

Limits of discrete series for the Lorentz groups

阪大 基礎工 米山俊昭

§ 0. 序

Bargmann [1] によれば, $G = SU(1, 1)$ の discrete series は, 複素平面における単位円板 $X = \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$ 上の正則関数の作る Hilbert 空間上で, 次の様に構成される. $d\mu(x)$ を

X 上の Euclidean measure とし, $H \in X$ 上の正則関数 f で,

$$(0.1) \quad \|f\|^2 = \frac{n-1}{\pi} \int_X |f(x)|^2 (1-|x|^2)^{n-2} d\mu(x) < +\infty$$

なるものによつて生成される Hilbert 空間とする. G の H 上の action $T_g(n)$ を,

$$(0.2) \quad T_g(n) f(x) = (\bar{a} + \bar{b}x)^{-n} f\left(\frac{ax+b}{bx+\bar{a}}\right)$$

によつて定義する. ただし, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$, $n \geq 2$.

このとき, 表現 $T(n)$ は G の discrete series に属する.

$n=1$ の場合にも, G の action を (0.2) で定義し, norm を

$$(0.3) \quad \|f\|^2 = \lim_{n \downarrow 1} \frac{n-1}{\pi} \int_X |f(x)|^2 (1-|x|^2)^{n-2} d\mu(x)$$

におきかえることによつて, G の既約 unitary 表現が得られ

る. この表現は discrete series には属さない. これを discrete series の limit と呼ぶ.

- お, G の principal series は, X の boundary $U = \{u \in G; |u| = 1\}$ 上の関数の作る Hilbert 空間上で, 構成される. このとき, H からその空間への boundary value imbedding が定義され, それによって, discrete series の limit が principal series に imbed されることが知られている.

高橋 [6] は, 上と同様な discrete series の limit を de Sitter 群に対して構成している. ここでは, 一般の Lorentz 群に対して, discrete series の limits が構成され, またそれが, principal series に imbed されることを示す.

Knapp and Okamoto [4] は, 同様なことを, holomorphic discrete series に対して論じている.

§ 1. 準備.

Lorentz 群 $SO_0(n, 1)$ の universal covering group $Spin(n, 1)$ は, 高橋 [7] によれば, 以下の様に Clifford algebra に係数を持った 2×2 の行列より成る群として実現される.

E_n を n 次元実ベクトル空間で positive definite な 2 次形式 Q を持つものとする. ただし, Q は次式によって定義される. $\{e_1, \dots, e_n\}$ を E_n の base とするとき,

$$(1.1) \quad Q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

$T(E_n)$ を E_n の tensor algebra とし, $I(Q)$ を $x \otimes x + Q(x) \cdot 1$

$(x \in E_n)$ の形の元より生成される $T(E_n)$ の ideal とする.

Clifford algebra C_n は $C_n = T(E_n)/I(Q)$ として定義される.

このとき, 自然な写像 $E_n \hookrightarrow T(E_n) \hookrightarrow C_n$ は一対一である.

そこで E_n を C_n の部分空間と考えると, $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p};$

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}$ が C_n の base となり, また

$$(1.2) \quad e_i^2 = -1, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j)$$

となる.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in E_n$ のとき, $x_1 x_2 \cdots x_p \mapsto (-1)^p x_1 \cdots x_p$ によって与えられる C_n の自己同型を $x \mapsto x'$ と書く. 同じように $x_1 x_2 \cdots x_p \mapsto x_p \cdots x_2 x_1$ によって与えられる C_n の自己同型を $x \mapsto {}^t x$ と書く. さらに $\bar{x} = {}^t(x') = ({}^t x)'$ と書くことにする. $V_n = \mathbb{R} \cdot 1 + E_n$ とおき,

$$T_n = \{a \in C_n; \forall x \in E_n, \exists y \in V_n; ax = ya'\}$$

とおく. このとき, $a \in T_n$ ならば, $a\bar{a}$ は負でない実数であって, a の norm を $|a| = (a\bar{a})^{1/2}$ によって定義する.

