

非線形境界値問題の大域的解構造の解明 — 数式処理による超越方程式への帰着と解析 —

龍谷大学・理工学部 四ツ谷晶二 (Shoji Yotsutani)

Fuculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1 はじめに

非線形境界値問題の大域的解構造の解明は最も基本的ながら難しい問題である。なぜならば、これが分かるということは、問題に含まれるパラメータをいかように与えても、そのパラメータ値においての、解の存在・非存在・一意性・多重度に関して的確に解答を与えることができることを意味するからである。

過去に多くの研究があるよく知られた境界値問題であっても、解の大域的構造が完全に解明されているものはごくわずかである。

関数解析的な方法は高次元空間の問題にも適用でき一般的で強力であるが、この方法だけで大域的な解構造や解の詳しい形状を知ることは難しい。高次元や一般的な状況での解構造や解の形状を知るために、空間 1 次元の問題を詳しく調べ、そこで得た知見をもとにもともと目指す問題に戻って考えることは常套手段である。

空間 1 次元の問題となれば、その特殊性を利用して様々な技法が使える。たとえば、古典解析の華である楕円関数を用いることにより具体的に解の表示を得るということは、19 世紀から 20 世紀にかけて盛んに行われていた。しかし、計算の大変さから限界にぶつかり、詳細な情報を得ることへのこだわりを捨て関数解析な方法でよしとするようになってしまったとも言える。

しかし、現象を記述する境界値問題では、大域的な解構造や解の詳しい形状がわからなければ、もとの現象を理解できない。やはり具体的に解を表示して深く理解したいのである。ネックは計算が大変であることである。

ところが、ここ 10 数年間の数式処理および数式処理ソフトの研究は目を見張るものがある。だれでも PC であたかもワープロ感覚で、数式処理を利用できるようになった。充実した視覚化機能をもつ数式処理ソフト Maple, Mathematica 等で気楽に楕円関数や完全楕円積分に関係した微分・代数計算でき、いろんな視点から視覚化できる状況になった。

そこで、それを使わない手はないと思い、数式処理ソフトを実験装置と検算の両方に使い研究をしている。例えば、[WY2010]～[IKOY2003]において、そこに現れる方程式に対しては、楕円関数や完全楕円積分を用いることにより、すべての解の表示式を得、形状や大域的構造が完全解明できることを示した。すなわち、1 次分岐のみならず 2 次以降の分岐までを含めた分岐構造が完全にわかるのである。

得られた解の挙動はさらに大変興味深い。例えば、特異摂動問題に対して、新たな解法と全く異なる視点を与える。すべての解が明示的に表示されていれば、特異摂動問題はの解表示に含まれる摂動パラメータ ε を素直に零に近づけたときの極限を調べる問題に帰着されるからである。

数式処理の研究成果をありがたく使わせていただいている。数式処理なくして実現しなかった、微分方程式の研究手法である。恩返しを意味で、現在、数学セミナー [YM2011] において、専門外の方にも読んでいただけるように解説記事の連載を行っている。

どのように数式処理を使っているかの要点を説明したい。できるだけ自己完結的な説明としたいので数式処理学会の教育分科会関係の研究集会での講演内容や、上記 [YM2011] と重複する部分はお許しいただきたい。

2 完全楕円積分の商の近似について

Cahn-Hilliard 方程式等の解の大域的分岐構造を調べる際、第1種完全楕円積分 $K(k)$ 、第2種完全楕円積分 $E(k)$ 、および k からなる有理式の増減、値域を調べる問題に出会う ([KMY2007])。境界値問題が完全楕円積分を含む超越方程式や超越方程式系に帰着されるのである。帰着方法は問題ごとに異なるが、共通点も多い ([YM2011])。

応用上、特に K 、 E に関する斉次式の場合が重要である。この場合、 E/K を上下から挟むことにより、2変数多項式に関する種々の標準的な手法が利用でき解析可能となる。ここで、第1種、第2種完全楕円積分は次式で定義される。

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

相加・相乗平均を用いたガウスによる、古典的な高精度近似計算法を利用した分数冪 $(1 - k^2)^{1/2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) による比較関数が大変有用である。

