

## 解説

### フラクタルの物理

京大・理 高 安 秀 樹

#### 序 文

海岸線の複雑な形が、非整数のフラクタル次元によって特徴づけられるような、いたるところ微分のできない曲線によってよく近似されることがマンデルブロによって示されたのは、まだ10年程前のことである。フラクタルのその後の発展はめざましく、今や、まったく新しい世界観を築きつつあると言っても過言ではない。自然科学全般、さらに、社会科学の一部にまで影響を与え、細分化された各研究分野を結びつける横糸の役割を果しているとも言えるだろう。本論文の目的は、このように重要な意味を持ち始めたフラクタルを、現時点で総括的に整理することにある。

本論文では、ひとつひとつの現象には、あまり深くは立ち入らない。そのかわりフラクタルに関する重要な知見は、もれなく記載したつもりである。しかしながら、フラクタルの急速な進展から判断すれば、数年後には、フラクタルの研究の主流が、本論文ではまったく触れていない分野に移ってしまっていることも十分ありうると思われる。今、フラクタルがそれ程の柔軟さと活性を持っていることを感じていただければ幸いである。

#### 謝 辞

学位論文としてまとめたこの論文を『物性研究』に掲載させていただくことを勧めて下さった蔵本由紀教授に感謝いたします。また、名古屋大学大学院に在籍していた5年間、常に暖く御指導して下さいました谷内俊弥教授に慎しんで御礼申し上げます。広中平祐教授には、著者がフラクタルに関心を持つ直接のきっかけとなった『夏季セミナー』に参加させていただきました。さらに、マンデルブロの本の翻訳を手伝わせていただいたことは、彼の本をじっくり読むよい機会となりました。

名古屋大学フラクタル研究会の皆さんには、原稿の準備段階でいろいろとお世話になりました。なかでも、本文の清書という大変な作業を進んで引受けて下さった館野美佐子さんには、

高安秀樹

特に感謝しています。

## 目 次

### 第1章 フラクタルとは何か？

#### § 1.1 特徴的な長さ

#### § 1.2 フラクタル

#### § 1.3 フラクタル次元

Ⅰ．粗視化の度合を変える方法

Ⅱ．長さ－面積－体積の関係より求める方法

Ⅲ．相関関数より求める方法

Ⅳ．分布関数より求める方法

Ⅴ．スペクトルより求める方法

#### § 1.4 基本的なフラクタル

・カントール集合と悪魔の階段

・ド・ウィースのフラクタル

・シルピンスキーのギャスケット

・レビのダスト

### 第2章 自然界のフラクタル

#### § 2.1 地学関係

・地形

・川

#### § 2.2 生物関係

・肺や血管の構造

・植物の構造と虫の数

#### § 2.3 宇宙関係

・星の空間的分布

・クレーター，小惑星の直径分布

#### § 2.4 物理学関係

・固体表面

・凝集体

・高分子

- ・相転移, 臨界現象, パーコレーション

- ・乱流

- ・ランダムウォーク

- ・ジョセフソン接合

## § 2.5 その他の分野

- ・通信系のエラー

- ・所得の分布

- ・株価の変動

## 第3章 コンピューターのフラクタル

### § 3.1 凝集体

### § 3.2 カオスと写像

- ・奇妙なアトラクター

- ・写像によるカオス

- ・写像によるフラクタル

### § 3.3 ランダムクラスター

- ・パーコレーション

- ・イジングクラスター

### § 3.4 放電パターン

### § 3.5 ランダムウォーク

- ・自己回避ランダムウォーク

### § 3.6 オートマトン

## 第4章 理論的なフラクタルモデル

### § 4.1 乱流モデル

### § 4.2 ロングタイムテイル

### § 4.3 悪魔の階段

## 第5章 フラクタルを扱う数学的方法

### § 5.1 くりこみ群

### § 5.2 安定分布

### § 5.3 次元解析

### § 5.4 非整数回の微積分

## 第6章 フラクタルの拡張

## 第1章 フラクタルとは何か

## § 1.1 特徴的な長さ

自然界に存在するあらゆる形や人類が今までに考えたあらゆる図形は、おおまかに次のように2つに分類することができるであろう。一方は特徴的な長さを持つ図形であり、もう一方は特徴的な長さを持たない図形である。ここで特徴的な長さとは、例えば球を考えるならその半径、また人間の形を扱うならば身長というように、そのものに付随する長さのうちの代表的なものをさす。勿論ここでは厳密な定義に基づいた論議をするわけではないから、人間の形の特徴的な長さとして足の長さを考えても一向にかまわない。とにかく、その形を特徴づけるような長さがあればよいのである。

正方形や直方体、楕円等、小学校で習う幾何学的な図形は、皆特徴的な長さを持っているし、また、自動車、たばこ、建物等、身の廻りの人工的な物にも各々特徴的な長さがある。これらの特徴的な長さを持つグループに属する物の形は、多少単純化してもその特徴的な長ささえ変えなければ、大まかな特徴はあまり変わらないという性質がある。例えば、自動車の代りに同じくらいの大きさの直方体を、または人間の代りに同じくらいの高さの円柱を立てておいても遠くから見る分には大きな違いは生じない。人間の体を円柱と見なすことが乱暴すぎる場合には、手足を円柱に、胴体を直方体に、頭を球に置き換えればずっと人間らしくなる。それでもまだ不満ならば、指や鼻といった細かな特徴を付け加えていけばよい。つまり、このグループに属する物に関しては、直方体や円柱、球や長方形といった幾何学的によく知られた単純な形の組み合わせによって、その構造がよく近似できるわけである。

特徴的な長さを持つ形の最も基本的なものは、今述べたように球や直方体のような幾何学的に単純な形であるが、それらの基本的な形には共通する大切な性質がある。それは、その形を構成する線や面の滑らかさである。球の表面は至る所滑らかであるし、直方体のように角ばったものでも、その面は滑らかである。つまり、ほとんど至る所微分可能である。自然界に存在する形でも、このグループに属する物は、その表面が実際に滑らかであるか、あるいは滑らかであると近似しても構わない場合が多い。例えば、地球の形を考える時には大抵の場合はその名のとおり球と置いて構わないし、もう少し欲張ったとしても回転楕円体と考えておけば十分であろう。実際の地球の表面には山や海がありでこぼこしているが、それらのゆらぎは地球の特徴的な長さである半径に比べると無視しうる、というわけである。

さて、今度はもう一つのグループ、特徴的な長さを持たない形について考えてみよう。フラクタルに馴染みのない方にとっては、特徴的な長さのない形と言われてもピンと来ないかもしれないので例をあげることにする。例えば、雲の形を思い浮かべてみてほしい。雲の形にもい

いろいろあるのでここでは積乱雲を考えてみよう。もくもくと湧き上がった雲の形の各部分は球に近い形に見えるかもしれない。しかしよく観察すれば球とみなそうと思った形の中にも無視できない程の凸凹があり、さらに小さな球の集まりを持ってこなければよい近似にはならないことがわかる。同じことは、その小さな球についてもまたさらにその小さな球についても言える。すなわち、積乱雲らしさを表す為には、大きさの異なる球を無数に用意しなければならないのである。これは、球を用いて近似しようと思ったからたまたまそうなったのではなく、直方体を用いようが、楕円体を用いようが同じ事である。つまり特徴的な長さを持つ図形を使って近似しようとするればいつでも、実察の雲の形と比べ、無視できないくらい大きなずれが生じてしまい、それを減らす為には大きさの異なる図形を無数に用意しなければならないのである。

コッホ曲線と呼ばれている有名な図形によって、このことを具体的に確認してみよう。図 1.1.1 がコッホ曲線であるが、この複雑な形をした曲線を線分と三角形で近似することを考えてみる。一番粗い近似は図 1.1.2 の一番上の図になるだろう。しかし、これはもとのコッホ曲線とは似ても似つかない。そこで、更に近似を高めていくと、図 1.1.2 の下方の図のようになる。ここまでくると多少のコッホ曲線らしさが表現できてくるがまだとても十分とは言えない。この近似の操作を無限に繰り返し、無限に小さな線分または三角形による補正ができれば、その極限としてコッホ曲線が得られるのである。

特徴的な長さを持たない図形の大切な性質は、自己相似性である。自己相似性とは、考えている図形の一部を拡大してみると、全体と同じような形になっているということである。図 1.1.1 のコッホ曲線の区間  $[0, \frac{1}{3}]$  における図形を 3 倍に拡大した図形を思い浮べてほしい。拡大した図形はもとのコッホ曲線と全く一致する。同様のことは、 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  における図形に対しても言える。また、区間  $[0, \frac{1}{9}]$  における図形を 9 倍すればやはりもとの同じ図形が得られるし、更に小さな部分についても同様である。いくら小さな部分でも、そこを

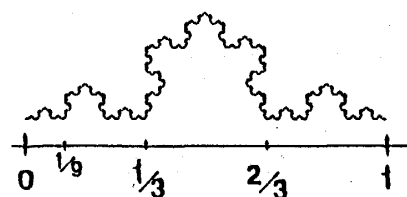


図 1.1.1 コッホ曲線

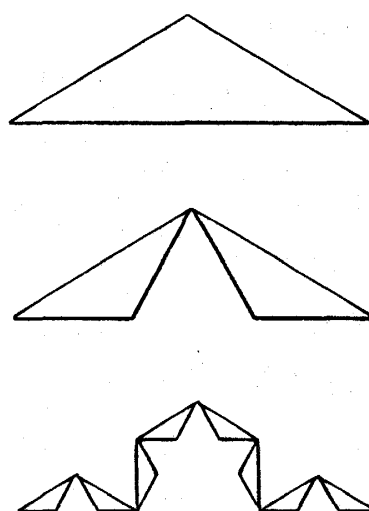


図 1.1.2 コッホ曲線を線分(——)と三角形(——)で近似する。

適当な大きさに拡大すればもとと同じ図形が得られるわけである。

この性質はコッホ曲線に限られるわけではなく、先程述べた積乱雲についても言える。つまり、雲の一部を望遠鏡等で拡大して観測しても、肉眼で見たのと同じような形に見えるはずであり、さらに倍率をいろいろ変えても、観測される形はどれも似たようなものになっているはずである。ただし、雲の場合は、コッホ曲線のように部分と全体が全く相似形になっているのではなく、同じような複雑さを持った形に見えるのであり、統計的な意味で自己相似になっているのである。

## § 1.2 フラクタル

特徴的な長さを持たない形の例は、積乱雲やコッホ曲線の他にも沢山知られている。例えば、身近なものでは海岸線や山の起伏や川の形等がそうである。実際、地図や航空写真を見ても、建物や道路など人工的なものがない限り、その縮尺がどれくらいなのかは見当がつかない場合が多い。それ以外にもある種の植物や、動物の体内にある肺や血管等の複雑に枝分かれした構造にも特徴的な長さはない。自然界に存在するものだけではなく、後で見るようにコンピュータによってもこのような図形は沢山作り出すことができる。これらの特徴的な長さを持たない図形や構造はフラクタルと総称されている。フラクタル (Fractal) という言葉は、マンデルブロ (B. B. Mandelbrot) が作り出した言葉であるが<sup>1)</sup>、語源はラテン語の形容詞 fractus である。この派生語である fractional (小数の) や fracture (破碎) などの英語からも推測できるように、fractus は物がこわれて不規則な破片になった状態を表わしている。従って、フラクタルという言葉に対しても、小さな破片や大きな破片が沢山集まったような状態を思い浮かべておけば、大きな誤解は生じない。しかし、フラクタルという言葉は生まれたばかりであり、細かいニュアンスは専門家ひとりひとりみな異なっていると言っても過言ではない。この論文では、フラクタルに特に厳密な定義は与えずに、全体を通じてフラクタルを浮き彫りにしていきたいと思う。

特徴的な長さを持つ形の大切な性質は滑らかさであることを先程述べた。特徴的な長さよりも小さな部分を滑らかに近似しても全体の特徴を失うことはないからである。これに対し、フラクタルは滑らかさを完全に否定している。いくら拡大してみても、もとと同じように複雑なのであるから、接線の引きようがなく、微分が定義できないのである。つまり、フラクタルを考えるとすることは、至る所微分が定義できないような形を取り扱うことを意味している。

微分を否定することは、歴史的には非常に画期的なことであろう。それは、数学・物理学の歴史を振り返ってみても明らかである。古代エジプトにおいて始まった幾何学は、ギリシアで大きく開花したが、当時扱われていた図形はコンパスと定規によって描けるものだけであった。

物体を投げたときの軌跡すら、線分と円弧の組み合わせで表わそうとしていた。勿論、そこで扱われていた形は滑らかなものばかりであった。ニュートン以降、微積分と幾何が結びつき、より複雑な形を正確に表わすことが可能となった。現在においては微積分の重要性は極めて大きく、それなしでは物理学の大部分が基盤を失ってしまう恐れすらある。非常に美しく、また一般性の高い理論として有名なアインシュタインの重力の理論でさえも、小さな領域では空間はまっすぐであると近似できることを大前提としている。従ってフラクタルは、彼の理論体系には馴染まない。我々がこれから扱おうとしているフラクタルは、そういう意味で全く新しいものの見方を要求しているのである。

今までの物理学は、大きな極限である宇宙と小さな極限である素粒子の解明に沢山のエネルギーを費やし、多くの知識を得てきたが、我々の日常生活になじみの深い中位の大きさの現象については、あまり深い考察がされていない。これは決して中位の現象が面白くない為ではなく、大きな極限や小さな極限の方がものがとが考えやすくなる為であろう。宇宙や素粒子には特徴的な大きさというものがあると期待されるので、その特徴的な大きさのものだけを残して、他を無視してしまうような近似が使えるからである。それに対し、中位の大きさの現象は、本質的に多体系であって、沢山のものが複雑に相互作用しあっており、しかも特定の相互作用だけを取り出したのでは大切な性質を見失ってしまうことが多い。そこでは解剖学的方法はほとんど無力なのである。人間の複雑微妙な心理を解明しようとする時に、メスや顕微鏡が役に立たないのと同じことである。そして精神分析学が人間の心理の解明に大きな手がかりを与えてくれたように、フラクタルの考え方が中位の大きさの複雑な現象の解明への重要な鍵となる。ことが期待されている。

フラクタルの考え方の基本は、特徴的な長さの無さ、あるいは自己相似性であるが、そういう見方は以前から気づかれていた。例えば、寺田寅彦は金属やガラスの割れ目を観察している時に次のようなことを述べている<sup>2)</sup>

「面白いことに、その円錐形のひびわれを、毎日のやうに顕微鏡で覗いて見てみると、それが段々に大きなものに思はれて、今では一寸した小山のやうな感じがする。……それが益々大きなものに見えて来るのである。実際此山の高さは一分の三十分の一よりも小さいものに過ぎない…」

彼は、このように小さな世界と大きな世界の類似性を見出しているが、残念ながらそれを発展させることはできなかった。自己相似性の考え方を発展させる為には、定性的な記述に止まらずに、定量化し、可視化する事が必要だったのである。

フラクタルを定量的に表わす量が次節で述べるフラクタル次元であり、その考え方のもと

高安秀樹

なったハウスドルフ次元は今から 100 年程前に生み出されていたのである。しかし、それを自然界に存在するものに適用しようとした点が、マンデルブロの偉大な飛躍であった。また、フラクタルを感覚的に把握する為には、可視化することが不可欠であり、それはコンピューターなしでは不可能であっただろう。フラクタルは解析学の最大の武器である微分を放棄してしまっているのに、それを補う為にもコンピューターによる数値解析やシミュレーションが不可欠である。フラクタルは、コンピューターによって育てられていると言っても過言ではないだろうし、コンピューターの進化とともにフラクタルの理論も成長していくことが十分に期待される。現代のテクノロジーの最先端であるコンピューターを駆使して、今までの物理学が敬遠していた荒地を開拓しようとしているのがフラクタルである。