$T_n^\circ = \{a \in T_n; |a| = 1\}$ とおくと T_n° は積に関して群となり, $\text{Spin}(n+1)$ と同型である. 一方 $\text{Spin}(n)$ は $SO(n)$ の double covering であって, その covering map τ は, $a \in \text{Spin}(n)$ のとき $\tau(a)$ を $x \mapsto axa^{-1}$ ($x \in V_n$) によって定義される V_n 上の変換

として与えられる。さらに、 $n \geq 3$ のとき、 $Spin(n)$ は単連結である。

$$G \ni \text{行列 } g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \text{ で}$$

$$(1.3) \quad a, b \in T_{n-1}, \quad b\bar{a}' \in V_{n-1}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1$$

を満足するものの全体とすると、 G は群となり、 $n \geq 3$ のとき $Spin(n, 1)$ と同型である。 $n = 2$ のときは、 $SU(1, 1)$ と同型である。 $K \ni \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \quad (k \in T_{n-1}^\circ)$ の形の元よりなる G の部分群とすると、 K は $Spin(n)$ と同型であり、 G の maximal compact 部分群である。以後、 $k \in K$, $k \in Spin(n)$, $k \in T_{n-1}^\circ$ は同一視し、 $k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix}$ とかくことがある。

G の岩波分解 $G = KAN$ は次の様に与えられる。

$$A = \{ a_t = \begin{pmatrix} ch t/2 & sh t/2 \\ sh t/2 & ch t/2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \}$$

$$N = \{ z = \begin{pmatrix} 1 - z/2 & z/2 \\ -z/2 & 1 + z/2 \end{pmatrix} ; z \in E_{n-1} \}$$

$$(1.4) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch t/2 & sh t/2 \\ sh t/2 & ch t/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z/2 & z/2 \\ -z/2 & 1 + z/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{ここに, } k = (a+b)/|a+b|, \quad e^{t/2} = |a+b|,$$

$$z = (\bar{a}b - \bar{b}a)/|a+b|^2,$$

§ 2. Principal series.

$U, X \ni z$ として $|x|=1$, $|x|<1$ なる $x \in V_{n-1}$ のなる空間とすると、 G は左から $U \times V \times X$ に次の様に作用する。

$$(2.1) \quad g \cdot x = (ax + b)(b'x + a')^{-1}$$

ただし, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, $x \in U$ または X .

$M \in A$ の K における centralizer とする. M は $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ ($m = m' \in \text{Spin}(n)$) の形のものよりなる. さらに M は $\text{Spin}(n-1)$ と同型である. $(K/M)^* = K/M - \{kM; k+k'=0\}$, $U^* = U - \{1\}$ とおき, $p: K \rightarrow U \ni \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \mapsto kk'$ によつて定義すると, p は $(K/M)^*$ と U^* の同型を与える. 岩沢分解によつて, $p \in G$ まで拡張すると, $\begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \mapsto (a+b)(b'+a')^{-1}$ となる. 一方 $s: U^* \rightarrow K$ を

$$(2.2) \quad s(u) = \begin{pmatrix} \frac{1+u}{|1+u|} & 0 \\ 0 & \frac{1+\bar{u}}{|1+\bar{u}|} \end{pmatrix}$$

によつて定義すると, すべての $u \in U^*$ に対して, $p(s(u)) = u$ となる. さらに, ある低次元の集合を除いて, すべての G の元 g が, $g = s(p(g))m(g)a_{t(g)}z$ ($m(g) \in M$, $a_{t(g)} \in A$, $z \in N$) の形に一意的に分解される. また, $p(g s(u)) = g \cdot u$ となることより,

$$(2.3) \quad g s(u) = s(g \cdot u) m(g, u) a_{t(g, u)} z \quad (m(g, u) \in M, a_{t(g, u)} \in A, z \in N)$$

を得る. 詳しく書くと, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, $u \in U$ に対して,

$$e^{t(g, u)} = |au + b|^2 = |b'u + a'|^2,$$

$$m(g, u) = \frac{(a+b')(1+u) + (b+a')(1+\bar{u})}{|(a+b')(1+u) + (b+a')(1+\bar{u})|}$$

となる.