まず、 $E(k)/K(k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1 - 0$) であるから、 $E(k)/K(k)|_{k=1} := 0$ と定義すると、 $E(k)/K(k)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数となる。

任意の $a > b > 0$ に対して、算術・幾何平均の漸化式

$$a_{\ell+1} = \frac{a_\ell + b_\ell}{2}, \quad b_{\ell+1} = \sqrt{a_\ell b_\ell}, \quad c_{\ell+1} = \frac{a_\ell - b_\ell}{2} \quad (\ell = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

を考える。極限値を $\text{AGM}(a, b)$ とかく。1818年、Gauss は次を得た ([TI2007], [E1976])。

Theorem A. $a = 1$, $b = \sqrt{1 - h}$ とする。このとき、

$$\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} = 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell-1} c_\ell^2.$$

この定理は、 $\text{AGM}(a, b)$ と完全楕円積分との関係を調べるなかで発見されたものである。右辺は h の関数である。これより、上からの比較関数はごく自然に、下からの比較関数は若干の補正で得られる ([MMY2010])。

Theorem. 関数を

$$\underline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell-1} c_\ell^2 - 2^{n-1} c_n^2, \quad \bar{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell-1} c_\ell^2$$

で定義する。このとき、次の事実が成立する。

1) 任意の非負の整数 n に対して、次の評価式が成り立つ:

$$\underline{g}_n(h) \leq E(\sqrt{h})/K(\sqrt{h}) \leq \bar{g}_n(h) \quad h \in [0, 1].$$

なお、 $\underline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0, 1$ の場合のみであり、 $\bar{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0$ の場合のみである。

2) $\underline{g}_n(h), \bar{g}_n(h) \Rightarrow E(\sqrt{h})/K(\sqrt{h})$ uniformly on $[0, 1]$ as $n \rightarrow \infty$.

具体的に、 $\underline{g}_n(h), \bar{g}_n(h)$ ($n = 1, 2, 3$) を示す。

$$\begin{aligned} \underline{g}_0(h) &= 1 - h, & \bar{g}_0(h) &= 1 - \frac{h}{2}, \\ \underline{g}_1(h) &= (1 - h)^{1/2}, & \bar{g}_1(h) &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{(1 - h)^{1/2}}{2}, \\ \underline{g}_2(h) &= (1 - h)^{1/4} + (1 - h)^{3/4}, & \bar{g}_2(h) &= \frac{1}{4} - \frac{h}{8} + \frac{(1 - h)^{1/2}}{4} \\ & & & + \frac{(1 - h)^{1/4}}{2} + \frac{(1 - h)^{3/4}}{2}. \end{aligned}$$

関数 $1/K(h)$ にも、同様の高精度な近似関数が構成されることがわかる。

上記の方法を、数式処理システムと組み合わせれば、いくらでも高精度に近似式を自動的に生成することができる。

3 Sturm の定理

多項式の零点の個数を決定する、Sturm の定理は大変有用である。念のために簡単に説明する。

Sturm の定理を説明するためには Sturm 列が不可欠である。このため、ユークリッドの互除法を思い出す。互除法は 2 つの自然数の最大公約数を簡単かつ高速にもとめるアルゴリズムである。互除法は多項式の共通因子のうちで最大の次数のものを求める問題にもそのまま適用することができる。

例として、多項式

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1$$

を考える。 $f(x) = 0$ が重解をもつかどうかを判定しよう。この判定のためには、 $f(x)$ と

$$f'(x) := 3x^2 + 2x - 3$$

の共通因子を求めればよい。これらに対してユークリッドの互除法を適用すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{3} + \frac{1}{9} f'(x) + \frac{20}{9}x + \frac{4}{3} \\ f'(x) &= \frac{27}{16}x + \frac{171}{100} - \frac{20}{9}x + \frac{4}{3} + \frac{18}{25} \end{aligned}$$

を得る。よって、最大共通因子は $2763/256$ である。したがって、 $f(x) = 0$ と $f'(x) = 0$ は共通解を持たない。ゆえに、 $f(x) = 0$ は重解を持たない。