### § 1.3 フラクタル次元

フラクタル次元について述べる前に、まず次元とは何かを考えてみよう。経験的に我々は点は 0 次元、直線は 1 次元、平面は 2 次元、そして自分達の住んでいる空間は 3 次元であることを知っている。相対論のような時間と空間を対等に扱う立場をとるならば、我々の住んでいる空間は 4 次元になる。このような経験的次元はみな整数であり、その数字は独立に選べる変数の数、自由度、と一致する。すなわち、直線上の任意の点は 1 つの実数によって表わすことができ、平面上の任意の点は 2 つの実数の組によって表わすことができる。次元を自由度の数とする立場をとるならば、任意の非負の整数  $n$  に対して、 $n$  次元空間を考えることは数学的に全く問題ない。実際、物理学においても質点系の運動を扱う場合には座標と運動量を独立変数と見なし、 $n$  粒子系を  $6n$  次元の空間中の 1 つの点の運動として考えることは力学の基礎である。

自由度の数を次元とする考え方は極めて自然であり、特に疑問の生じる余地はないように感じるかもしれないが、すでに 100 年程前にこの経験的な次元に対して深刻な問題が提起されていた。それは、2 次元であるはずの正方形上の任意の点を 1 つの実数で表わしうることが示されたからである。平面を覆いつくすような重ならない曲線の一番よい例は、ペアノ曲線である。ペアノ曲線は図 1.3.1 のような折れ線の極限として定義される。この曲線は自己相似的で、至る所微分不可能な曲線であり、前節で述べたフラクタルの典型的な例となっている。ペアノ曲線の考え方は、3 次元以上にも適用でき、 $n$  次元空間中の任意の点をひとつの実数で表わすこともできる。つまり、 $n$  次元空間を自由度から考えると 1 次元とみなすことも可能なのである。

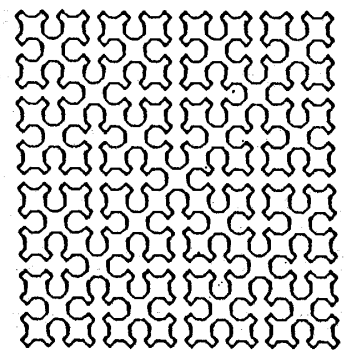


図 1.3.1 ペアノ曲線

このような矛盾を避ける為には、次元の定義を根本的に変えなければならなかった。前節で少し触れたハウスドルフ次元はその為に考え出された次元の代表である。この次元は自由度ではなく、被覆によって定義される。数学的に厳密な定義は次のとおりである。

ハウスドルフ次元； $D > 0$ として、集合 $E$ を直径が $\varepsilon > 0$ より小さい可算個の球によって覆う。このとき、各球の直径を $d_1, d_2, \dots, d_K$ とすると、 $D$ 次元ハウスドルフ測度は、

$$M_D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \sum_{d_K < \varepsilon} d_K^D$$

によって定義される。この量が0から無限大に遷移する時、 $D$ を集合 $E$ のハウスドルフ次元と呼び $D_H$ と表わす。

このような $D_H$ は、勝手に与えられた図形に対し、唯一存在することが示されている。例えば、面を覆いつくすようなペアノ曲線のハウスドルフ次元は2になっており、経験的な面の次元と一致する。

興味深い点は、この定義による次元の値が必ずしも整数にはならないことである。例えば、前節で示したコッホ曲線のハウスドルフ次元は $\log_3 4 = 1.2618 \dots$ になることが知られている。非整数の次元は、従来の自由度から決定される次元にしか馴染みのない人には非常に奇異に感じられるかも知れないが、コッホ曲線の次元が1次元（直線）と2次元（面あるいはペアノ曲線）の間の値になっていることは極めて自然であるように思える。この非整数の次元が特徴的な長さをもたないフラクタルの複雑さを定量的に表わすのに最適であることを示したのがマンデルブロである。1次元と2次元の間の次元をもつ図形でも、1に近いもの程単純で、2に近いものほど複雑で込み入った形になっているのである。

非整数値を取り得るような次元は、ハウスドルフ次元だけではなく、他にも幾つか次元の定義の仕方がある。例えば、次に示す容量次元はよく知られている。Kolmogorovによって導入された容量次元は、ハウスドルフ次元と同じように、被覆を基本として定義されている。

容量次元；考えている形を $d$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 中の有界な集合とする。半径 $\varepsilon$ の $d$ 次元球によってその集合を被覆する時、 $N(\varepsilon)$ を球の個数の最小値とする。容量次元 $D_C$ は次のように定義される。

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (1.3.1)$$

この次元もハウスドルフ次元と同様に非整数値を取り得る。 $D_C$ はしばしば $D_H$ と一致するが、異なる値をとることもあり、一般には、

$$D_C \geq D_H \quad (1.3.2)$$

なる関係が成立している。

これらの次元の定義はどちらも数学的に厳密ではある。しかし、物理学に応用するには適さない点もある。例えば、どちらの定義でも被覆する球の半径を0にする極限を考えているが、物理学においては、厳密に長さ0の極限を考えることは、不確定性原理により否定されている。そこで、次元の定義をもう少し物理的に変更する必要がある。

フラクタルに関する論文の中で実際に使われている次元の定義には沢山の種類がある。それは、すべてのものに対して適用可能な次元の定義がまだみつかっておらず、次元を測る対象となるものによって、適用できる次元とできない次元があるからである。厳密なことを言えば、定義の異なるものにはすべて別の名前を付けて区別すべきかも知れないが、今のところ、これらの非整数値を取り得る次元のことをまとめてフラクタル次元と呼んでいるのが現状である。フラクタルという概念は、10年前に生まれたばかりであり、さまざまな発展の可能性を持って成長し続けている段階なので、ある程度の曖昧さには目をつむっていただきたい。

フラクタル次元の定義の仕方は、次の5つに分類できる。

- I. 粗視化の度合を変える方法
- II. 長さ－面積－体積の関係より求める方法
- III. 相関関数より求める方法
- IV. 分布関数より求める方法
- V. スペクトルより求める方法

これらについて説明する前に、共通する注意を述べておく。ひとつは、上限と下限についてである。実際に存在するものの形、例えば雲の形、が特徴的な大きさを持たないフラクタルであると言っても、それが成り立つ大きさには必ず上限と下限がある。地球ぐらいの大きさを基準にすれば、ひとつの積乱雲は点にすぎないだろうし、顕微鏡レベルの大きさを基準にすれば、雲は、小さな水滴の集まりにしか見えず、自己相似的にはなっていない。このように、フラクタル次元が定義できる大きさの範囲にも当然上限と下限があるわけである。この上限と下限は様々な量の発散を抑えこむ効果を持っており、大切ではあるが形式が複雑になり、フラクタルの本質を見逃がしやすくなる危険があるので、以下ではあまり触れないことにする。もうひとつは、I から V までの次元の定義が同一のものに対して、同一の値を与えるかどうかという問題である。このことについて一般論はまだなく、ひとつひとつの事例について調べてみるしかない。しかし、著しく異なる値を与えるような例はまだないようなので、どの方法を使っても、あまり不自然な結果を与えることはないと考えられる。

## I. 粗視化の度合を変える方法

ここではフラクタル図形を円や球、線分や正方形、立方体といった特徴的な長さを持つ基本的な図形によって近似することを考える。例えば、海岸線のような複雑な曲線を長さ  $r$  の線分の集合で近似することを考える。線分で近似するには次のようにすればよい。まず、曲線の一端を始点とし、その点を中心にして半径  $r$  の円を描く。その円と曲線が最初に交わった点と、始点とを直線で結ぶ。そして、その交点を新たに始点とみなし、以下同じ操作を繰り返す。(図 1.3.2) このようにして、長さ  $r$  の折れ線によって海岸線を近似するときに必要な線分の個数を  $N(r)$  とする。基準となる長さ  $r$  を変えれば、当然  $N(r)$  は変化する。もし海岸線がまっすぐであるならば、

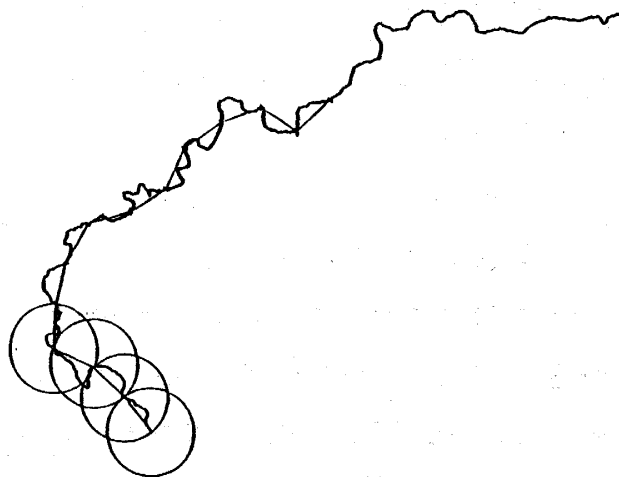


図 1.3.2 海岸線を折れ線で近似する。

$$N(r) \propto 1/r = r^{-1} \quad (1.3.3)$$

なる関係を満たすはずである。しかし、この関係は複雑な形をした海岸線については成立しない。基準の長さ  $r$  を小さくすれば、 $r$  が大きいときに見逃がしていた小さな構造が見えてくるので、その分、直線的な場合よりも余計に線分が必要となるからである。コッホ曲線で、その事を確かめてみよう。図 1.1.2 よりわかるように  $N(1/3) = 4$ ,  $N((1/3)^2) = 16$ , ...,  $N((1/3)^n) = 4^n$  という関係を満たしている。すなわち、 $(1/3)^{-\log_3 4} = 4$  であるから、

$$N(r) \propto r^{-\log_3 4} \quad (1.3.4)$$

となっていることがわかる。ここででてきた指数  $\log_3 4$  は、コッホ曲線のハウスドルフ次元と一致している。また、(1.3.3) 式における  $r$  の指数、1 も直線の次元に一致している。従って、一般的に、もしある曲線について、

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1.3.5)$$

なる関係が成立するときには、 $D$  をその曲線のフラクタル次元と呼んでもよいだろう。後でみるように、実際の海岸線やランダムウォークの軌跡のフラクタル次元は、このように測られたものが多い。

似たような方法であるが、曲線でなくとも使え、計算機で計算するにも適した方法がある。それは、空間を一辺が  $r$  の細胞に分割し、考えている形の一部を含むような細胞の数  $N(r)$  を

高安秀樹

数える方法である。例えば、平面上の点の分布のフラクタル次元を求めることを考えてみる。まず、平面を間隔  $r$  の格子によって一辺が  $r$  の正方形に分割する。そして、その平面上において少なくとも 1 つの点を含むような正方形の個数を数え上げ、それを  $N(r)$  とするのである。(図 1.3.3) もしも  $r$  をいろいろ変えたときに、

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1.3.5')$$

なる関係を満たす場合には、この点の分布は  $D$  次元的存在であるということになる。直線や平面の場合のように  $D$  が整数値をとるときには、経験的な次元と一致することは明らかであろう。

この方法は、点の分布、曲線の形だけに適用されるのではなく、川のように沢山の分岐を含む図形の解析などにも適用でき、非常に一般性の高い方法である。

この方法をさらに拡張したような次元として、情報量次元と呼ばれている量がある。これは、確率的な点の分布に対して有効である。空間を、前と同じように 1 辺が  $r$  の細胞に分割し、 $i$  番目の細胞に点が入る確率を  $P_i(r)$  とする。これは、空間を長さ  $r$  で粗視化して観測することに相当する。このとき、全情報量  $I(r)$  は、次式によって与えられる。

$$\sum P_i(r) = 1$$

$$I(r) = - \sum P_i(r) \log P_i(r) \quad (1.3.6)$$

もしも、 $r$  を変えたときに、

$$I(r) = I_0 - D_I \cdot \log r \quad (1.3.7)$$

という変化をするとき、 $D_I$  をこの分布の情報量次元と呼ぶ。この定義の意味は一見わかりにくいかもしれないが、 $D_I$  が整数値をとる場合には、経験的な次元と一致することは、容易に確かめられる。例えば、点  $d$  次元空間を一様に埋めるような分布をしている場合を考えてみる。 $P_i(r)$  は細胞の大きさに比例するので、 $P_i(r) = P_0 \cdot r^d$  とおける。これを (1.3.6) 式と (1.3.7) 式に代入することにより、 $D_I = d$  となることがわかる。

(1.3.5') 式によって定まる次元  $D$  と、情報量次元  $D_I$  は、どちらも点の分布に対する次元を与えているが、一般的に両方の間には次の不等式が成立する。<sup>3)</sup>

$$D \geq D_I \quad (1.3.8)$$

(1.3.5') 式では、ひとつの細胞内に点が 1 つしかなくても、また沢山あっても同じ扱いとし、

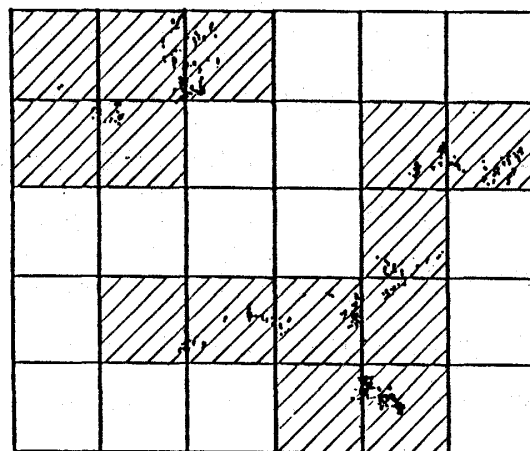


図 1.3.3 正方形による粗視可。

考えている点を正方形(斜線)の数数える。

( 1.3.7 ) 式の方では各点を同じ重みで処理している。この為、( 1.3.5' ) 式の方は ( 1.3.7 ) 式に比べ、粗視化した構造が複雑に見えることを上の不等式は示している。

## Ⅱ. 長さ—面積—体積の関係より求める方法

この方法は、フラクタルが非整数次元の測度を持つことを利用して、次元を定義する。

立方体の一辺の長さを 2 倍にすると、2 次元測度である表面積は、 $2^2$  倍になり、3 次元測度である体積は  $2^3$  倍になる。従って、もし単位長さを 2 倍にしたときに、 $2^D$  倍になるような量があったとすれば、それは、 $D$  次元測度を持つと言ってもよいだろう。

再びコッホ曲線を例にとりて考えてみる。この場合に非整数次元の測定を持つ量は、曲線の長さである。実際、単位長さを 3 倍にしたとき、曲線の長さはもとの  $4 = 3^{\log_3 4}$  倍になる。つまり、この曲線の長さは  $\log_3 4$  次元の測度を持っているわけである。この曲線の長さを普通の 1 次元測度で測ろうとすると、どんな小さな部分に対しても長さは無限大となってしまうが、それはこの曲線の測度が 1 よりも大きいことより、当然の帰結である。一般に、 $D$  次元の測度を持つ形のフラクタル次元は  $D$  であるとしてもよいので、コッホ曲線に対しては、この測度より定まる次元も、他の方法から定まる値と同様に  $\log_3 4$  となっている。