補題 2.1. $d\mu(u)$ を U 上の K -不変 measure と $\int_U d\mu(u) = 1$ となるものとする。このとき,

$$(2.5) \quad d\mu(g \cdot u) = e^{(n-1)t(g, u)} d\mu(u),$$

となり, $e^{t(g, u)}$ と $m(g, u)$ は multiplier である。

M が $\text{Spin}(n-1)$ と同型であることより, すべての M の既約 unitary 表現は次の様な整数列又は半整数列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ によって parametrize される。

$$n = 2m+1 \text{ のとき, } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-2} \geq |\lambda_{m-1}|$$

$$n = 2m \text{ のとき, } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-2} \geq \lambda_{m-1} \geq 0,$$

(cf. [2])。

G の principal series の表現は, 次の様に構成される。 $\lambda \in$ 上のような整数列 (又は半整数列) とし, それに対応する M の既約 unitary 表現を σ^λ とする。 $\mathcal{H}(\lambda) \in U$ 上で定義され, σ^λ の表現空間 V^λ に値をとる関数 f で,

$$(2.6) \quad \|f\|^2 = \int_U \|f(u)\|_{V^\lambda}^2 d\mu(u) < +\infty$$

となるものより成る Hilbert 空間とする。ただし, $\|\cdot\|_{V^\lambda}$ は V^λ における norm を表わす。 $g \in G$ に対して, $\mathcal{H}(\lambda)$ 上の作用素 $U_g(\lambda, s)$ ($s \in \mathbb{C}$) を,

$$(2.7) \quad U_g(\lambda, s) f(u) = e^{-st(g^+, u)} \sigma^\lambda(m(g^-, u))^{-1} f(g^+ \cdot u) \quad (f \in \mathcal{H}(\lambda))$$

によって定義すると, $g \mapsto U_g(\lambda, s)$ は G の強連続な表現であり, $\text{Re}(s) = \frac{n-1}{2}$ ならば, unitary である。さらに,

$U_g(\lambda, \frac{n-1}{2} + i\nu)$ は G の principal series の表現である。この表現の既約性に関して、次の事が知られている [5],

$n=2m+1$ のとき, $U(\lambda, \frac{n-1}{2} + i\nu)$ は すべて既約である。

$n=2m$ のとき, λ が半整数列で, $\nu=0$ の場合を除いて, $U(\lambda, \frac{n-1}{2} + i\nu)$ は すべて既約である。

§ 3. Discrete series.

$n=2m$ のとき, かつそのときにかぎり G は discrete series を持つ。そこで以後は $n=2m$ を仮定する。 G は空間

$X = \{x \in V_{n-1}; |x| < 1\}$ に左から作用する。 $p_0: G \rightarrow X$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \mapsto ba'^{-1}$ によって定義すると, p_0 は G/K から X の上への同型に拡張される。さらに, $s_0: X \rightarrow G$

$$(3.1) \quad s_0(x) = \begin{pmatrix} ch\,t/2 & x\,ch\,t/2 \\ \bar{x}\,ch\,t/2 & ch\,t/2 \end{pmatrix}$$

($\mathbb{R} \ni t \geq 0$, $ch\,t/2 = |x|$, $t \geq 0$), によって定義するとき, すべての $x \in X$ に対して, $p_0(s_0(x)) = x$ となる。したがって, すべての $g \in G$ が次の様に一意に分解される。

$$(3.2) \quad g = s_0(x) k(g) \quad (x = p_0(g), k(g) \in K).$$

一方, $p_0(g s_0(x)) = g \cdot x$ より, $g s_0(x)$ は (3.2) によって,

$$(3.3) \quad g s_0(x) = s_0(g \cdot x) k(g, x) \quad (k(g, x) \in K)$$

と一意に分解される。 $k(g, x)$ は, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, $x \in X$ に対して,

$$(3.4) \quad k(g, x) = \frac{a + bx}{|a + bx|}$$

となる。 ($k \in K$ と $k \in T_{2m-1}^0 = \text{Spin}(2m)$ は同一視した.)