ユークリッドの互除法の計算において、余りの項をわざわざマイナスにして得られる関数列を Sturm 列という。例えば、上記の場合では

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{3} + \frac{1}{9} f'(x) - \frac{20}{9}x - \frac{4}{3} \\ f'(x) &= \frac{27}{16}x + \frac{171}{100} - \frac{20}{9}x - \frac{4}{3} - \frac{18}{25} \end{aligned}$$

と書き直すことができるので、Sturm 列は

$$f(x), f'(x), \frac{20}{9}x + \frac{4}{3}, \frac{18}{25}$$

である。

Sturm の定理 実係数の代数方程式 $f(x) = 0$ が重解をもたず、 $f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$ とする。このとき区間 (a, b) における零点の個数は

$$V(a) - V(b)$$

である。ただし、 $V(x)$ は符号変化数である。なお、符号変化の回数を数えるとき、途中に 0 が現れた場合はないものとする。

Sturm の定理とは、実係数をもつ方程式が与えられた区間 (a, b) の中にいくつの実根をもつかを決定するためのものである。多項式 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ にユークリッドの互除法を行い最大公約因子を求め、 $f(x)$ を最大公約因子で割ることによって重解となる部分を取り除く事が出来る。更に、 $f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$ としていい。もし $f(a) = 0, f(b) = 0$ であれば、もともと因数 $x - a, x - b$ をもつので、 $f(x)$ をそれで割っておけばいい。そのため多項式 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は互いに素であり、方程式 $f(x) = 0$ を重解をもたないという状況で、さらに $f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$ であるとする。このとき前項で説明したユークリッドの互除法を実行すると最後の余は 0 ではない定数である。

例 区間 $(-2, 2)$ における、方程式

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

の実数解の個数を求めてみよう。

まず,

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1$$

とおく. 前例より方程式 $f(x) = 0$ は重解をもたない. また

$$f(-2) = 3 \neq 0, \quad f(2) = 7 \neq 0$$

である. 上でみたように, Sturm 列は $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ である. ただし,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x), & f_1(x) &= f'(x) = 3x^2 + 2x - 3, \\ f_2(x) &= \frac{20}{9}x - \frac{4}{3}, & f_3(x) &= \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

前節で求めた Sturm 列に $x = \pm 2$ を代入する.

$$\begin{aligned} f_0(-2) &= 3, \quad f_1(-2) = f'(-2) = 5, \quad f_2(-2) = \frac{52}{9}, \quad f_3(-2) = \frac{18}{25}, \\ f_0(2) &= 7, \quad f_1(2) = f'(2) = 13, \quad f_2(2) = \frac{28}{9}, \quad f_3(2) = \frac{18}{25} \end{aligned}$$

となる. よって

	f_0	f_1	f_2	f_3	V
$x = -2$	+	+		+	2
$x = 2$	+	+	+	+	0

となり

$$V(-2) = 2, \quad V(2) = 0$$

である. したがって,

$$V(-2) - V(2) = 2$$

を得る. 以上より, 区間 $(-2, 2)$ における実数解の個数は 2 個である.

4 完全楕円積分を含む超越方程式

完全楕円積分を含む超越方程式の実数解の個数を調べる方法について説明する. 代数方程式であれば, グレブナー基底や sturm の定理を用いることにより, 実数解の個数を知ることができる. しかしながら超越方程式の場合, 問題ごとに工夫するしかなく一般的な方法はない.

方程式の解の個数を調べることは, 一般に, 方程式を定義する関数の増減を調べることと帰着される. 完全楕円積分を含む超越方程式の場合も, 方程式を定義する関数の増減を調べる方法を確認すればよい. そのためには, 結局のところ, その関数が与えられた区間で定符号かどうかをしっかりと判定できればよい.

実は幸運にも, 比較関数と多変数化を組み合わせることにより, 解の個数を知ることができるのである. このことについて説明していく.

イメージをもってもらうため具体例を示す.