長さを  $L$ 、面積を  $S$ 、体積を  $V$  としたとき、次の関係式が成り立っている。

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \quad (1.3.9)$$

この関係式の意味は、 $L$  を  $k$  倍にすると  $S^{1/2}$  も  $V^{1/3}$  も  $k$  倍になるということである。 $D$  次元測度を持つ量を  $X$  とすると、( 1.3.9 ) 式は次のように一般化できる。

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \propto X^{1/D} \quad (1.3.9')$$

この関係式より次元を決めるには、例えば次のようにする。島の面積を  $S$ 、海岸線の長さを  $X$  とする。島の面積は明らかに 2 次元測度を持つ量なので、 $S^{1/2} \propto X^{1/D}$  によって、海岸線のフラクタル次元  $D$  を求めるわけである。 $X$  の次元が未知であるという立場をとるので、少々工夫をしなければ、 $X$  という量を有限に定めることはできない。一番便利でよく用いられる方法は、空間を量子化し、面積  $S$  も長さ  $X$  も自然数にしてしまう方法である。まず、考えている平面をできるだけ細かい格子によって、小さな正方形の集合に分割する。次にそ

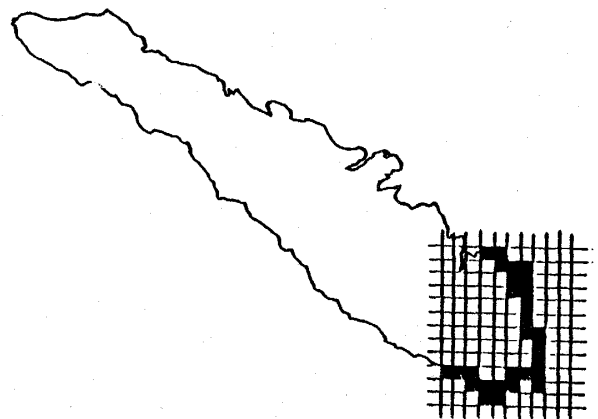


図 1.3.4 島の形をできるだけ小さな正方形で粗視化する。

これらの正方形のうち、少しでも島を含むものを黒くぬる。(図1.3.4) 黒い正方形の個数を $S_N$ とし、白い正方形と接している黒い正方形の個数を $X_N$ とする。単位正方形の大きさが十分小さければ、 $S \propto S_N$ ,  $X \propto X_N$ が成り立つと考えてもよいであろう。沢山の面積の異なる島に対して $S_N$ と $X_N$ を同じ方法で求め、

$$S_N^{1/2} \propto X_N^{1/D} \quad (1.3.10)$$

となるような関係を満たす $D$ が存在すれば、海岸線のフラクタル次元は $D$ であるということになる。ここで単位正方形の大きさが、小さければ小さい程、誤差は少なくなる。粗視化による方法の場合と一番異なる点は、単位正方形の大きさを変えずに、できるだけ小さく固定しておくことである。

同じ問題を面積と海岸線の長さではなく、海岸線の長さと、その直線距離 $L$ とで考えることもできる。大きな海岸線の一部を考えたとき、その海岸線の両端の直線距離 $L$ と、海岸線の長さ $X_N$ との関係を調べるのである。調べる海岸線の部分の大きさをいろいろ変えて、沢山の $L$ と $X_N$ との組み合わせを得たときに、 $L$ と $X_N$ との間に、

$$L \propto X_N^{1/D} \quad (1.3.11)$$

という関係式が成り立っていれば、この $D$ もやはり海岸線のフラクタル次元を与えることになる。

空間に分布している点の集合、例えば宇宙の星の分布に対しても、似たような考え方でフラクタル次元を定義することができる。

ある点を中心として、半径 $r$ の球を考える。この球の内部に含まれる点の総数を $M(r)$ とする。(図1.3.5) もしも、点の分布が直線点であるならば、 $M(r) \propto r^1$ となるであろう。また、もしも点の分布が平面的であるならば、 $M(r) \propto r^2$ となり、3次元空間を一様に点が分布していれば、 $M(r) \propto r^3$ となるはずである。従って、

$$M(r) \propto r^D \quad (1.3.12)$$

という関係をみたすような場合には、点の分布のフラクタル次元は $D$ であると言ってもよいだろう。

ここででてきた $M(r)$ は、必ずしも点の個数でなくともかまわない。例えば、宇宙の質量分布のフラクタル次元を求めようとするときには、 $M(r)$ を半径 $r$ の球内の総質量としてもよい。

実際に、この方法によって点の集合のフラクタル次元を求めようとするとき、ひとつの問題

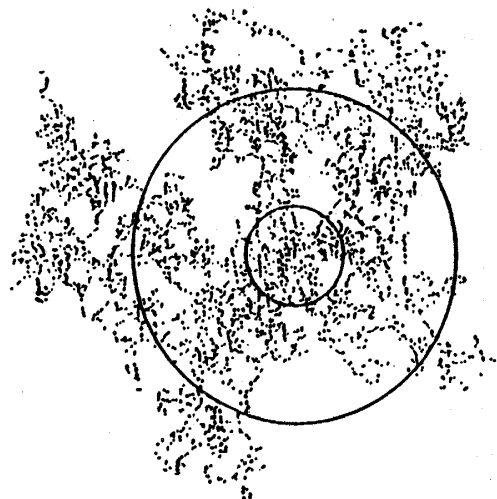


図1.3.5 半径 $r$ の球の内部の点の個数を数える。

が生じる。それは、どこを球の中心にすればよいのかということである。上手に中心を選ばないと、きれいに (1.3.12) 式のような関係が出てこないことが多いからである。幾つか中心を変えて測定し、平均をとるというのもよい方法であるが、一番手っ取り早いのは、点の分布の重心を球の中心にする方法である。もしも点の分布がフラクタルになっているならば、この方法によって (1.3.12) 式の関係を見い出すことができるであろう。

### Ⅲ. 相関関数より求める方法

相関関数は、統計物理学において最も基本的な量のひとつであるが、その関数型からフラクタル次元を求めることもできる。

ランダムに分布しているある量の座標  $\mathbf{x}$  における密度を  $\rho(\mathbf{x})$  とすると、相関関数  $C(\mathbf{r})$  は次式によって定義される。

$$C(\mathbf{r}) \equiv \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (1.3.13)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$  は平均を表わす。平均は、場合に応じてアンサンブル平均でも、空間平均でもよい。分布が一様で等方的な場合には、相関関数は 2 点間の距離  $r$  だけの関数として表わされる。

普通、相関関数  $C(\mathbf{r})$  の関数型としては、指数型  $e^{-r/r_0}$  やガウス型  $e^{-r^2/2r_0^2}$  をモデルとして考えることが多いが、それらはフラクタルにはならない。というのは、どちらも特徴的な距離  $r_0$  があるからである。  $0 < r < r_0$  における相関の落ち方に比べると、  $r_0 \ll r$  における相関の落ち方はずっと急激である。つまり、距離が  $r_0$  よりも近い 2 点は、お互いに強く影響を及ぼし合っているが、  $r_0$  よりも遠く離れた 2 点はお互いにはほとんど無関係になっているということである。

それに対し、分布がフラクタルになっているときには、相関関数はベキの型になる。ベキの型であれば、特徴的な長さは存在せず、相関の落ち方もいつも同じ割合である。例えば、

$$C(r) \propto r^{-\alpha} \quad (1.3.14)$$

となっていたとすれば、距離が 2 倍離れれば相関は  $1/2^\alpha$  になるが、この関係は距離が大きくても小さくてもいつでも成り立つわけである。このベキの指数  $\alpha$  とフラクタル次元  $D$  との関係は次のようになっている。

$$\alpha = d - D \quad (1.3.15)$$

ここで  $d$  は空間の次元である。この式を確認する為、前節で述べたような質量の分布を考えてみよう。今、質量が  $D$  次元のフラクタル分布になっている場合を考え、ある点から半径  $r$  以内の総質量  $M(r)$  が  $r^D$  に比例している場合を考える。半径  $r$  と  $r + \Delta r$  の間に挟まれた球殻内の

高安秀樹

質量は、 $r^{D-1}\Delta r$ に比例している。一方、その球殻の体積は $r^{d-1}\Delta r$ に比例しているから、その密度は  $\rho(r) \propto r^{D-1}/r^{d-1} = r^{D-d}$  となる。従って、

$$C(r) = \langle \rho(0) \rho(r) \rangle \propto r^{D-d} \quad (1.3.16)$$

となる。

相関関数をフーリエ変換したスペクトル $F(k)$ は、 $0 < d - D < 1$ の場合、次のようなベキの型になる。

$$F(k) = 4 \int_0^\infty dr \cos 2\pi k r \cdot C(r) \propto k^{d-D-1} \quad (1.3.17)$$

これを利用すれば、スペクトル $F(k)$ が、(1.3.17)式のようなベキの型になっている場合には、そのベキの指数から逆にフラクタル次元 $D$ を求めることもできる。

#### Ⅳ. 分布関数より求める方法

月面の写真には、大小様々なクレーターが写っているが、ただ写真を見ているだけでは、縮尺は全くわからない。そこに写っているクレーターの直径は100kmであると言われれば、随分と大きいなあと思い、またもし、50cmであると言われればそんなに小さいのかと思う程度で、特に不自然な感じは抱かない。クレーターの大きさの分布にも、特徴的な長さというものはないのである。このような大きさの分布のフラクタルを考える時には、その分布関数の型からフラクタル次元を求めることができる。

クレーターの直径を $r$ とし、直径が $r$ よりも大きいクレーターの存在確率を $P(r)$ とする。直径の分布の確率密度を $p(r)$ とすれば、

$$P(r) = \int_r^\infty p(s) ds \quad (1.3.18)$$

という関係を満している。写真や図の縮尺を変えるということは、 $r \rightarrow \lambda r$ という変換をするのに対応する。従って、縮尺を変えても分布型が変わらない為には、任意の $\lambda > 0$ に対して、

$$P(r) \propto P(\lambda r) \quad (1.3.19)$$

という関係が成立しなければならない。(1.3.19)を常に満たすような $r$ の関数型は、次のようなベキの型に限られている。

$$P(r) \propto r^{-D} \quad (1.3.20)$$

ここで現われるベキの指数 $D$ が分布のフラクタル次元を与えることは、次のように考えれば理解されるだろう。粗視化によって、大きさ $r$ 以下のものが見えなくなっている場合を考えると、見ているものの数は $P(r)$ に比例しているだろう。粗視化の度合を変えて、大きさ $2r$ 以下のものが見えなくなったときには、見えているものの数は $P(2r)$ に比例し、その数は大きさ $r$ で粗視化した場合の $2^{-D}$ 倍になっている。一般に大きさ $r$ で粗視化したとき見えているものの個数

を  $N(r)$  とすれば、 $N(r)$  は  $P(r)$  に比例するので、ここに現われる  $D$  が、粗視化によるフラクタル次元の定義と一致するのである。

( 1.3.20 ) 式において注意しなければならないのは  $r \rightarrow 0$  で  $P(r)$  が発散することである。この困難を回避するには、2つの立場がありうる。ひとつは、 $r$  に関する下限を設定し、 $P(0) = 1$  であるように規格化する立場である。もうひとつは、特に下限を設定しないかわりに、 $P(r)$  を単独で用いずに、上の議論のように2つ以上の  $P(r)$  の比を考える立場である。下限を導入して規格化しない不安が残るかも知れないが、實際上、後者の立場をとっても特に不都合は生じない。

社会科学の分野で知られているジップの法則は、フラクタルと密接な関係がある。ジップの法則というのは、日本の都市を人口の順位に従って並べたとき、人口と順位との積がほぼ一定の値になるというような例に見られるように、ある塊まりの分布を考えたときに、 $k$  番目に大きい塊まりの量が、 $k^{-1}$  に比例するという法則である。この法則は、都市の大きさだけでなく、湖の大きさの単語の頻度等、いろいろな分野で成り立つことが知られている。<sup>4)</sup> この法則は、( 1.3.20 ) のような分布の特殊な場合として理解することができる。( 1.3.20 ) 式の型の分布を仮定すると、塊まりの大きさ  $r$  とその大きさの順位  $k$  には、次のような関係が成り立つ。

$$r \propto k^{-1/D} \quad (1.3.21)$$

これは、順位  $k$  は大きさ  $r$  以上のものの個数  $N(r)$  に他ならないので、( 1.3.5' ) 式を単に書き換えたものとも考えることもできる。( 1.3.21 ) において、 $D = 1$  のとき、ジップの法則になるのである。

## V. スペクトルより求める方法

時間的または空間的にランダムな変量の統計的な性質を実際に調べるとき、変動を波数で分解したスペクトルは比較的簡単に得られることが多い。変動を電気信号に変換しておけば、後はフィルターを通すだけで、パワースペクトル  $S(f)$  に比例した量が得られるからである。ある変動がフラクタルかどうか、また、フラクタルならばそのフラクタル次元は幾つか、という問題はスペクトルを調べることによっても明らかにできる。

観測の粗視化の度合を変えるということをスペクトルの立場から見れば、カットオフ周波数  $f_c$  を変えることになる。ここで、カットオフ周波数というのは、それよりも細かい振動成分を切り捨てる下限のことである。従って、ある変動がフラクタルであるということは、カットオフ周波数  $f_c$  を変えてもスペクトルの形が変わらないということである。このことは、スペクトルの形が観測の尺度を変える変換  $f \rightarrow \lambda f$  に対して不変であることと同値であり、そのような性質

高安秀樹

を持つスペクトル  $S(f)$  は次のようなべきの型に限られる。

$$S(f) \propto f^{-\beta} \quad (1.3.22)$$

スペクトルがこのようなべきの型になっているとき、このべきの指数  $\beta$  とフラクタル次元の関係については以下のようなことが知られている。例えば、時間の関数としてみた電圧  $V(t)$  の変動のグラフを考える。この曲線のスペクトルを考えたとき、曲線のフラクタル次元を  $D$  とすると、

$$\beta = 5 - 2D \quad (1.3.23)$$

という関係が成り立っている<sup>1, 4)</sup> ( $1 < D < 2$ ) 電気回路だけでなく、種々なところで普遍的に観測されている  $1/f$  雑音<sup>4)</sup> は、 $\beta = 1$  の場合であり、そのフラクタル次元は  $D = 2$ 、つまりグラフはほぼ 2 次元的曲線になることがわかる。地形や固体の表面などの曲面を考える場合には、次のように拡張される。曲面をある平面で切ったときの断面のグラフのスペクトルを  $S(f)$  とする。例えば、地形の場合ならば、2 点間を直線で結び、その線に沿った高低の変動のスペクトルを  $S(f)$  とすると、地表のフラクタル次元  $D$  ( $2 < D < 3$ ) は次の関係を満たす<sup>1)</sup>

$$\beta = 7 - 2D \quad (1.3.24)$$

これは、曲面の変動が等方的であるならば、曲面のフラクタル次元は、断面のフラクタル次元に 1 を加えるだけでよいからである。

ここで注意しておかなければならないのは、Ⅲ．相関関数より求める方法、のところまででできたスペクトル  $F(k)$ 、(1.3.17) 式との関係である。 $F(k)$  と  $S(f)$  は共に相関関数をフーリエ変換したスペクトルでありながら、フラクタル次元  $D$  に関して異なる型になっていることは、混乱を招くかもしれない。しかし、両者はもともと異なる量を扱っているのである。同じ記号  $D$  を使っているが、 $F(k)$  における  $D$  はある物質の空間的な分布の次元を表わし、 $S(f)$  の  $D$  はグラフの曲線の次元、又は曲面の次元を表わしている。従って、 $F(k)$  と  $S(f)$  の相異は何ら矛盾を含むものではない。