補題 3.1. $d\mu(x)$ は X 上の Euclidean measure とすると,
 $(1 - |x|^2)^{-2m} d\mu(x)$ は X 上の G -不変な measure であって,

$$(3.5) \quad \int_G f(g) dg = c \int_X \int_K f(s_0(x)k) (1 - |x|^2)^{-2m} d\mu(x) dk,$$

ただし, $x = p_0(g)$, c はある正の定数とする。

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m)$ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m|$ となる,
 整数列 (または半整数列) $\lambda \in m$, それに対応する K の既約
 unitary 表現 σ^λ とし, その表現空間 V^λ とする。 (K は
 $\text{Spin}(2m)$ と同型である)。 ν は整数 (または半整数) とし,
 $H_1(\lambda, \nu)$ は次の条件を満足する関数 $f: X \rightarrow V^\lambda$ のなす
 Hilbert 空間とする。

$$(3.6) \quad \|f\|^2 = c \int_X \|f(x)\|_{V^\lambda}^2 (1 - |x|^2)^{2\nu - 2m} d\mu(x) < +\infty$$

(ただし, c は正の定数)

$$\int_X (1 - |x|^2)^{2\nu - 2m} d\mu(x) = \frac{\pi^m \Gamma(2\nu - 2m + 1)}{\Gamma(2\nu - m + 1)}$$

であるから, 有界な関数 $f \in H_1(\lambda, \nu)$ であって, $H_1(\lambda, \nu) \neq 0$.

G の $H_1(\lambda, \nu)$ 上の unitary 表現 $g \mapsto T_g(\lambda, \nu)$ は,

$$(3.7) \quad T_g(\lambda, \nu) f(x) = |b'x + a'|^{-2\nu} \sigma^\lambda(k(g^{-1}, x))^{-1} f(g^{-1} \cdot x)$$

($f \in H_1(\lambda, \nu)$)

ただし, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix}$,

によって定義する.

$H_0(\lambda, \nu)$ を C^∞ 関数よりなる $H_1(\lambda, \nu)$ の部分空間とし, $\Omega \in \mathfrak{g}$ の Casimir 作用素とする. このとき, $H_0(\lambda, \nu)$ 上において, $T_\Omega(\lambda, \nu)$ を考えることができる. G は $SO_e(2m, 1)$ と局所同型であるから, $SO_e(2m, 1)$ と G の Lie algebra を同一視する. [6] の記号を用いて,

$$T_\Omega(\lambda, \nu) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2m} T_{X_{ij}}(\lambda, \nu)^2 - \sum_{1 \leq i \leq 2m} T_{Y_i}(\lambda, \nu)^2$$

と書ける. さらに [6] と同様な方法によって,

$$(3.8) \quad -T_\Omega(\lambda, \nu) f = \left[(1-|x|^2) \left\{ \frac{1-|x|^2}{4} \Delta + (m-\nu-1) D + \sum_{i,j} x_j \sigma^\lambda(X_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \right. \\ \left. + \sum_{i,j,k} x_j x_k \sigma^\lambda(X_{ij}) \sigma^\lambda(X_{ik}) - \sum_{i,j} \sigma^\lambda(X_{ij})^2 \right. \\ \left. + \nu(\nu+m+1)|x|^2 - m\nu \right] f$$

が示される. ただし, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{2m}^2}$, $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, $X_{ii} = 0$, $X_{ij} + X_{ji} = 0$ ($i \neq j$).

[6] と同様な方法で, G の discrete series の表現を構成するためには, もう少し $T_\Omega(\lambda, \nu)$ を詳しく調べる必要がある. ここでは, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が

$$(3.9) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = \lambda_m \quad \text{又は} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = -\lambda_m$$

となる場合を考える. これは, K の表現 σ^λ を M_1 に制限したときにも既約となる場合である. このような λ に対応する K の表現に対して, Gelfand and Cetlin [7] の結果より計算すると,

$$(3.10) \quad \sum_{i,j,k} x_j x_k \sigma^\lambda(X_{ij}) \sigma^\lambda(X_{ik}) = -|x|^2 \lambda_1 (\lambda_1 + m - 1)$$

を得る.