例題

$$(h^2 - h + 1) \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}^4 - 2(1 - h)(2 - h) \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}^3 + 6(1 - h)^2 \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}^2 \\ + 2(2 - h)(1 - h)^2 \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} - (1 - h)^3 > 0, \quad h \in (0, 1)$$

解答 まず, $E(k)/K(k)$ を上下から

$$\underline{g}(k) < E(k)/K(k) < \bar{g}(k), \quad k \in (0, 1)$$

と挟む. ただし,

$$\underline{g}(h) = \sqrt{1 - h}, \quad \bar{g}(h) = 1$$

である.

$$U := E(k)/K(k)$$

とおく. このとき,

$$R(k, U) := (k^4 - k^2 + 1)U^4 - 2(1 - k^2)(2 - k^2)U^3 + 6(1 - k^2)^2U^2 \\ + 2(2 - k^2)(1 - k^2)^2U - (1 - k^2)^3 > 0, \quad k \in (0, 1), \quad \underline{g}(k) < U < \bar{g}(k)$$

を示せばよい.

まず,

$$R(h, \bar{g}(h)) = R(h, 1) = h^3 > 0, \quad 0 < h < 1, \\ R(1, U) = U^4 > 0, \quad 0 < U < 1, \\ R(h, \sqrt{1 - h}) = (1 - h)^2(1 - \sqrt{1 - h})^4 > 0, \quad 0 < h < 1.$$

が成り立つ. 一方, グレブナー基底を求めた後に Sturm の定理を用いて,

$$R_h(h, U) = 0, \quad R_U(h, U) = 0$$

の $0 < h < 1, 0 < U < 1$ における解は $(h, u) = (1/2, 1/2)$ のみであることがわかる. したがって, $R(h, U)$ は $\{(h, U) : 0 < h < 1, \underline{g}(h) < U < \bar{g}(h)\}$ の内部に停留点をもたない. したがって, 不等式は証明された. $\square$

以上の説明から, 容易に推測されるように, あつかう問題が K, E の斉次式である必要はない. たとえば, $E(k)/K(k), E(k)$ がかたまりとしてあらわれるのであれば, $U := E(k)/K(k), V := E(k)$ とおき, 3次元空間 (k, U, V) の中で同様の議論を行えばよい. この際のポイントは, $E(k)$ の上下からの精密な近似式を得ることである.

この研究集会における講演の機会を下さった, 研究代表者の高橋正教授に大変感謝申し上げます.

参考文献

- [YM2011] 四ツ谷-村井: 楕円関数と友達になろう—微分方程式の解の全体像を求めて—, 数学セミナー, 2011 年 4 月号～2012 年 4 月号, 日本評論社.
- [MMY2010] 村井-松本 - 四ツ谷: 日本数学会 2010 年度年会 函数方程式論分科会アブストラクト.
- [WY2010] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), to appear.
- [WY2008] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 745-763.
- [KMY2007] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: proof by the complete elliptic integrals*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 19 (2007), 609-629.
- [Y2006] S. Yotsutani (with I. Takagi and H. Takaichi): *On a shadow system to Gierer-Meinhardt system with non-local term*. RIMS Kokyuroku 1475 (2006), 149-154.
- [MMY2006] 村井実-松本和一郎-四ツ谷 p 晶二, 日本数学会 2006 年度年会 函数方程式論アブストラクト
- [KMY2005g] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Global bifurcation structure of a one-dimensional Ginzburg-Landau model*, J. Math. Phys., 46 (2005), no. 9, 095111, 24.
- [KMY2005] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *A complete bifurcation diagram of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal., 4 (2005), 665-682.
- [MMY2005] W. Matsumoto, M. Murai and S.Yotsutani, *What have we learned on the problem: Can one hear the shape of a drum?*, Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, II (2005), 345-361.
- [LNY2004] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, *On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion. Partial differential equations and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.
- [IKOY2003] H. Ikeda, K. Kondo, H. Okamoto and S. Yotsutani: *On the global branches of the solutions to a nonlocal boundary-value problem arising in Oseen's spiral flows*, Commun. Pure Appl. Anal., 3 (2003), 381-390.

- [TI2007] 竹之内脩－伊藤隆, π の計算 アルキメデスから現代まで -, 共立出版, 2007.
- [E1976] Eugene Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean. Math. Comp. 30 (1976), no. 135, 565–570.