベクトル束に実構造が与えられたものと考え、さらに実構造とは非退化対称双一次形式のことと解釈すると、非退化対称双一次形式をもつベクトル束 $(\mathcal{E}, q)$ に対し、その Stiefel-Whitney 類が定義される。

0.1 直交 Galois 表現の Stiefel-Whitney 類.

位相空間をスキームで、ベクトル束を smooth ℓ 進層で、コホモロジーをエタール・コホモロジーで置き換えると、次のようになる。 $\mathcal{F}$ をスキーム S 上の smooth ℓ 進層で、非退化対称双一次形式をもつものとする、その Stiefel-Whitney 類

$$sw_i(\mathcal{F}) \in H^i(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

が定義される。ただし S 上 2 と素数 ℓ は可逆と仮定する。

以下簡単のため S は体 $K \ni \frac{1}{2\ell}$ のスペクトル $\text{Spec } K$ とする。 G_K を K の絶対 Galois 群 $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ とする。このとき $\text{Spec } K$ 上の smooth ℓ 進層で非退化対称双一次形式をもつものとは、連続 ℓ 進直交表現 $G_K \rightarrow O(V, b)$ のことである。ここで b は有限次元 ℓ 進線型空間 V 上の非退化対称双一次形式で $O(V, b) = \{g \in GL(V) | b(gx, gy) = b(x, y)\}$ はその直交群である。エタール・コホモロジーは Galois コホモロジー $H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^i(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である。

ℓ 進直交表現 $\rho: G_K \rightarrow O(V, b)$ に対し、Stiefel-Whitney 類 $sw_i(V) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ($i = 1, 2$) は次のように定義される。

定義 1. G_K の指標 $\det \rho: G_K \rightarrow \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定める $\text{Hom}(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元を V の第 1 Stiefel-Whitney 類とよび、

$$sw_1(V) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

と書く。

第 2 Stiefel-Whitney 類は、Clifford 環からえられる代数群の中心拡大

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{O}(V, b) \rightarrow O(V, b) \rightarrow 1$$

を使って次のように定義される。必要なら V の係数体を有限次拡大することにより ρ の像は $\tilde{O}(V, b)$ の有理点の像に含まれると仮定してよい。するとこの中心拡大を ρ でひきもどすことによって G_K の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による中心拡大がえられる。

定義 2. この中心拡大の類が定める $H^2(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元を V の第 2Stiefel-Whitney 類とよび,

$$sw_2(V) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

と書く。

0.2 エタール・コホモロジーの Stiefel-Whitney 類.

代数幾何から次のようにして、Galois 群 G_K の直交表現が生じる。 X を K 上定義された proper smooth な偶数 n 次元の scheme とする。このとき cup 積は中間次元のコホモロジーに非退化対称双一次形式

$$\cup: H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \times H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

を定める。ここで $\mathbb{Q}_\ell(-n)$ は円分指標 $G_K \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times$ の $-n$ 乗が定める 1 次元表現を表わす。これは $V = H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ 上の非退化対称双一次形式をひきおこす。これは Galois 群 G_K の作用と両立するから $G_K \rightarrow O(V)$ が定まる。 $V = H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ の Stiefel-Whitney 類

$$sw_1(H_\ell^n(X/K)), \quad sw_2(H_\ell^n(X/K))$$

を調べよというのが基本的な問題である。

K が有限体のときは $H^1(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、 $sw_1(H_\ell^n(X/K))$ は Frobenius Fr_K の $H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ への作用の固有値 -1 の重複度の偶奇で定まる。したがって Tate 予想を仮定すれば、これは $X_{\bar{K}}$ の代数的サイクルのうち、 K の 2 次拡大上定義されるが K 上定義されない部分の階数の偶奇と一致する。

K が $\mathbb{C}$ でない局所体のときは $H^2(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり。このとき第 2Stiefel-Whitney 類 $sw_2(H_\ell^n(X/K))$ は Hasse-Weil L 関数の関数等式の定数項の積公式に現れる局所 ϵ 因子の符号と関係している。[D], [S4]

0.3 de Rham コホモロジーと Hasse-Witt 類.

Stiefel-Whitney 類を調べるには de Rham コホモロジーの対応する特性類と比較するのがよいと考えられる。

一般に (D, b) を (標数が 2 でない) 体 K 上の有限次元線型空間 D 上の非退化対称双一次形式 b とすると、その不変量 $hw_i(D) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が次のように定義される。Kummer 理論により同型 $K^\times/K^{\times 2} \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。この同型による $a \in K^\times$ の像を $\{a\} \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ で表わす。また cup 積を $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ で表わす。 D の直交基底 $\{x_1, \dots, x_n\}$ をとり、 $a_i = b(x_i, x_i) \in K^\times$ とおく。すると $d = \sum_i \{a_i\} \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は直交基底のとり方によらず D の不変量を定める。これを D の判別式とよび $hw_1(D) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とかく。また $\sum_{i < j} \{a_i, a_j\} \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ も直交基底のとり方によらず D の不変量を定める。これを D の Hasse-Witt 不変量とよび $hw_2(D) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とかく。その不変量 $hw_i(D) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が次のように定義される。

X を K 上定義された proper smooth な偶数 n 次元の scheme とする。このとき cup 積は中間次元のコホモロジーに非退化対称双一次形式

$$\cup: H_{dR}^n(X/K) \times H_{dR}^n(X/K) \rightarrow K$$

を定める。したがってその不変量 $hw_i(H_{dR}^n(X/K), \cup) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。

1. 第1Stiefel-Whitney 類と判別式.