補題 3.2. $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ $\lambda \geq \nu \geq m$ とする整数 (または半整数) とし, $\lambda - \nu$ は整数であるものとする. $\lambda^+ = (\lambda, \dots, \lambda, \lambda)$
 $\lambda^- = (\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$ とおき, それに対応する K の既約 unitary
表現をそれぞれ, $\sigma^{\lambda^+}, \sigma^{\lambda^-}$ とする. このとき,

$$(3.11) \quad -T_\Omega(\lambda^+, \nu) f = \left[(1-|x|^2) \left\{ \frac{1-|x|^2}{4} \Delta + (m-\nu-1) D + \sum_{i,j} x_j \sigma^{\lambda^+}(X_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \right. \\ \left. + (\nu(\nu-m+1) - \lambda(\lambda+m-1)) |x|^2 - (m\lambda(\lambda+m-1) - m\nu) \right] f,$$

となる.

次の微分方程式を得る.

$$(3.12) \quad T_\Omega(\lambda^+, \nu) f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1) + \nu(\nu-2m+1)] f.$$

補題 3.2 によつて, (3.12) は

$$(3.13) \quad \left\{ \frac{1-|x|^2}{4} \Delta + (m-\nu-1) D + \sum_{i,j} x_j \sigma^{\lambda^+}(X_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda+m-1) + \nu(\nu-m+1) \right\} f = 0,$$

となる. $f(x) = \varphi(r)$, $r = |x|$ とおくと, $X_{ii} = 0$, $X_{oj} + X_{jo} = 0$

($i \neq j$) によつて,

$$\sum_{i,j} x_j \sigma^{\lambda^+}(X_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = 0$$

を得る. (したがって (3.13) は,

$$\left\{ \frac{1-r^2}{4} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m-1}{r} \frac{d}{dr} \right) + (m-\nu-1) r \frac{d}{dr} + (\lambda+m-\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{2}) \right\} \varphi(r) = 0$$

となる. $z = r^2$ と変数変換すると,

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} \varphi(z) + (m-(2\nu-m+2)z) \frac{d}{dz} \varphi(z) - (\lambda+\nu)(\lambda-\nu+m-1) \varphi(z) = 0.$$

これは, 超幾何方程式である, (したがって, 任意の $\psi \in V^{\lambda^+}$

に於いて, $f_v(x) = F(\nu - \lambda - m + 1, \lambda + \nu; m; |x|^2) v$ とおくと,
 f_v は (3.12) の解である. さらに, $F(\nu - \lambda - m + 1, \lambda + \nu; m; z)$
 は, $\lambda - \nu + m - 1$ 次の多項式であるから, $f_v \in H_0(\lambda^+, \nu)$ と
 なる. 同様にして, $f_v \in H_0(\lambda^-, \nu)$ が証明される.

定理 1. λ, ν を $\lambda \geq \nu \geq m$ であって, $\lambda - \nu$ が整数と
 なる整数 (または半整数) とする. σ^{λ^+} を $\lambda^+ = (\lambda, \dots, \lambda, \lambda)$,
 $\lambda^- = (\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$ に対応する K の既約 unitary 表現とする. この
 とき, $H(\lambda^{\pm}, \nu) \neq \emptyset$ であり,

$$(3.14) \quad T_Q(\lambda^{\pm}, \nu) f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1) + \nu(\nu-2m+1)] f$$

となる関数 f より生成される $H_0(\lambda^{\pm}, \nu)$ の部分空間とすると,
 $H(\lambda^{\pm}, \nu)$ は non-trivial, closed であって, $T_Q(\lambda^{\pm}, \nu)$ に関
 して不変である. $T(\lambda^{\pm}, \nu)$ を $H(\lambda^{\pm}, \nu)$ に制限して得る $\mathcal{G}$ の
 unitary 表現 (これを $T(\lambda^{\pm}, \nu)$ と書く) は既約であって, $\mathcal{G}$ の
 discrete series に属する. さらに, $H_1(\lambda^{\pm}, \nu)$ の内積 (3.5) にか
 ける定数 c は,

$$c = \frac{(2\nu - 2m + 1) T(\lambda - \nu + 2m - 1) T(\lambda + \nu)}{T(m)^2 T(\lambda - \nu + m) T(\lambda + \nu - m + 1)}$$