## § 1.4 基本的なフラクタル

ここでは、コッホ曲線以外の基本的なフラクタルを幾つか紹介しよう。

### ○カントール集合と悪魔の段階

カントール集合は、コッホ曲線と同じように、フラクタルの紹介の中には必ず顔を出す典型的なフラクタルであり、しかも応用範囲は大変広い。

線分  $[0, 1]$  を 3 等分し、真中の部分  $[1/3, 2/3]$  を消去する。残った線分  $[0, 1/3]$ ,  $[2/3, 1]$  を各々 3 等分し、真中の部分  $[1/9, 2/9]$ ,  $[7/9, 8/9]$  を消去する。さらに残

った線分を各々 3 等分し、真中の部分を消去する。

この操作を無限回繰り返した極限において残った

点の集合をカントール集合という。(図 1.4.1)

区間  $[0, 1]$  にある点のうち、3 進数展開したと

きに、0 と 2 だけしかでてこないような点の集合

と言い換えることもできる。この集合は至る所稠

密ではなく、かつ完全である。すなわち、 $[0, 1]$

内のどんな区間を見ても、この集合の点を含まな

ない有限の区間があり、かつこの集合の極限点は

すべてこの集合に属している。この集合のフラクタル次元が  $\log 2 / \log 3 = 0.6309 \dots$  になる

ことは、上記の操作から明らかであろう。

区間  $[0, 1]$  に一様に分布していたある密度 1 の物質が収縮し、区間  $[0, 1/3]$  と区間  $[2/3,$

$1]$  に集ったとする。この物質の質量は不変であるとしておくと、密度は区間  $[0, 1/3]$ ,

$[2/3, 1]$  では  $3/2$ , 区間  $[1/3, 2/3]$  では 0 になる。さらにこの物質が収縮し、区間  $[0,$

$1/9]$ ,  $[2/9, 1/3]$ ,  $[2/3, 7/9]$ ,  $[8/9, 1]$  に集まったとすれば、この区間上での密

度は  $(3/2)^2$ , その他の点では 0 になる。この収

縮過程が無限に続いた極限における密度分布を表

わす関数を  $c(x)$  とする。 $c(x)$  は、カントール集合

以外の点では値を持たないので、ほとんど至る所

で 0 である。悪魔の階段と呼ばれている関数  $d(x)$

は  $c(x)$  の積分として定義される図 1.4.2 のような

関数である。

$$d(x) = \int_0^x c(s) ds \quad (1.4.1)$$

この関数は、見てもわかるように、ほとんど至る

所微分が 0 になっている。こんな奇妙な関数を考

えることに意味があるのかという疑問を持たれる

方もいるかもしれないが、あとの章で見るように、この関数が物理学のいろいろな分野で実際

に使われており、また実験的にも観測されているのである。

#### ○ド・ウィースのフラクタル

ド・ウィース (De Wijs) は岩石中の鉱物の分布を研究していて、その分布が次のようなものでよく近似されることを発見した。<sup>1)</sup>

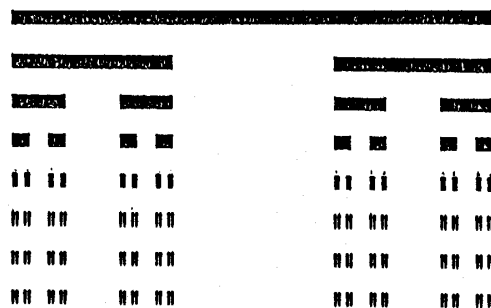


図 1.4.1 カントール集合。

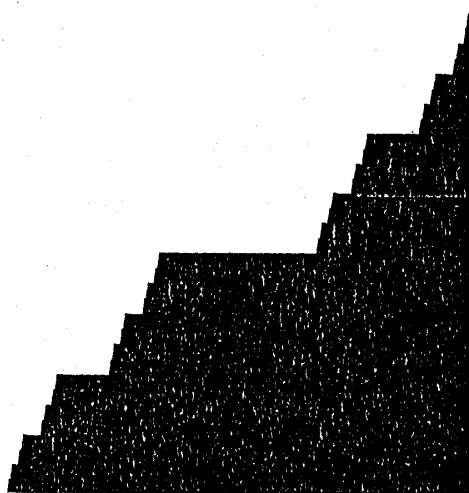


図 1.4.2 悪魔の階段。

ひとつの岩石に含まれるある鉱物の総量を $M$ とする。この岩石を2等分したとき、各々の岩石には $\alpha M$ と $(1-\alpha)M$ ずつ鉱物が含まれる。さらに各々の岩石を2等分し、4つの破片に分けたとき、各々の岩石に $\alpha^2 M$ ,  $\alpha(1-\alpha)M$ ,  $(1-\alpha)\alpha M$ ,  $(1-\alpha)^2 M$  ずつの鉱物が含まれる。ここで比率 $\alpha$ が0.5ならば、鉱物の分布は一様であるが、実際には0.5ではなく、しかも分割するステップに依存しない一定の値となる。(図1.4.3)このような分布の極限をド・ウィースのフラクタルと呼ぶ、フラクタル次元は、

$$D = -\{\alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)\} \quad (1.4.2)$$

によって与えられる。<sup>1,5)</sup>  $\alpha = 0.5$  のとき、 $D = 1$  であり、

その他の場合には $D < 1$ で、特に $\alpha = 1$  or  $0$  のときには $D = 0$ となる。ド・ウィースのフラクタルはカントール集合に似ているが、異なる点は、 $D \approx 0$ である限り任意の区間の積分が有限であることと重みに強いかたよりのあることである。ある鉱物、例えば金などはどこの岩石にもほんのわずかかも知れないが、必ず含まれている。しかし、全世界の金のうちの大部分はある特定の地方に集中し、さらにその地方の中でも特に金の密度が高い場所は狭い領域に限られているのである。

#### ○シルピンスキーのギャスケット

これは、カントール集合を2次元に拡張したようなフラクタルである。言葉で説明するよりも、図1.4.4を見ていただいた方がどういうものかわかっていただけと思う。図1.4.4のフラクタル次元は、

$$D = \log 3 / \log 2 \approx 1.585 \quad (1.4.3)$$

という値になっている。このようなモデルも統計力学等の問題と結びつき、物理学の研究の対象となっている。<sup>6)</sup>

#### ○レビのダスト

これまでは規則的なフラクタルばかりを紹介してきたが、勿論ランダムなモデルもある。レビのダストは星の分布のモデルとして考えられた。<sup>1)</sup> 図1.4.5はマイコンによって作られたレビのダストの例であるが、なんとなく渦巻き星雲を彷彿させる。レビのダストは、次のようなランダムウォークによって作られる。方向は全くランダムで、歩幅 $r$ の分布が(1.3.20)式の

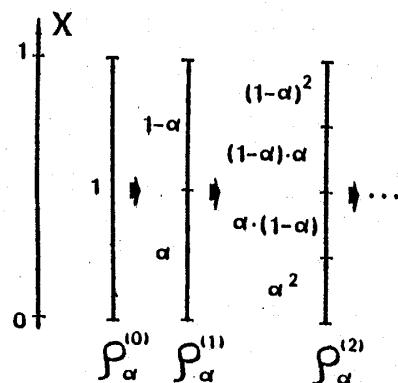


図1.4.3 ド・ウィースによる鉱物の分布のモデル。

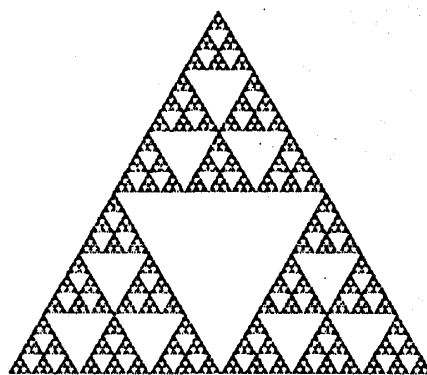


図1.4.4 シルピンスキーのギャスケット。

ようにベキの型で与えられるようなランダムウォークを考える。止まった点を順次プロットしていったものが、図に示されているようなレビダストである。 $r$ の分布のベキの指数 $D$ が点の分布のフラクタル次元に一致することは、例えば粗視化の度合を変える操作を考えればすぐに確められるであろう。図1.4.5だけではわかりにくいかもしれないが、各点は大きな塊まりを形作りながら分布していることがわかる。宇宙の星が、惑星系、銀河団などいろいろな大きさの塊まりになって分布していることの類似性は、非常に興味深い。

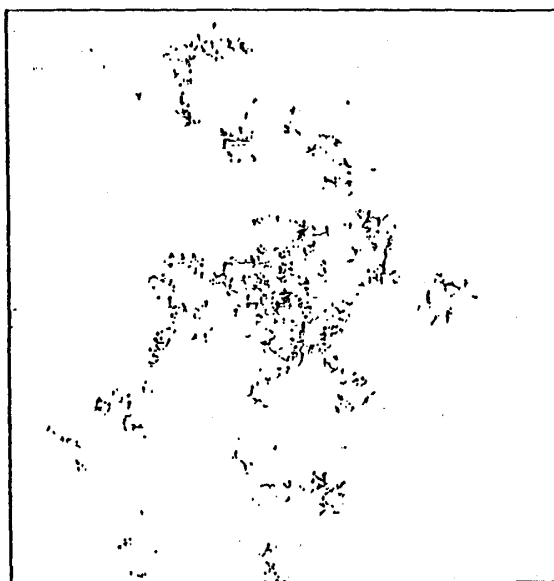


図1.4.5 レビのダスト。星の分布モデル。

## 第2章 自然界のフラクタル

この章では、自然界に存在するフラクタルの紹介をする。ただし、ここでは自然界の意味を拡大して考え、人間が実験などによって人工的に作った物も含めることにする。自然でないものは何かと言えば、それは3章で紹介するコンピューターの作るフラクタルと、4章で紹介する理論的なフラクタルである。数値的に作られたようなものでなく、とにかく実際に存在するものをここでは扱うことにする。

内容は大きく分けると、地学関係、生物関係、宇宙関係、物理関係そして、その他の話題に分けられる。自然科学全般、さらに社会科学の方面で、フラクタルの概念がどのように使われているかを知ってもらうのが、本章の目的である。

### § 2.1 地学関係

#### ○地形

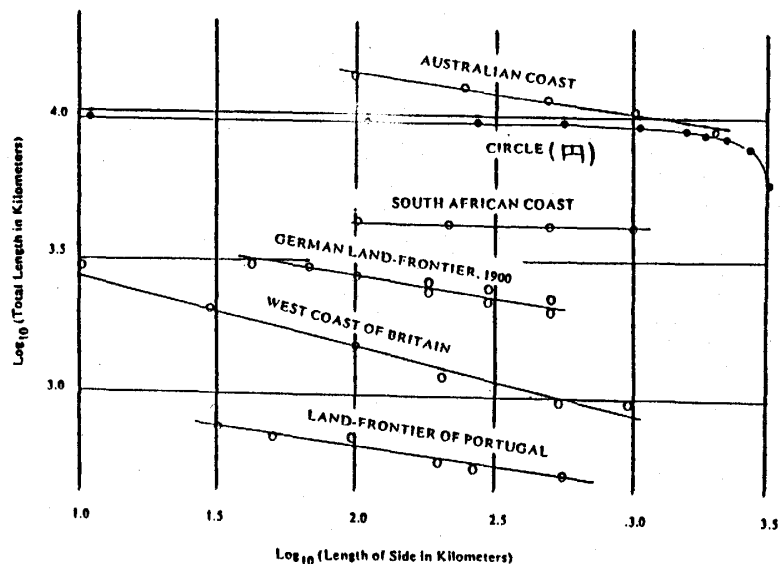
海岸線の形がフラクタルであることは1章でも触れたが、ここでは実際のデータを紹介しよう。図2.1.1はものさしの長さをいろいろ変えたときの海岸線の長さをlog-logでプロットしたものである<sup>1)</sup>。どの海岸に対しても、点はほぼ一直線上に並ぶことがわかる。海岸線の長さは、ものさしの長さ $r$ と、ものさしをあてた回数 $N(r)$ の積であるから、グラフの直線の傾き $a$ と海岸線のフラクタル次元 $D$ は、次の関係にある。

$$a = 1 - D \quad (2.1.1)$$

図2.1.1 海岸線の長さともものさしの長さの関係<sup>1)</sup>

$D$ の値は海岸ごとに多少異った値をとるが、だいたい $1 < D < 1.3$ の範囲に入る。リアス式海岸のように複雑な海岸線程、 $D$ が大きな値をとることは言うまでもないだろう。

海岸線のデータがあまりきれいに直線上にのるので、別にフラクタル曲線でなくても、log-logプロットをすると直線的に点が並ぶのではないかと疑う方もいるかも知れないが、図2.1.1の円に対するプロットを見ていただきたい。プロットされた点の分布は、特徴的な長さのあたりで明らかに曲っており、とても直線上にのっているとは解釈できない。円に限らず、特徴的な長さを持つ図形に対してはlog-logプロットで直線的に点が並ぶことはないのである。



山や谷などの地表の凹凸もフラクタルである。マンデルブロの本<sup>1)</sup>を見れば、人工的につくったフラクタル曲面がいかに現実の地形と似ているかがわかっていただけるはずである。海岸線は、地表の凹凸を一定の高さで切った断面であるから、海岸線の次元を  $D$  とすれば、地表の次元は  $D+1$  となることが期待される。

山などよりもずっと小さな地表の凹凸もフラクタルになっている。「ゆらぎの世界」<sup>4)</sup>には、路面の凹凸のパワースペクトルが  $f^{-2.5}$  型になる話が載っている。前の章の (1. 3. 24) 式によれば、これは路面がフラクタル曲面であり、その次元が 2.25 であることを意味していることになる。この値は、上の推定から判断しても妥当な値と言えるだろう。

#### ○ 川

川もまた典型的なフラクタルである。蛇行や分岐の様子は、全体を見ても支流を見てもあまり変わらないからである。

河川地形学の分野では、Hack の法則という有名な経験的法則がある。それは、本流の長さ  $L_m$  とその地点までの流域面積  $A$  との間に次の関係式が成り立つというものである<sup>7)</sup>

$$L_m = 1.89 A^{0.6} \quad (\text{km, km}^2) \quad (2. 1. 2)$$

$A$  の指数が 0.5 でないことは、本流がフラクタル曲線になっていることの裏づけとなる。この式は、

$$A^{1/2} \propto L_m^{1/1.2} \quad (2. 1. 2')$$

と書き換えることができるので、(1. 3. 10) 式より、本流のフラクタル次元は 1.2 であることがわかるのである。

川のフラクタル次元は、名古屋大学のフラクタル研究会によって詳しく調べられている。それによると、日本や世界のいろいろな川の本流のフラクタル次元は、粗視化の度合を変える方法 (1. 3. 15) 式によって測ってみても、1.1 ~ 1.3 程度になっており、上記の値とほぼ一致した結果を与えている<sup>8)</sup>

本流だけでなく、分岐を含めた川の次元はどうなっているだろうか？ 地図から川だけをトレーシングペーパーに写し取り、粗視化の度合を変える方法によって次元を測った例がある<sup>9)</sup> 図 2. 1. 2 が写し取った川 (アマゾン川) の例であり、この図形に対して粗視化の度合  $r$  と被覆する正方形の個数  $N(r)$  を  $\log - \log$  プロットしたのが図 2. 1. 3 である。この場合にも各点は、ほぼ一直線に並んでおり、その傾きからこの川の次元が 1.85 程度であることがわかる。砂漠の中を流れるナイル川に対しても同じ事をしてみると、次元はおよそ 1.4 になる。雨の少ない