1.1 定理. 第1Stiefel-Whitney 類は次のように決定される.

定理 1. [S3 定理 2] X を標数が 2 でない体 K 上の射影的な smooth 偶数 n 次元の scheme とする. $b_q = \dim_K H_{dR}^q(X/K)$,

$$r_0 = \begin{cases} -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_{n-2} & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき,} \\ -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_n & n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく. ℓ を K の標数とは異なる素数とすると

$$sw_1(H_\ell^n(X/K)) = hw_1(H_{dR}^n(X/K)) + r_0\{-1\}$$

がなりたつ.

証明の方針は次のとおりである. 特殊化と Chebotarev 密度定理により K が有限体の場合に帰着する. Lefschetz ペンシルをとって ε 因子の積公式と vanishing cycle の Picard-Lefschetz 公式を適用することにより、2 次超曲面の場合に帰着させて証明する.

この定理の応用として, Ogus による cristalline 判別式についての予想 ([Ogus] 予想 3.11) が基礎体 K が $\mathbb{F}_{p^2}$ を含まないという仮定のもとで証明できる.

1.2 偶数次元の Bloch の導手公式 mod 2.

定理 1 には Bloch の導手公式への次のような応用がある. Bloch の導手公式について簡単に復習する. K を局所体とし、 X を K 上の proper smooth な n 次元の多様体とする. X_O を整数環 O_K 上の正則なモデルとする. このとき Artin 導手を次の式で定義する

$$\text{Art}(X_O/O_K) = \chi(X_{\bar{K}}) - \chi(X_{\bar{F}}) + \text{Sw}H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

ここで $\chi(X_{\bar{K}}), \chi(X_{\bar{F}})$ はそれぞれ生成ファイバーと閉ファイバーの ℓ 進 Euler 数であり、 $\text{Sw}H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は G_K の ℓ 進表現 $H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の Swan 導手の交代和である. この交代和が素数 $\ell \neq \text{char} F$ のとりかたによらないことは alteration を使って落合君によって示されている [Ochi]。

Bloch は微分の層 Ω_{X_O/O_K}^1 の局所化された chern 類を使って標準類 $(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}) = (-1)^{n+1} c_{n+1}(\Omega_{X_O/O_K}^1)$ を閉ファイバー X_F に台を持つ 0 サイクルとして定義した. そして次の予想を定式化した.

予想 (Bloch の導手公式). [B]

$$\text{Art}(X_O/O_K) = -\deg(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}).$$

これは X が K の有限次拡大のときは古典的な導手と共役差積の公式である. Bloch は X が代数曲線のときにこれを証明した [B]. X が楕円曲線のときはこれは Tate-Ogg の導手と判別式の関係式を導く [Ogg], [S1]。

X が一般次元のときは導手公式は証明されていないが、偶数次元のときには定理 1 を使うと次が示せる。

定理 2. [S6] X を標数が 2 でない局所体 K 上の射影的で smooth な偶数 n 次元の多様体とし, X_O をその正則モデルで, 閉ファイバー X_F の被約化が正規交叉因子をもつものとする. このとき

$$\text{Art}(X_O/O_K) \equiv -\deg(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}) \pmod{2}$$

がなりたつ.

証明の方針は次のとおりである. 直交表現の Artin 導手についての Serre の定理 [Se1] と, vanishing cycle の計算により, 左辺 $\text{Art}(X_O/O_K)$ は行列式指標の Artin 導手 $\text{Art}(H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ と $\text{mod } 2$ で等しい. 一方右辺は [S2] の結果により de Rham コホモロジー $H_{dR}^n(X/K)$ の判別式の付値と $\text{mod } 2$ で等しい. 定理 1 により行列式指標 $H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と de Rham コホモロジー $H_{dR}^n(X/K)$ の判別式の間関係がわかっている. 従ってこれから定理 2 が従う.

2. 第 2Stiefel-Whitney 類と Hasse-Witt 不変量.