とおき, $f_v(x) = F(\nu - \lambda - m + 1, \lambda + \nu; m; |x|^2) v$, ($v \in V^{\lambda^{\pm}}$)

とおくと, $f_v(x) \in H(\lambda^{\pm}, \nu)$ であって, $\|f\|^2 = \|v\|_{V^{\lambda^{\pm}}}^2$ とな
 る.

$n=4$ のときは, この構成法によつて, de Sitter 群の

universal covering group のすべての discrete series が実現できる (cf. [6]).

§ 4. Limits of the discrete series.

λ を正の半整数とし, 半整数列 $(\lambda, \dots, \lambda, \lambda)$ もまた λ で表わすことにする. σ^λ を半整数列 λ に対応する K の既約 unitary 表現とし, その表現空間を V^λ とする. σ^λ を M に制限しても既約であるから, σ^λ を M の表現と考えるとき, その表現も σ^λ で表わす. $H_1(\lambda) \in C^\infty$ 関数 $f: X \rightarrow V^\lambda$ のなす空間とする. $(k(g, x))'$ と代わりに $k'(g, x)$ と書く. $H_1(\lambda)$ 上の作用素 $T_g^+(\lambda)$ 及び $T_g^-(\lambda)$ ($g \in G$) を

$$(4.1) \quad T_g^+(\lambda) f(x) = |b'x + a'|^{-2(m-1)} \sigma^\lambda(k(g^{-1}, x))^{-1} f(g^{-1}x),$$

$$(4.2) \quad T_g^-(\lambda) f(x) = |b'x + a'|^{-2(m-1)} \sigma^\lambda(k'(g^{-1}, x))^{-1} f(g^{-1}x)$$

により定義する. ただし, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$.

discrete series の場合と同様にして, $f \in H_1(\lambda)$ に対して,

$$(4.3) \quad -T_\Omega^\pm(\lambda) f = \left[(1-|x|^2) \left\{ \frac{1-|x|^2}{4} \Delta - \frac{1}{2} D + \sum_{i,j} x_j \sigma^\lambda(x_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}) - \lambda(\lambda+m-1) \right) |x|^2 + (m\lambda(\lambda+m-1) - m(m-\frac{1}{2})) \right\} \right] f,$$

と成る. ただし, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{2m}^2}$, $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_{2m} \frac{\partial}{\partial x_{2m}}$,

$x_{ii} = 0$, $x_{ij} + x_{ji} = 0$ ($i \neq j$).

$H_0^\pm(\lambda)$ を次の条件を満足する関数 f より成る $H_1(\lambda)$ の部分空間とする.

$$(4.3) \quad T_{\Omega}^{\pm}(\lambda) f = -[(m-1)\lambda(\lambda+m-1) - (m-\frac{1}{2})^2] f,$$

(4.4) f は boundary U の連続な extension を持つ,

$$(4.5) \quad \|f\|^2 = \int_U \|f(u)\|_{V\lambda}^2 d\mu(u) < +\infty.$$

このとき, $H_0^{\pm}(\lambda)$ は $T_g^{\pm}(\lambda)$ ($g \in G$) に関して stable である.