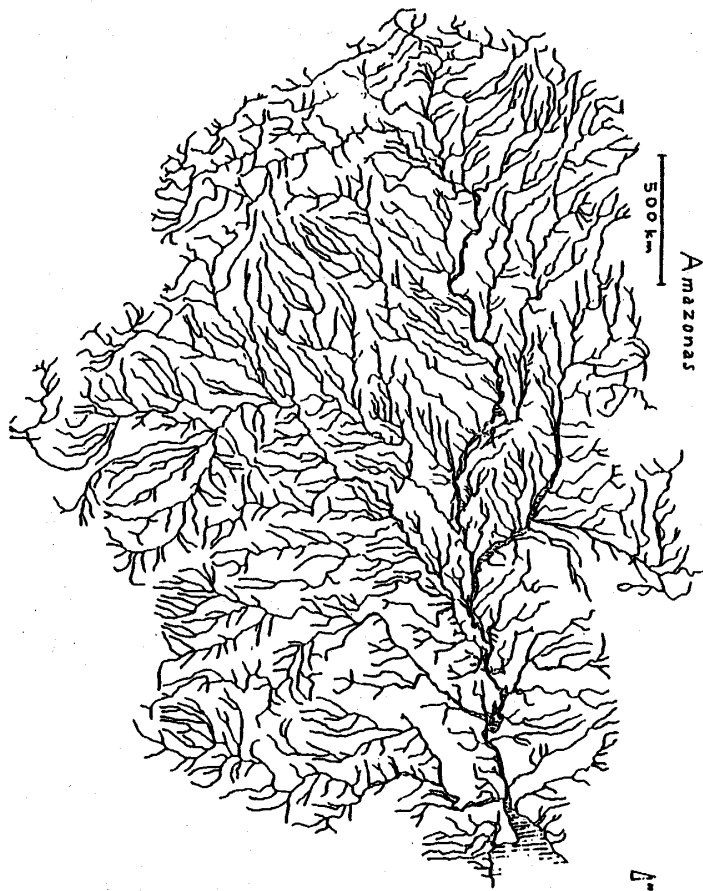


図 2.1.2 アマゾン川の形

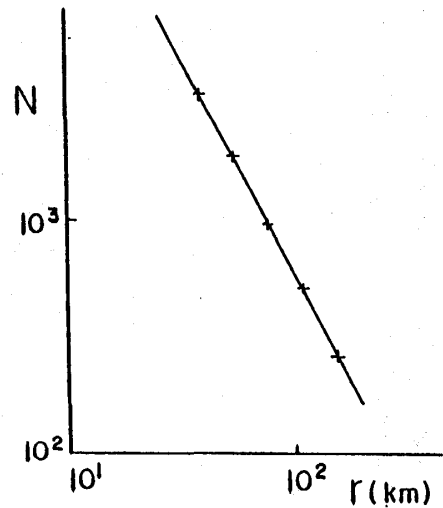


図 2.1.3 粗視化の度を変えたときの被覆正方形の個数(アマゾン川)

地方の川は分岐が少なく、雨の多い地方の川には沢山の分岐があることをフラクタル次元は定量的に表わしていると言えそうである。

仮に一年中、ひっきりなしに雨が降っている場所があったとしたら、そこにはどんな川ができるであろうか？ 地面の上の任意の点に降ってきた雨水は、直ちに川によって運び出されなければ、雨水が溜ってしまい、定常的な状態が保てないであろう。つまり、任意の点が川に直接つながっていなければならないわけである。従って、このような場合には、川は地図上を完全に覆いつくすような形、換言すればフラクタル次元が2である形となるはずである。

川の流量の時間的変動もまたフラクタルになっていることが知られている。H. E. Hurst が調べたナイル川の年間最少水位の変動のデータから推定されたフラクタル次元は、およそ 1.1 である。<sup>1)</sup> 川の流量は降った雨の量に比例すると思われるので、流量の時間的変動がフラクタルであるということは、気候の変動もまたフラクタルであることを意味しているのではなかろうか？

## § 2.2 生物関係

### ○ 肺や血管の構造

フラクタル次元が2よりも大きな曲面の表面積（2次元測度）は、もし上限がなければ無限大となる。この性質をうまく利用した組織が肺である。肺は、周知のように、気管の先から倍々と分岐を繰り返し末端の表面積を非常に大きくしている。人間の肺の場合、そのフラクタル次元は、およそ2.17になっている。<sup>1)</sup> この値は、空間を埋めつくす曲面の次元  $D=3$  と比べるとだいぶ小さい。フラクタル次元が大きい程、表面積を大きくする効率はよくなるが、曲面の凹凸が激しくなり、空気の流れが悪くなるので、その兼ね合いから2.17という数値が出てくるのであろう。

血管もまたフラクタル構造になっている。肺の表面から血液中に溶け込んだ酸素を、血管は体の隅々の細胞にまで送り届けなければならない。体内の細胞は3次的に分布しているので、もしすべての細胞にまで血管が直接つながっているとすれば、血管のフラクタル次元は3でなければならない。

血管の分岐に関して、次のような次元に似た量 $\Delta$ を調べた例がある。図2.2.1のように、直径 $d$ の血管が直径 $d_1$ と $d_2$ の血管に分岐したとする。このとき、

$$d^{\Delta} = d_1^{\Delta} + d_2^{\Delta} \quad (2.2.1)$$

を満たす数として $\Delta$ を定義する。実際の血管の場合、8段目から30段目までの分岐では、この $\Delta$ の値がほぼ一定で $\Delta=2.7$ となることが知られている。<sup>1)</sup> (2.2.1)式を満たすような $\Delta$ が2よりも大きい時には、一般に次の不等式が $d, d_1, d_2$ の間に成立する。

$$d^2 < d_1^2 + d_2^2 \quad (2.2.2)$$

この不等式は、分岐した先の血管の断面積の和の方が、分岐する前の断面積よりも大きいことを示している。血液が非圧縮性流体であることを考慮に入れば、このことは、分岐した先の血管中の流速が分岐する前の流速よりも遅いことを意味している。血管の内壁と血液との摩擦によるエネルギーの損失量は、血液の流速に比例すると考えられるので、血管が細い程、流速が遅くなることは合理的である。もしも血管の分岐がこのようになっておらず、例えば $\Delta=2$ で毛細血管中の血液の速度が、大動脈中の速度と同じになっていたならば、心臓のポンプ機能は桁違いに強力でなければならなかったであろう。これに対し、肺の分岐は(2.2.1)式における $\Delta$ がほぼ2になっている。<sup>1)</sup> 1回の呼吸で肺内の気体を外気と入れ換える為には、この条件が必要だからである。

肺や血管以外にも、動物の体の内には、フラクタル構造を持った組織は沢山ある。例えば、脳がそうである。人間の脳の表面には大小の様々なしわがあり、それは 2.73 ~ 2.79 次元のフラクタル構造になっている。<sup>1)</sup> 脳のしわが多い程頭が良いという俗説があるが、フラクタルの立場から言い換えれば、脳のフラクタル次元が高い程高度な思考ができるということになるかもしれない。

#### ○植物の構造と虫の数

パセリやカリフラワーに見られる規則正しい分岐構造は、肺のそれとよく似ており、また、けやきの枝の大小様々な分岐は、川の分岐を連想させる。これらの例からもわかるように、多くの木や草の分岐構造は、フラクタル的性質を持っていると思われる。この予想が実際に正しいことが、最近、モースら<sup>10)</sup>によって幾つかの植物に対して確かめられた。

彼らは、大学のキャンパス内にある木の写真を沢山とり、粗視化の度合を変える方法によって解析した。図 1. 3. 3 のように写真を正方形のますに分割したとき、木の枝を含むますの数が正方形の大きさとともにどう変化するかを調べたのである。その結果、どの植物も近似的にフラクタルになっていることが確認された。得られたフラクタル次元は、アメリカづたの 1.28 から、しゃりんとう（バラ科の低木）の 1.79 までの間の値をとり、全種の平均としては、1.5 程度の値になることがわかった。結論をひと言で言うならば、木の枝はおよそ 1.5 次元のフラクタル構造になっている、ということである。

彼らはさらに考察を進め、植物のフラクタル性とそこに住む節足動物の個体数分布との関係を追究している。小さな虫は、大きな虫が入り込むことができないような植物の表面のすき間を有効に利用することができる。同じ一本の木でも、小さな虫の利用できる表面積は、大きな虫にとっての表面積よりもずっと大きく、そのため、小さな虫程沢山生息できることになるはずである。人間にとっては、植物の表面積が基準となるものさしの長さという関係にあるかは、単に好奇心を刺激する問題でしかないが、そこに住んでいる動物たちにとっては、死活問題なのである。

植物の表面が 2.5 次元の場合を想定してみよう。体の大きさが 0.1 cm の虫は、1 cm の虫よりも、 $10^{0.5} \doteq 3.16$  倍だけ広い面積に住めることになる。動物の新陳代謝量が体重の 0.75 乗に比例するという経験則があるが、これは、動物 1 匹あたり必要とする面積は、その動物の大きさの  $0.75 \times 3 = 2.25$  乗に比例すると言い換えてもよいだろう。これらを合わせれば、大きさが 0.1 cm の虫は、大きさが 1 cm の虫に比べて  $10^{0.5 + 2.25} \doteq 560$  倍だけ沢山生息できることになる。実際に観測される虫の個体数分布は、ほぼベキの分布になっており、この見積りとおよそ一致することが確かめられている。

## § 2.3 宇宙関係

### ○星の空間的分布

星は宇宙空間に一様に分布しているわけではない。銀河を形づくり、また銀河団を形成していることからわかるように、塊まりになって分布する傾向があるようである。マンデルブロの本<sup>1)</sup>によれば、銀河の分布もフラクタルであり、その次元は1.23と見積られている。空間の次元が3であることから考えると、1.23という数字は非常に小さい。しかし、宇宙はすきまだけであり、夜空に浮ぶ星も天球を満たす程はないことを思えば、それ程不自然な値ではないだろう。

最近、ビッグバン直後の宇宙の密度ゆらぎとの関連から、銀河団の空間的分布が話題にのぼることが多い。銀河団は数十～数千個の銀河が集まったものであり、その大きさは、2000万光年程度であるが、その銀河団同志が細長い糸状、あるいは薄い面状のハチの巣のような構造になっているらしいことがわかってきたのである。銀河がほとんど存在しない数億光年ぐらいの大きさの空間も幾つかみつかっており、ボイドと呼ばれている。銀河がこのような分布をしているという事実は、銀河の分布が1.23次元のフラクタルであるという主張を裏づけるものと考えることができるだろう。

### ○クレーター、小惑星の直径分布

1章の中でクレーターの直径の分布について触れたが、ここでは実際のデータを見てみよう。図2.3.1は月の「神酒の海」にあるクレーターの数 $N(r)$ と直径 $r$ との関係をプロットしたものである。<sup>11)</sup> 直径1 kmから100 kmの間に着目すると、非常にきれいに次の関係が成り立っていることがわかる。

$$N(r) \propto r^{-D}, \quad D \doteq 2.0 \quad (2.3.1)$$

ここで $N(r)$ は直径が $r$ よりも大きいクレーターの総数をあらわしているのので、前章の議論から $D=2.0$ をクレーターの直径分布に関する次元とみなしてもよいだろう。 $D \doteq 2.0$ という値は「神酒の海」のクレーターに限らず、月の他の地方のクレーターやさらに火星や金星のクレー

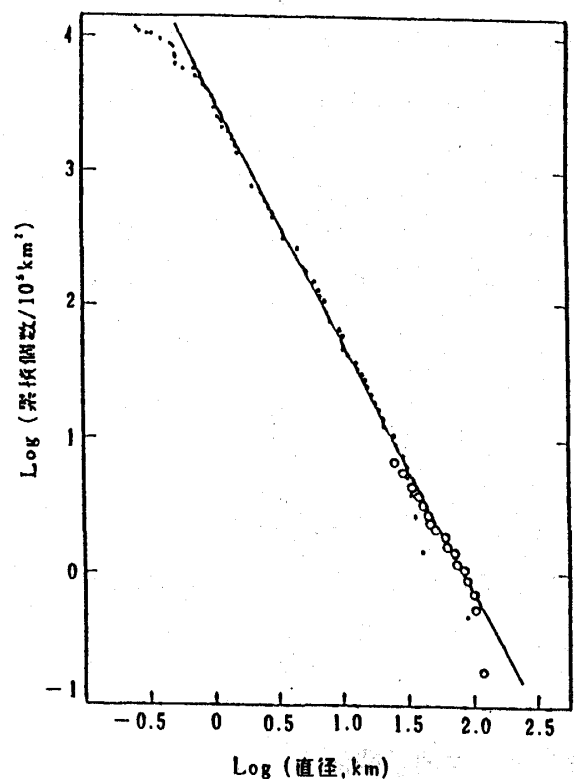


図 2.3.1 クレーターの直径と数の関係<sup>11)</sup>  
 $N(r)$ は直径 $r$ よりも大きなクレーターの数

高安秀樹

ーターについても成立することが知られている。

クレーターが隕石の衝突によって形成されることを考えると、隕石の大きさの分布もフラクタルであることを予想させる。

地球に落下した隕石の質量の分布を測定したデータがある。<sup>11)</sup> 質量の  $1/3$  乗を隕石の大きさに比例する量と近似し、それを大きさの分布に置き換えると、約 100 kg 以上の大きな隕石の分布は確かにベキ法則に従がい、 $D \doteq 2.28$  になっている。

また、木星と火星の軌道の間沢山存在している小惑星の分布についても同じようなことが知られている。小惑星は、直径約 1000 km のセレスを筆頭にして、絶対等級 20 等以上のものだけでも約 7 万個あると推定されている。これらの大きさの分布を調べてみると、(2.3.1) 式のようなベキの関係が成り立っており、 $D \doteq 2.1$  になっているのである。<sup>11)</sup>

このようにクレーターの直径分布、さらにその原因と思われる隕石や小惑星の大きさの分布がほぼ 2 次元的なフラクタル分布になっていることがわかった。さらに、これを裏づけるような実験結果がある。それは、岩石に高速度の弾丸を打ち込んだ時にできる破片の大きさの分布である。藤原ら<sup>12)</sup> の実験結果をもとにすれば、岩石の破片の大きさの分布もやはりフラクタルで、その次元は  $D \doteq 2.0$  になっているのである。従って、隕石や小惑星をある大きさの固まりがこわれた時の破片であると考えれば、すべてを統一的に解釈することができるわけである。破壊の際にベキ分布に従う破片が生じることは、粉砕工学の分野では、Rosin-Rammler の式とか、Gaudin-Schumann の式という名前がよく知られている。<sup>13)</sup> しかし、小惑星のような大きな破片についても同じ式が成立することは非常に興味深い。

フラクタルとは直接の関連はないが、クレーターの形成に関するおもしろい経験則がある。地面に隕石が衝突したときにできるクレーターの直径  $r$  は、隕石の速度  $v$  に関して、次のような関係が成り立っているのである。<sup>14)</sup>

$$r \propto v^{0.58} \quad (2.3.2)$$

隕石の持っていた運動のエネルギー ( $\propto v^2$ ) の一部がクレーター形成以外の為のエネルギーになる為にこのような半端なベキがでるのであろうが、理論的な説明はまだなされていないようである。

## § 2.4 物理学関係

### ○固体表面

地球の表面がそうであったように、多くの固体の表面も、フラクタルになっていることが最

近わかってきた。Avnir ら<sup>15)</sup>の報告によれば、いろいろな物質の表面の75%以上は、数Åから数百Å程度の大きさの範囲でフラクタルになっている。一見滑らかなように見える物体の表面もよく見ると複雑な起伏を伴うフラクタルになっているのである。