2.1 記号. 予想を述べるために記号をいくつも導入する. X を標数が 2 でない体 K 上の smooth な偶数 n 次元の射影的 scheme とする. 1 と同様に $b_q = \dim_K H_{dR}^q(X/K)$,

$$r_0 = \begin{cases} -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_{n-2} & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき,} \\ -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_n & n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく. 各偶数 q に対し $e_q = \text{sw}_1(H_\ell^q(X/K)) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を第 1Stiefel-Whitney 類とし

$$\begin{aligned} d &= hw_1(H_{dR}^n(X/K)), \\ e &= \begin{cases} e_0 + e_2 + e_4 + \cdots + e_{n-2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4} \\ e_0 + e_2 + e_4 + \cdots + e_{n-2} + e_n & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とおく. $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元 c_ℓ を K の標数が正または $\ell = 2$ なら 0 とし, K の標数が 0 で $\ell \neq 2$ なら $H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = {}_2\text{Br}(\mathbb{Q})$ の 2 と ℓ だけで分岐するただ 1 つの元の像として定義する. 最後に

$$h = \sum_{q < \frac{n}{2}, q \not\equiv \frac{n}{2} \pmod{2}} \dim_K H^q(X, \Omega_{X/K}^{n-q})$$

とおく.

2.2 予想. このとき次が予想される.

予想. X を標数が 2 でない体 K 上の射影的で smooth な偶数 n 次元の scheme とする. ℓ を K の標数と異なる素数とすると

$$\begin{aligned} & \text{sw}_2(H_\ell^n(X/K)) - hw_2(H_{dR}^n(X/K)) \\ & \stackrel{?}{=} \{2, d\} + h \cdot c_\ell + \{e, -1\} + \begin{cases} 0 & r \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき} \\ \{-d, -1\} & r \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき} \\ \{-1, -1\} & r \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき} \\ \{d, -1\} & r \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

がなりたつだろう.

$n = 0$ のときは, これは

定理 [Se2] Theorem 1. L を K の有限次拡大とすると,

$$sw_2(\text{Ind}_{G_L}^{G_K} \mathbb{Q}) = hw_2(L, \text{Tr}_{L/K} x^2) + \{2, d\}.$$

そのものである.

2.3 予想が示せる場合. 予想が示される場合を挙げておく [S5]. $K \supset \bar{\mathbb{Q}}$ ならば $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K))$ で恒に正しい. これは $K \supset \mathbb{C}$ の場合に帰着し, 超越的な議論によって示せる.

$K = \mathbb{R}$ の場合も Hodge 構造の偏極を使って示される.

K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体で X が整数環 O_K 上 good reduction をもつとする. $p \neq 2, \ell$ なら, $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K)) = 0$ で正しい. したがって X が K の奇数次拡大上 good reduction をもつときもそうである. $\ell = p \neq 2$ のときも, $p-1 > n$ で p が K の素元なら $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K)) + h \cdot c_\ell$ で正しいことが p 進 Hodge 理論を使って示せる [S4].

K が代数体のときは Hasse 原理より局所体の場合に帰着される.

X が smooth 超曲面のときには, 上の結果から大域的な議論によって, 予想の式の両辺の差が, $\{2, d\}$ かまたは 0 であることが示される.

REFERENCES

- [B] S.Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Proc. Symp. Pure Math. **46 Part 2** (1987), AMS, 421-450.
- [D] P.Deligne, *Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale.*, Invent. Math. **35** (1976), 299-316.
- [EKV] H.Esnault, B.Kahn and E.Vieheweg, *Coverings with odd ramification and Stiefel-Whitney classes*, J. für Reine und Angew. **441** (1993), 145-188.
- [Ochi] T.Ochiai, *ℓ -independence of the trace of monodromy*, 東大 修士論文.
- [Ogg] A.Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. of Math. **89** (1967), 1-21.
- [Ogus] A.Ogus, *Hodge cycles and crystalline cohomology*, in Spr. LNM, vol. 900, Springer, 1982, pp. 357-414.
- [S1] T.Saito, *Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces*, Duke Math. J. **57** (1988), 151-173.
- [S2] ———, *Self-intersection 0-cycles and coherent sheaves on arithmetic schemes*, Duke Math. J. **57** (1988), 555-578.
- [S3] ———, *Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant, and the determinant of ℓ -adic cohomologies*, J. of Alg. Geom. **3** (1994), 411-434.
- [S3'] ———, *Determinant representation, Jacobi sum and de Rham discriminant*, 数理研講究録 **844** (1993), 79-83.
- [S4] ———, *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive*, Invent. Math. **120** (1995), 119-142.
- [S4'] ———, *Hasse-Weil L 関数の関数等式の符号*, 数理研講究録 **925** (1995), 159-165.
- [S5] ———, *Note on Stiefel-Whitney class of ℓ -adic cohomology (preprint)*.
- [S6] ———, *Parity in Bloch's conductor formula in even dimension (preprint)*.
- [Se1] J.-P.Serre, *Conducteurs d'Artin des caracteres réels*, Inventiones Math. **14** (1971), 173-183.
- [Se2] ———, *L'invariant de Witt de la forme $\text{Tr}(x^2)$* , Comm. Math. Helv. **59** (1984), 651-676.