$H^{\pm}(\lambda)$ をそれぞれ $H_0^{\pm}(\lambda)$ の completion とする.

discrete series のところで見たように, (4.1) は 超幾何方程式

$$\left\{ \frac{1-|x|^2}{4} \Delta - \frac{1}{2} D + \sum_{i,j} x_j \sigma^{\lambda}(X_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda+m-1) - (m-\frac{1}{2})^2 \right\} f = 0$$

であるから, (4.1) は non-trivial な解,

$$f_v(x) = F(\frac{1}{2}-\lambda, \lambda+m-\frac{1}{2}; m; |x|^2) v \quad (v \in V^{\lambda})$$

を持つ. さらに, (4.5) の norm の定義で,

$$\|f_v\| = \left(\frac{\Gamma(m) \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+m-\frac{1}{2})} \right) \|v\|_{V\lambda}$$

となる. したがって,

補題 4.1. $H^{\pm}(\lambda) \neq 0$.

§5. Imbedding in the principal series.

§4 の記号をそのまま使う. $H_0^{\pm}(\lambda)$ はそれぞれ $T_g^{\pm}(\lambda)$ ($g \in G$) に関して stable であるから, $H^{\pm}(\lambda)$ も stable である. G の $H_0(\lambda)$ 上の表現 $T^{\pm}(\lambda)$ を $H^{\pm}(\lambda)$ に拡張する.

$\sigma^{\lambda}(k(g,u)) = \sigma^{\lambda}(m(g,u))$, $\sigma^{\lambda}(k'(g,u)) = \sigma^{\lambda}(m(g,u))$ であることに注意すれば, 次の補題を得る.

補題 5.1. $I^+(\lambda): H_0^+(\lambda) \rightarrow \mathcal{H}(\lambda)$, $I^-(\lambda): H_0^-(\lambda) \rightarrow \mathcal{H}(\lambda)$ と

$$(5.1) \quad I^\pm(\lambda) f(u) = f(u) \quad (f \in H_0^\pm(\lambda))$$

によって定義すれば, $I^\pm(\lambda)$ は linear isometry であって,

$$(5.2) \quad I^\pm(\lambda) T_g^\pm(\lambda) = U_g(\lambda, m-\frac{1}{2}) I^\pm(\lambda)$$

がすべての $g \in G$ に対して成り立つ.

定理 2. $H_0^\pm(\lambda)$ 上の作用素 $T_g^\pm(\lambda)$ は, $H^\pm(\lambda)$ 上に拡張でき, $g \mapsto T_g^\pm(\lambda)$ は G の強連続な unitary 表現である. さらに $T^\pm(\lambda)$ は既約であって, $U(\lambda, m-\frac{1}{2})$ の部分表現と unitary 同値である.

よ, G の principal series の表現 $U(\lambda, m-\frac{1}{2})$ は可約である.

注. $f \in H_0^\pm(\lambda)$ に対して,

$$(5.3) \quad \int_U \|f(u)\|_{V\lambda}^2 d\mu(u) \\ = \frac{T(\lambda+m-\frac{1}{2})^2}{\pi^m T(m) T(\lambda+\frac{1}{2})^2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \int_X \|f(x)\|_{V\lambda}^2 (1-|x|^2)^{\varepsilon-1} d\mu(x)$$

が成り立つ. (したがって, discrete series の表現の構成と比較すると, 表現 $T^\pm(\lambda)$ が, 序で述べた意味で discrete series の limit であることがわかる.)

References

- [1] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group,
Ann. of Math., 48 (1947), 568-640.
- [2] H. Boerner, Representations of Groups, North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [3] I. M. Gelfand and M. L. Cejtlin, Finite dimensional representations of
the groups of orthogonal matrices (in Russian), Dokl. Akad. Nauk
SSSR, 71 (1950), 825-828, 1017-1020.
- [4] A. W. Knap and K. Okamoto, Limits of holomorphic discrete series,
J. of Func. Analysis, 9 (1972), 375-409.
- [5] A. W. Knap and E. M. Stein, Intertwining operators for semisimple
groups, Ann. of Math., 93 (1971), 489-578.
- [6] R. Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz
généralisés, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 289-433.
- [7] R. Takahashi, Série discrète pour les groupes de Lorentz $SO_0(n,1)$,
Colloque sur les fonctions sphériques et la théorie des groupes,
Nancy, 1971.
- [8] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3,
Supp. 1, (1964), 3-38.
- [9] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, Formulas and Theorems for
the Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlin,
1966.