彼らは、ものさしの長さを変える方法を拡張して、固体表面のミクロな凹凸の様子を調べた。ものさしの代りに、直径のわかっている分子を物体の表面に吸着させ、吸着した分子のモル数を測定した。分子は物体の表面を一層に覆うように吸着するので、そのモル数を(1.3.5)式における $N(r)$ とみなすことができるわけである。図2.4.1は酸化アルミニウムに対して幾つかの大きさの異なるポリスチレンと窒素を吸着させて調べた結果である。 $r$ と $N(r)$ は両対数グラフ上できれいに直線の上ののっており、酸化アルミニウムの表面が確かにフラクタルになっていることがわかる。グラフの傾きから決まるフラクタル次元は、 $2.79 \pm 0.03$ である。いろいろな物質について調べてみた結果、フラクタル次元は、ほとんど3に近いような大きな値から、2.5程度の中位いの値、そして2に近い小さな値までまんべんなくとることがわかった。物体の表面がフラクタルであるということとは普遍的だが、そのフラクタル次元は、各物体によってまちまちで、普遍的な値を期待することはできない。

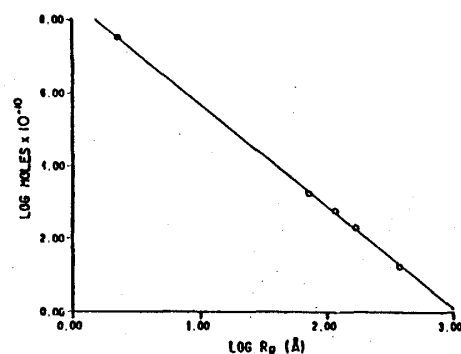


図2.4.1 分子の直径と、固体表面に吸着した分子量。<sup>15)</sup>

### ○凝集体

細かい微粒子が凝集したすすのような固まりも、フラクタル構造になっている。<sup>16)</sup> 図2.4.2 a は、鉄の微粒子の凝集体の電子顕微鏡写真である。ひとつひとつの微粒子の大きさは、およそ35Å程度であり、写真の構造に比べるとはるかに小さい。図2.4.2bのように、この電子顕微鏡写真をコンピューターによってデジタイズし、解析した結果、(1.3.12)式により決まる $D$ の値はおよそ1.5、(1.3.16)式により決まる $D$ の値はおよそ1.6になった。この結果は鉄の微粒子に限らず、亜鉛や酸化ケイ素についても同様であった。ふたつのフラクタル次元の値の違いが誤差によるものなのかそれとも意味のあるものなのかはよくわかっていない。しかし、微粒子の凝集体が、粒子の素材に依存しないようなフラクタル構造になっていることは確からしい。



図2.4.2a 鉄の微粒子の凝集体の電子顕微鏡写真。<sup>16)</sup>

金属イオンの溶けた溶液に電極を入れると、金属が析出してくる。析出して固まった金属は、ちょうど植物のような形をしており、金属樹あるいは、金属葉と呼ばれている。金属葉は液体中における金属イオンの凝集体であり、やはりフラクタル構造を持つことが知られている。<sup>17)</sup>

これらの凝集体のフラクタル構造は、最近強い関心を集め、コンピューターシミュレーション等による興味深い結果が沢山得られている。その結果、微粒子の熱的なランダムウォークと微粒子同志の不可逆な付着を仮定するだけで、図2.4.2aのようなフラクタル構造が作られることが明らかになってきた。シミュレーションの詳細については、次章で紹介することにする。

#### ○高分子

分子量が10000以上の分子を高分子と呼ぶが、それらの複雑な立体構造がX線解析によって明らかになってきた。例えば、鎖状高分子は真っ直ぐには並んでおらず、もつれた糸のような構造になっていることがわかったのである。このもつれた糸のような構造はフラクタルであることが予想され、そのことは次のようにして確かめられた。

鎖式化合物において、官能基に直接結合している炭素は $\alpha$ -炭素と呼ばれている。この炭素の位置はX線解析によって決定しやすい。ある $\alpha$ -炭素を始点として、高分子の鎖を順にたどっていき、始点からの距離が $r$ を越える以前に出会った $\alpha$ -炭素の個数を $N(r)$ とする。 $N(r)$ が $r$ のべきの形になれば、そのべきの指数がフラクタル次元を与えることは1章において述べたとおりである。実際の測定結果では、予想どおり多くの高分子において、 $N(r)$ がべきになっていたのである。

こうして決められた高分子のフラクタル次元は、ミオグロビンの $1.66 \pm 0.04$ や $\alpha$ -ヘモグロビンの $1.64 \pm 0.03$ のように、1.6前後の値をとることが多い。<sup>18)</sup> 全くランダムにもつれた糸の構造は、次章で述べる自己回避ランダムウォークによってモデル化されるが、その場合のフラクタル次元は $5/3 = 1.66 \dots$ となる。このことから、実験の高分子の糸がほとんどランダムにもつれていることがわかる。

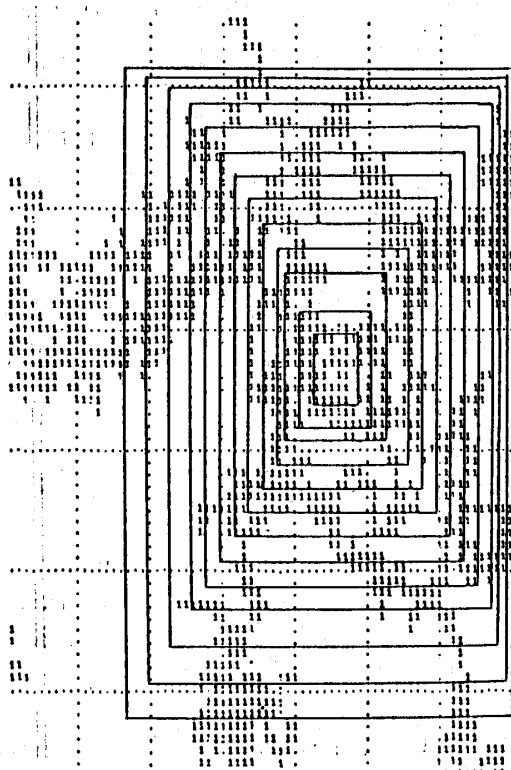


図2.4.2b 図2.4.2aをコンピューターによりデジタイズした結果。<sup>16)</sup>

高分子がフラクタル構造をしていることは、単に幾何学的なおもしろさがあるだけでなく、ラマン散乱のような化学的に重要な特性にも影響を与えている。高分子のフラクタル次元を  $D$  としたとき、ラマン緩和過程の温度依存性が  $T^{3+2D}$  となることが実験的にも理論的にも示されているのである。<sup>18)</sup> ラマン散乱は、分子をバネの集合体とみなしたときの固有振動スペクトルと直接結びついている。バネがフラクタル構造になっている場合には、一般に固有振動スペクトルがフラクタル次元に依存するのである。

#### ○相転移・臨界現象・パーコレーション

相転移における臨界点の近傍では、種々のマクロな物理量、例えば比熱・密度・帯磁率が臨界点からの温度差に関してベキ法則に従うことが知られている。また、ちょうど臨界点上では、これらの量、もしくはこれらを微分した量が発散するという特異な現象が観測される。ミクロな立場から見れば、これらの発散はすべて相関長の発散に起因する。<sup>19)</sup> つまり、その系のミクロな構造において固有の長さが発散し、特徴的な長さがなくなる為に、マクロな物理量にも上記のような特異性が現われるのである。例えば、 $H_2O$  は液相と気相の臨界点 (647K, 218atm) では、非常に小さな水滴から、大きな水滴まであらゆる大きさの水滴が、ドロドロの蒸気の中を漂う白濁した物質となっている。

このような臨界点における物質の構造は、典型的なフラクタルである。そのことを、相転移を起こす最も単純な例としてよく知られているパーコレーションの実験結果を見ることによって確かめてみよう。

金属と絶縁体を混合した薄膜は、工学上重要で、多くの研究がなされている。特に、組成を変えた時に、電気伝導度がどう変化するかという問題は興味深い。金属と絶縁体が全くランダムに分布している場合には、この薄膜の電気伝導度を決めるパラメーターは、薄膜中を占める金属の比率  $p$  だけである。 $p$  が非常に小さい時にはこの膜は絶縁体であり、多少  $p$  を大きくしても伝導度はほとんど変わらない。ところが、 $p$  が 1 よりも小さいある臨界値  $p_c$  に近づくと急激に薄膜の伝導度が上がり、 $p_c$  よりも大きな  $p$  に対しては、伝導度はほとんど金属膜 ( $p = 1$  の場合) と同じ値をとるようになる。この急激な変化は、2 次相転移であり、パーコレーション (浸透) 転移と呼ばれている。

薄膜の電子顕微鏡写真を画像処理した図 2.4.3 を見れば、 $p$  を変えていったときに金属の塊まりの分布がどう変わっていくかがよくわかる。<sup>20)</sup> これらの図において、黒く染められているのは、連結した金属の固まりのうち面積の大きなものの上位 3 つである。 $p$  が増すにつれて、連結した金属の塊まりは大きくなっていくが、 $p = 0.707$  ではまだその塊まりは十分大きくはなく、膜は全体としては絶縁体である。 $p$  がほぼ  $p_c$  に近い値 0.752 になると、連結したひと

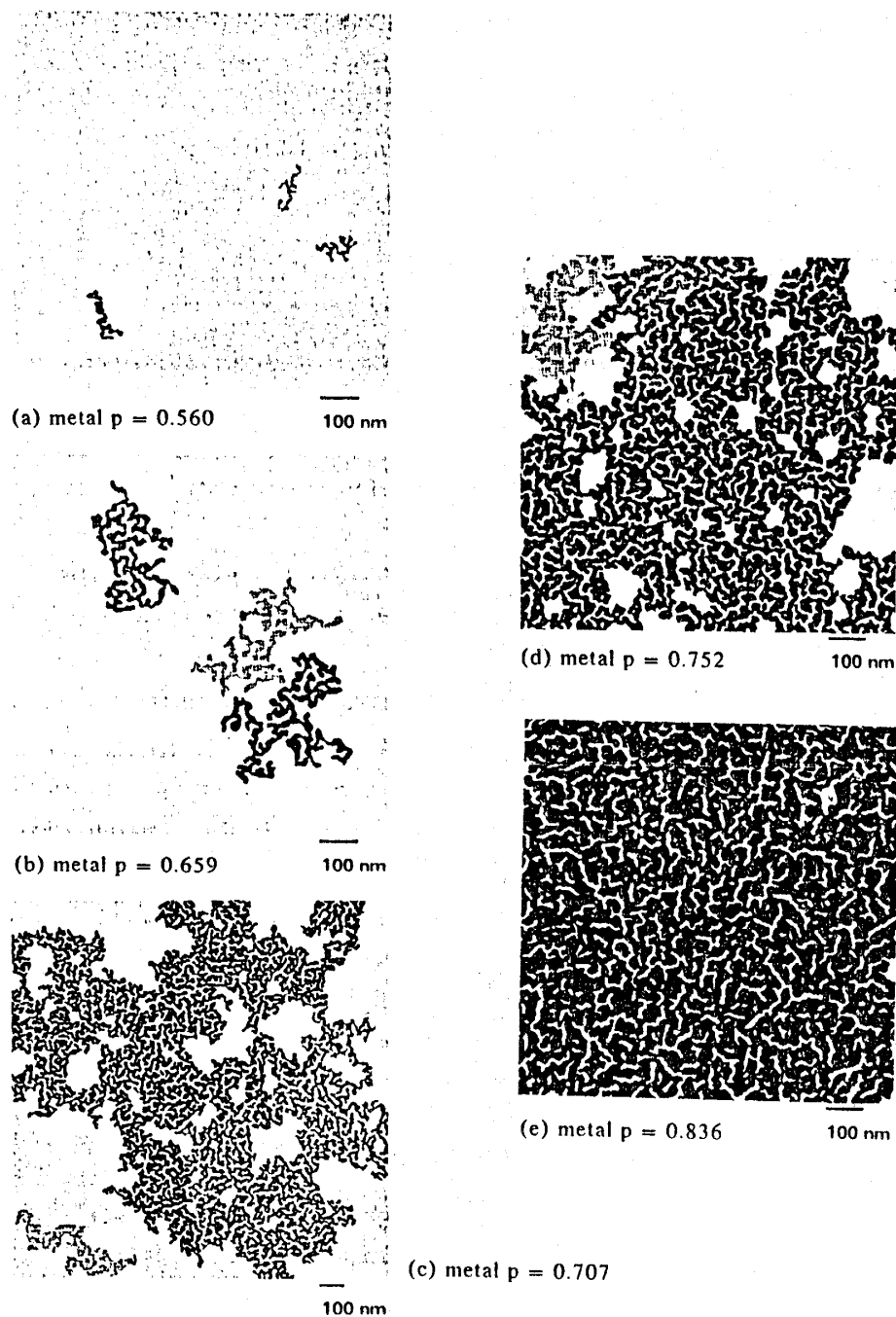


図 2.4.3 薄膜のランダムな金属の分布。<sup>20)</sup>  $p$  は全体を占める金属の比率。

つの塊まりが薄膜を横断するようになり、電気伝導度が金属膜と同じ程度になる。すなわち  $p_c$  は、理論的には大きさが無限大の塊まりが存在する確率がほとんど 1 になるような  $p$  の下限になっているわけである。

パーコレーション転移点近傍における金属の塊まりの形がフラクタルであることは、半径  $r$  内の同一の塊まりに含まれる金属の量  $M(r)$  を調べることによって確かめられる。図 2.4.4 には、塊まりの中にある点を原点として、そこから  $R$  だけ離れた点が同じ塊まりに含まれる確率  $G_c(R)$

と  $R$  を  $\log\text{-}\log$  プロットしてある。 $M(r)$  と  $G_c(R)$  は次の関係を満たしている。

$$M(R) \propto \int_0^R G_c(r) r dr \quad (2.4.1)$$

$G_c(R)$  のべきの指数  $-\eta_c$  によって、フラクタル次元は、

$$D = 2 - \eta_c$$

とあらわされる。 $p = 0.752$  のときには確かに  $G_c(R)$  はべきになっており、金属の塊まりはフラクタルで、その次元はおよそ 1.9 であることがわかる。

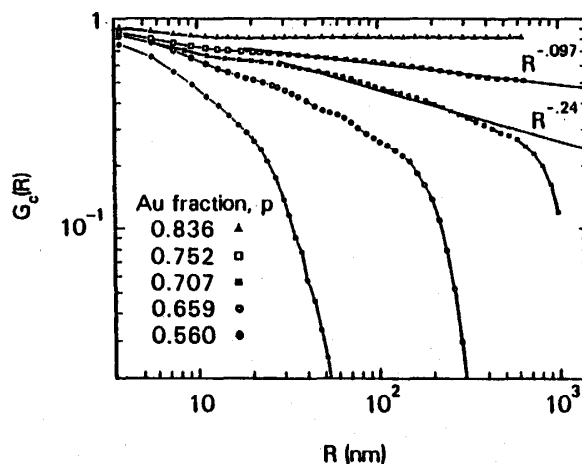


図 2.4.4 距離が  $R$  だけ離れた 2 点がともにひとつの金属に属す確率。<sup>20)</sup>

パーコレーション転移は、最も単純な相転移であるが、より複雑な相転移、たとえば、磁性体の相転移においても、ここで述べたような議論が成り立つことが知られている。相転移点では、同じ状態にある塊まりの構造や分布がフラクタル的になっており、そのフラクタル次元が臨界指数と密接に結びついているのである。<sup>21)</sup>

### ○乱流

水や空気のような流体には、レイノルズの相似法則と呼ばれている普遍的な相似性がある。流体の密度を  $\rho$ 、粘性率を  $\mu$ 、流れを特徴づける代表的な長さ  $L$ 、代表的な速度の大きさを  $U$  としたとき、レイノルズ数と呼ばれている無次元量  $R$  を次式で定義する。

$$R = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (2.4.3)$$

どんな分子から構成される流体であっても、レイノルズ数が同じならば、流れの場全体が相似になるというのが、レイノルズの相似則である。<sup>22)</sup> つまり、流体の流れの様子はレイノルズ数だけで特徴づけられるわけである。

レイノルズ数が小さいということは、粘性力の方が慣性力よりも大きいことを意味し、流れは安定である。レイノルズ数が大きくなり、 $10^3$  以上になると流れの場は非常に乱れ、乱流状態になる。水の場合、 $\rho/\mu$  は  $10^2 \text{ s/cm}^2$  程度である。従って  $L \sim 10 \text{ cm}$ 、 $U \sim 10 \text{ cm/s}$  としても  $R \sim 10^4$  となり、流れは乱流となる。空気についても同様のことが言える。身の廻わりに見られる水や空気の流れは、ほとんどが乱流になっているのである。そのことは、部屋の中を漂うたばこの煙の運動が非常に複雑であることから推察できるであろう。

乱流は一般にフラクタル的性質を持っていることが期待される。レイノルズ数は、流れの場の特徴的な長さに比例するので、レイノルズ数が発散するような極限を想定すると、特徴的な長さも発散し、前に述べた相転移と同様に、特徴的な長さのない状態が実現すると考えられるからである。

レイノルズ数が十分大きく、等方的である3次元乱流において、エネルギー散逸領域が実際にフラクタル構造を持っていることが、最近実験的に確認された。座標  $\mathbf{x}$  におけるエネルギー散逸率を  $\varepsilon(\mathbf{x})$  としたとき、

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \propto |\mathbf{r}|^{-\mu}, \quad 0.2 < \mu < 0.5 \quad (2.4.4)$$

となることが見出されたのである。<sup>23)</sup> エネルギー散逸とは、流体の持っている運動エネルギーが粘性によって熱エネルギーに変換されることであり、その量は速度場の勾配の2乗に比例する。従って、(2.4.4)式は速度場の空間的な変化の激しい領域の分布がフラクタル的であることを示している。エネルギー散逸領域のフラクタル次元  $D$  は、

$$D = 3 - \mu \quad (2.4.5)$$

とあらわされる。速度場の空間的なゆらぎが一様な場合を仮想すると、 $D = 3$  であり、 $\mu = 0$  になるわけである。

乱流のフラクタル次元  $D$  を基礎方程式である Navier-Stokes 方程式から導き出すような理論はまだ知られていない。乱流現象の大部分はまだ謎に包まれていると言っても過言ではないだろう。

地球の大気の流れは、雲によって可視化されている。大気の流れが乱流になっているため、雲の形や運動は非常に複雑である。雲の動きを調べた例はまだないようであるが、雲の形がフラクタルであることは、Lovejoy<sup>24)</sup>によって確かめられた。彼は1章の方法Ⅱに従い、気象衛星やレーダーの写真に写ったいろいろな大きさの雲の面積と周の長さの関係を  $\log - \log$  プロットしてみた。その結果、図2.4.5のように各点はきれいに直線的に並び、雲の形が1.35次元のフラクタルになっていることがわかったのである。近頃は新聞やテレビで気象衛星から地球を写した写真を見る機会が多いが、そこに写っている様々な雲が、みな1.35次元の形であるということは驚くべきことではないだろうか？

図2.4.6は、いわゆる墨絵であるが、これも乱流を可視化したものであり、フラクタルである。洗面器程度の大きさの容器に入れた水をかきまぜて、その中に墨を落として作った墨絵のフラクタル次元を測ってみると、およそ1.3になっており、<sup>25)</sup>ほぼ雲の次元と一致する。大気の

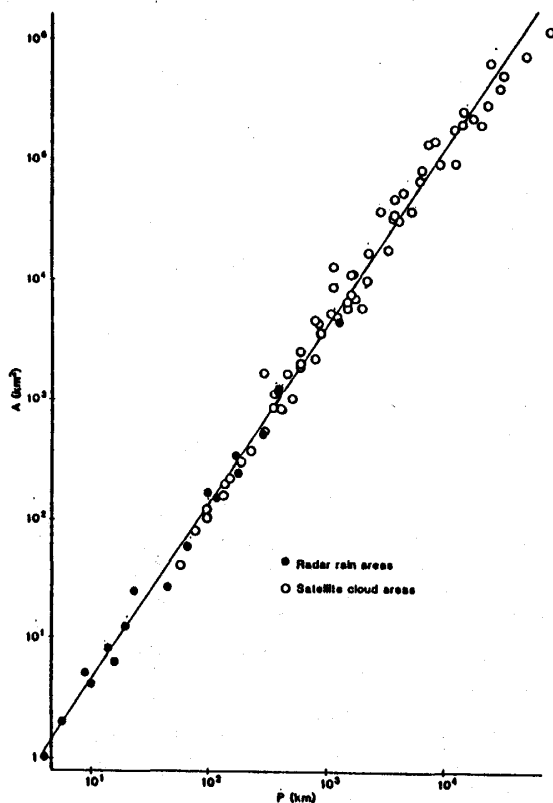

 図 2. 4. 5 雲の面積と周の長さの関係。<sup>24)</sup>


図 2. 4. 6 墨絵の例。およそ 1.3 次元のフラクタルになっている。

ような大きな流れを洗面器の中のような小さな流れとがよく似た性質を持っているということは、流体の普遍性のあらわれであろう。

#### ○ランダムウォーク

分子の熱運動による衝突を受けながら、気体や液体中を漂う微粒子のブラウン運動の軌跡が、微分を定義できないような曲線であることは、既に 1906 年にジャン・ペランが以下に述べるように指摘している。<sup>27)</sup>

「接近した 2 つの時点における粒子の位置を結んだ直線の方法は、この時間間隔が短くなるにしたがってまったく不規則に変化するのがおわかりいただけることだろう。したがって先入観を持たずに観察するならば、そこに存在するのは接線が引ける曲線ではなくて、導関数を持たない関数であると感じることだろう。」

ブラウン運動の軌跡のフラクタル次元は、空間の次元が 2 次元でも 3 次元でも 2 になることが知られている。<sup>1)</sup> これは、粒子の存在確率が時間の平方根に比例して広がることと関係している。軌跡のフラクタル次元が 2 ということは、平面上のランダムウォークを考えると、十分時間が経つと軌跡が面を覆いつくすようになることを意味している。

電子のような小さくて軽い粒子は、古典力学ではなく、量子力学に従って運動するので、量子的粒子と呼ばれる。光速に比べてずっと遅い量子的粒子はシュレディンガー方程式によって記述されるが、シュレディンガー方程式はある種のランダムウォークをする粒子の、運動方程式より導くことができる。<sup>27)</sup> このことから推測されるように、量子的粒子の軌跡はブラウン運動の場合と同じように、フラクタル次元が2であるような曲線であることが示される。<sup>28)</sup> しかし、実験的にこれを検証することは困難かも知れない。

#### ○ジョセフソン接合

電子の波動関数の位相が、マクロな物理量に影響を与える現象がジョセフソン接合において見つかっている。ジョセフソン接合とは、2つの超伝導状態にある金属を薄い通常の伝導性を持つ物質の膜を挟んで接合したものである。超伝導状態にある金属中では、電子の波動関数の位相はそろっているが、2つの超伝導金属の距離が近づくと、お互いの波動関数に重なりが生じてきて、位相差  $\Delta\phi$  によって決まる電流  $i$  が流れるのである。接合間の電圧を  $V$  とすると、これらの変数には次の関係式が成り立つ。<sup>29)</sup>

$$i = i_c \sin \Delta\phi \quad (2.4.6)$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \Delta\phi \quad (2.4.7)$$

ここで、 $i_c$  は臨界電流値であり、 $\hbar$ ,  $e$  は、それぞれ、プランク定数/ $2\pi$ , 電子電荷を示す。これらの関係式より、この接合が固有周波数を有することがわかる。それは、(2.4.7)式において、 $V$  が一定、即ち直流電圧がかけられている場合には、位相差  $\Delta\phi$  は時間で積分でき、

$$\Delta\phi = \frac{2e}{\hbar} V t + \text{const} \quad (2.4.8)$$

となり、これを(2.4.6)式に代入すれば、電流  $i$  は、固有周波数

$$f = 2|e|V/\hbar \quad (2.4.9)$$

で振動する交流電流になるからである。この周波数は通常マイクロ波帯に属する高周波である。直流電圧をかけると、交流電流が流れるというこの奇妙な性質は古典電磁気学では考えにくく、量子力学的効果に起因するものである。

このジョセフソン接合に直流電圧の他に、外部から交流電圧をかけると、非常におもしろい現象がみられる。(2.4.7)式に外部交流電圧の項を加えて解析してみると、外部交流の周波数  $f_0$  が、 $f$  の整数倍の時にのみ直流電流が流れ、それ以外では全く直流電流が流れないこと

がわかる。即ち、共鳴を起こす周波数以外のほとんどすべての  $f_0$  に対して、抵抗が無限大になっているのである。実際の素子を使って実験をしてみると、有限な直流抵抗と金属面間のコンデンサー効果の容量が加わり、さらにおもしろい結果が生じる。外部交流は、マイクロ波照射によって加えられるが、その強度、周波数を固定しておき、直流電圧  $V$  だけを上げていく。 $V$  につれて直流電流  $I$  は増加するが、その増加の仕方が連続的でない。 $P, Q$  を互いに素な自然数としたとき、

$$V = \frac{\hbar}{2e} \cdot f \cdot \frac{P}{Q} \quad (2.4.10)$$

という関係を満たすときに  $I$  は階段状に増加するのである。 $Q$  が小さい程、階段のとびが大きいので、 $V$  と  $I$  の関係を示すグラフは、図 2.4.7 のように、1 章で述べた悪魔の階段のような構造となる。<sup>30)</sup> この図ではあまりはっきりしないかもしれないが、滑らかに増加しているように見える部分も拡大してみると、階段状の増加になっているのである。 $I$  と  $V$  のグラフの傾きによって抵抗を定義すれば、熱雑音の効果が無視できる理想の場合には、 $V$  が有理数のとき抵抗が 0 で、 $V$  が無理数のときには抵抗が無限大ということになるはずである。

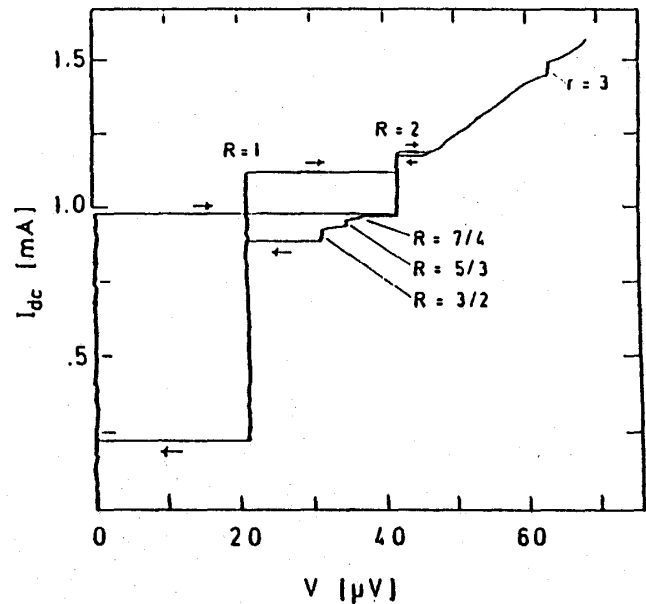


図 2.4.7 ジョセフソン接合における電圧  $V$  と電流  $I$  の関係。<sup>30)</sup>

$$R = \frac{P}{Q}$$

## § 2.5 その他の分野

### ○通信系のエラー

通信の過程で生じるエラーの分布は、その時間間隔を  $\tau$  とすると、

$$P(\tau) \propto \tau^{-D}, \quad D \doteq 0.3 \quad (2.5.1)$$

という分布に従う。<sup>1)</sup> ただし、ここで  $P(\tau)$  は、エラーの間隔が  $\tau$  より大きいものの確率をあらわす。時間に対するエラーの分布のフラクタル次元は、0.3 である。このことより、エラーの分布が自己相似的な塊まりになっていること、つまり、一度エラーが起こると引き続きエラーが起こる傾向があることがわかる。

高安秀樹

### ○所得の分布

所得の分布は、広い範囲で対数正規分布に従うことが知られている。<sup>31)</sup> 図 2. 5. 1 はアメリカにおける 1935 年から 1936 年までの所得の分布を、

対数正規グラフ用紙にプロットしたものである。グラフの縦軸は、所得の対数を、そして横軸は累積確率をあらわしており、点が直線的に並んでいれば、その分布が対数正規分布になっていることを示す。対数正規分布というのは、対数をとると正規分布になるような正の数の分布である。この図を見れば明らかなように、高所得者の上位 1 % を除けば各点はほとんど直線的に並んでおり、所得の分布は確かに対数正規分布に従っていることがわかる。

対数正規分布からはずれている上位 1 % の人の分布を詳しく調べてみると、次のようなベキの分布になっていることがわかる。<sup>14)</sup>

$$P(X) \propto X^{-1.6}$$

(2. 5. 2)

この分布型は、いままで何度もでてきているフラクタル分布に他ならない。

この所得の分布において興味深いのは、いわゆるプロレタリア階級とブルジョア階級の分布型がはっきりと異なっているところである。上記の結果は、プロレタリアの所得は対数正規分布に、ブルジョアの所得はフラクタル分布に従うというように換言できるであろう。なぜこのような分布になるのかをきちんと理論的に説明した例はまだないようである。

また、ソビエトや中国のような共産主義の国や、インドのように貧富の差の激しい国においては、これとは異なる分布になっていることが予想されるが、残念ながらそれを確認できるような資料を持ち合わせていない。

### ○株価の変動

株価の変動のグラフは新聞などでよく見かけるが、非常に激しく上下し、全くランダムで、ほとんど法則性はないように感じる。しかし、統計的立場からこの変動を解析すると、きれいな法則が成立していることがわかる。マンデルブロ<sup>1)</sup>の発見したその法則とは、次に示すものである。

1. 単位時間当りの株価の変動の分布は、特性指数  $D \doteq 1.7$  の対称な安定分布に従う。

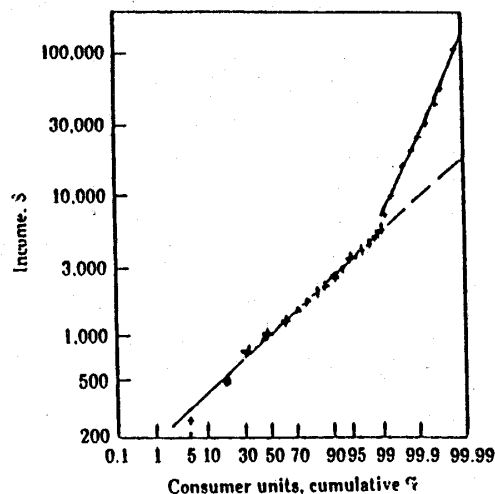


図 2. 5. 1 年間所得の分布。(1935 年アメリカ)  
累積分布を対数正規確率用紙にプロットしたもの。<sup>31)</sup>

2. 単位的时间を大きくとっても小さくとっても、この分布は相似である。つまり適当に尺度を変えれば、同じ分布になる。

ここででてきた安定分布については、5章で詳しく述べるので細かなことは省略し、フラクタルと関連の深い性質だけを指摘しておく。単位時間  $T$  の間の株価の変動の分布密度を  $p(x)$  とすると、十分大きな正の数  $x$  に対して、次の関係式が成り立つ。

$$\int_x^\infty p(x') dx' = \int_{-\infty}^{-x} p(x') dx' \propto x^{-D} \quad (2.5.3)$$

これは、株価の変動の分布がフラクタルになっていることを示している。このことは、大きな額で取り引きをする者も、小さな額でする者も、扱うお金の桁は違うが、お金の出し入れの感覚は同じであることのあらわれと考えることができよう。つまり、ある者は100万単位で株を売買し、またある者は1万を単位に売買しているが、どちらの者も売買の決断の仕方は同じであるということである。

法則2は、株価の変動が時間的にもフラクタルであることを意味している。一日の株価の変動のグラフと、一年間の株価の変動のグラフを比べると、株価の目盛りが異なるだけで、変動の様子はほとんど区別がつけられないということである。また、変動に特徴的な時間がないので、遠い過去の株価でも現在の株価と相関がある。株価は過去の変動の歴史とのバランスをとりながら変化していると言ってもよいかもしれない。

マンデルブロの法則は、実際のデータとよく合うことが確められているが、あくまでこれらは統計的な法則でしかない。これらの法則によって明日の株価を予測することは、残念ながらできないのである。

### 第3章 コンピューターのフラクタル

他の機械と比較したとき、コンピューターの持つ最大の特徴は、進化と多様性であると言える。進化とは、メモリーが増え、演算・処理が速くなることであり、進化という言葉が適切なのは、後で作られたコンピューターの方が前に作られたものよりも確実にメモリー容量処理速度においてまさっているからである。多様性とは、ひとつのコンピューターがプログラム次第で絵を書いたり、給料計算をしたり、あるいは核融合プラズマのシミュレーションをしたりすることである。

映画『TRON』では、コンピューターの中にひとつの世界があり、その世界の中を擬人化されたプログラムたちが動き回っているという比喻を使っているが、そのイメージは大型コンピューターが様々なプログラムを貯え、処理している様子をよく表している。コンピューターがさらに進化すれば、コンピューターの世界もそれにつれて大きく多様に広がっていくわけである。

この章では、コンピューターの世界の中に造り出されたフラクタルを紹介する。紹介するのは、どれも単純な規則によって造られたフラクタルばかりなので、前章の自然界のフラクタルに比べるとおもしろみに欠けるかも知れない。しかし、自然界のフラクタルの成因の解明にコンピューターの世界の中でのシミュレーションは、重要なヒントを与えてくれることが多いのである。ひとつの目標は、できるだけ簡単な規則で自然界のフラクタルを模倣することである。また、それだけでなく自然界には存在し得ないフラクタルを造り出すこともできる。抽象的な空間の構造をコンピューターの世界の中で組み立てることによって、新しい知見が得られることも少なくはないだろう。

#### § 3.1 凝集体

前章の § 2.4 において、微粒子の凝集体のフラクタル構造について述べたが、このような構造は単純な規則を定めるだけで、コンピューターによって造り出すことが可能である。その規則とは、次のようなものである。<sup>33)</sup>

「まず、格子の原点に種となる粒子を置いておく。第2の粒子を原点から遠く離れた格子点に置き、格子上をランダムウォークさせる。この粒子が種の粒子と臨接する格子まできたらストップさせ、凝集体の一部になったものとみなす。もしもこの粒子が種の粒子に近づかず、非常に遠くに行ってしまった場合には、この粒子を消し、別の粒子を発生させ、同

じようにランダムウォークをさせる。こうして種の粒子に第2の粒子が付着したら、第3の粒子を遠く離れた点に置き、ランダムウォークをさせる。そして、凝集体に臨接する格子上に来たらストップさせて、凝集体の一部になったものとみなし、非常に遠くに行ってしまった時には、その粒子を消滅させて、新たな粒子を発生させる。(図3.1.1) 凝集体が十分大きく成長するまで同じような操作を繰り返す。」

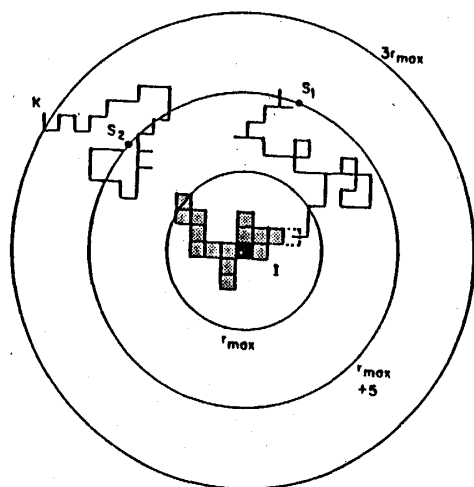


図3.1.1. 凝集体のシミュレーションの方法。<sup>33)</sup>



図3.1.2. シミュレーションによって作られた凝集体。<sup>33)</sup>

この規則によって造り出された凝集体の例が、図3.1.2である。<sup>33)</sup> これは2次元格子上に造られた凝集体であるが、一見したところ、自然界の凝集体(図2.4.2.a)の一部分と非常によく似ている。原点から半径  $R_g$  以内の粒子の個数  $N$  を  $\log\text{-}\log$  プロットしたのが、図3.1.3である。この図からわかるように、 $N$  は  $R_g$  のべきにきれいに比例しており、凝集体の構造はフラクタルである。グラフの傾きからきまるフラクタル次元は、およそ  $D=5/3$  であった。この値は自然界のものの1.6という値とほぼ一致している。

P. Meakin<sup>33)</sup> は、空間の次元  $d$  を2, 3, 4, 5, 6 と変えてシミュレーションをしてみた結

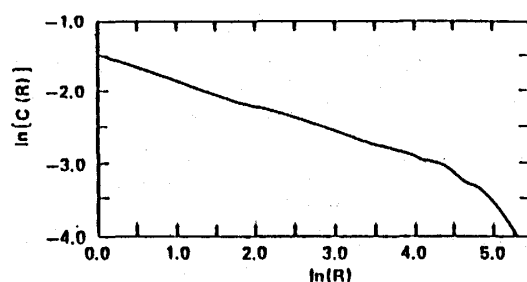


図3.1.3. 中心から半径  $R_g$  の円内にある粒子数  $N$ 。<sup>33)</sup>

高安秀樹

果、得られる凝集体のフラクタル次元  $D$  と空間の次元  $d$  とには次のような関係が成立していることを発見した。

$$D \doteq 5/6 d, \quad 2 \leq d \leq 6 \quad (3.1.1)$$

この結果は、繰り込み群を使った方法<sup>34)</sup>や高分子の統計理論を拡張した方法<sup>35)</sup>によって理論的な解釈がなされている。直観的には、 $5/6 d$  となることまではわからないが、 $D < d$  になることは、外から近づいて来る粒子は外側の枝に付着しやすく、内部にまで進入しにくいことから想像できよう。ランダムウォークを格子の上だけに制限していることがフラクタル次元に影響を与える可能性はある。しかし、三角格子上でランダムウォークさせても、自由にランダムウォークさせても、あまり結果は変わらないことが知られている。<sup>33)</sup> 従って、(3.1.1)式は、普遍的な関係式であるといえよう。

### § 3.2 カオスと写像

#### ○ 奇妙なアトラクター

地球物理学者のローレンツは、天気予報の問題に関連した、次のような3変数の非線形方程式系の解析を行っているうちに、解の挙動の極めておもしろい性質に気付いた。<sup>25)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X &= -10(X - Y) \\ \frac{d}{dt} Y &= -XZ + rX - Y \\ \frac{d}{dt} Z &= XY - \frac{3}{8}Z \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

パラメータ  $r$  が、 $24.74 < r < 145$  の範囲にある場合には  $t \rightarrow \infty$  における解が、ある値に漸近することも周期解になることもなく、有限の領域を動き続けることが数値計算によって確かめられたのである。この系のパワースペクトルを調べてみると、連続的なスペクトルになっており、 $(X, Y, Z)$  の変動があらゆる周期の成分を含むような非常に複雑なものであることがわかる。さらに、ほんのわずかに異なる2つの初期値に対して、各々の時間発展を計算してみると、 $X-Y-Z$  の3次元空間の中で、2点間の距離が指数関数的に増大していくことも確かめられる。微分方程式(3.2.1)の解は、初期値を与えれば、唯一は決定されるが、初期値のわずかな変化が時間とともに指数関数的に拡大され、解に大きな変化をもたらすという不安定性を有しているのである。このような決定論的力学系の非周期解が示す一見乱雑な運動は、カオス

と呼ばれている。天気予報が難しいのは気象の変化がカオスの振舞を見せ、ほんのわずかな変動が、大きく増幅されることがあるからである。

$X-Y-Z$  空間において、ある初期値から出発した点の時間発展の軌跡をプロットしたのが、図 3.2.1.である。一見軌跡が重なっているように見えるかも知れないが、解の一意性により、軌跡は決して交わらない。初期に点ではなく、小さな立方体を考えると、時間が経つにつれて立方体は変形されていくが、その時、体積は指数関数的に減少していく。それは、その体積を  $V$  とすると、

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{dY}{dt} + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{dZ}{dt} = -\frac{41}{3} \quad (3.2.2)$$

が成立しているからである。 $X-Y-Z$  空間内の近くの 2 点は指数関数的に離れていくと、先程述べたが、このことより、考えている立方体がうすくりボン状に引き伸ばされることがわかる。立方体の内部の 2 点の距離が指数関数的に増大し、しかも全体の体積が指数関数的に減少する為には、そのような変形をしなければならないからである。

一般に  $t \rightarrow \infty$  で軌道が吸引される極限集合をアトラクターと呼ぶが、(3.2.1) 式によって記述されるローレンツ系のアトラクターは、図 3.2.1 に示される軌道のような、有界領域である。<sup>37)</sup> 初期に考えた小さな立方体は、薄く引き伸ばされてそのアトラクターに吸収され、その上で伸長過程を続けることになる。アトラクターは有界な領域であり、有界な領域内で絶えず伸び続ける為には、無限回の折り畳み構造がなければならない。即ち、初期において立方体を構成していた点の集合は、 $t \rightarrow \infty$  においては無限回折り畳まれた無限に薄い体積 0 のリボンのようなアトラクター上を果てしなく彷徨し続けるのである。このような複雑な構造を持ったアトラクターは「奇妙なアトラクター」と名付けられている。

奇妙なアトラクターはローレンツ系に固有のものではなく、沢山の小数自由度の力学系にお

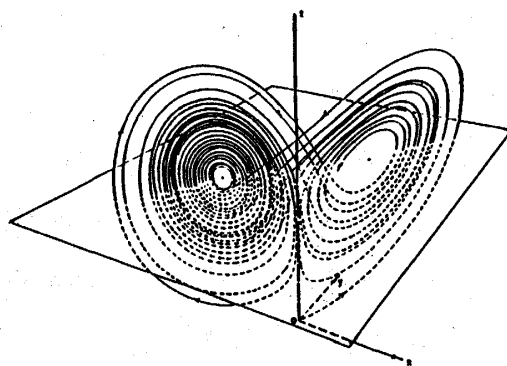


図 3.2.1. ローレンツ方程式の解の軌跡。<sup>37)</sup>

高安秀樹

いて見つかっている。線形な力学系には、このようなアトラクターが存在しないことは明らかであるが、次に示すレスラー系はたった1つの非線形項( $xz$ )が奇妙なアトラクターを生み出すことを実証したことで有名である。<sup>38)</sup>

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= -(y+z) \\ \frac{d}{dt}y &= x + 0.2y \\ \frac{d}{dt}z &= 0.2 + z(x - 5.7)\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

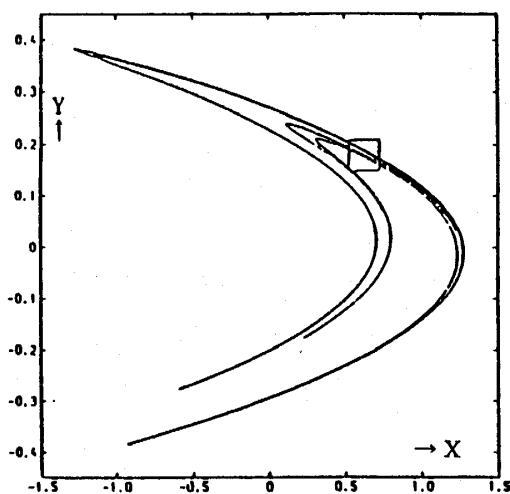
自由度が2以下の常微分方程式系のアトラクターは点か円(またはそれを少し歪めた図形)に限られることが知られており、奇妙なアトラクターはあり得ない。しかし、2変数でも不連続な写像であれば、奇妙なアトラクターを持つことがある。図3.2.2.aはヘノン写像と呼ばれている次式のような写像における奇妙なアトラクターの形を示している。

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

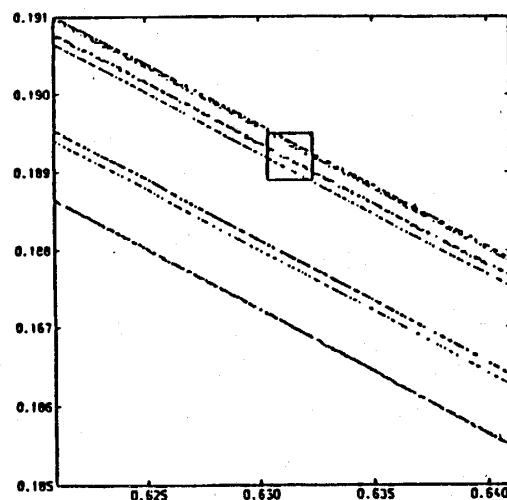
初期に小さな正方形を考えると、その内部の2点の距離は写像されるごとに指数的に増大し、面積は指数的に減少する。つまり、正方形は細長いひものような形に変形されていく。この写像のアトラクターもローレンツ系と同じように有界なので、そのひものは無限に折り畳まれていくことになる。図3.2.2.bは図3.2.2.aの奇妙なアトラクターの四角で囲まれた一部分を拡大したもので、cとdはそれぞれbの一部分、cの一部分を拡大したものである。<sup>37)</sup> 一本に見えていた線を拡大して見ると自己相似的に並んだ沢山の細い線から構成されていることがわかる。これは、無限に折り畳まれた結果生じた構造で、§1.4で述べたカントール集合と同じような性質を持つフラクタルに他ならない。

ローレンツ系のような常微分方程式系の奇妙なアトラクターについても同じようなことが言える。この場合には、空間が3次元以上の構造の特徴が見にくいので、適当な仮想的平面によって切った断面を考えるとよい。もとの空間では時間とともに連続的に変化する点の運動も、この平面上だけで考えれば、軌跡と平面の交点から交点への不連続な写像によって表現されることになる。このような写像のことをポアンカレ写像と呼ぶ。ローレンツ系やレスラー系のポアンカレ写像は、ヘノン写像と同じような性質を持っており、奇妙なアトラクターの断面図は図3.2.2のようなフラクタル構造になっていることが知られている。

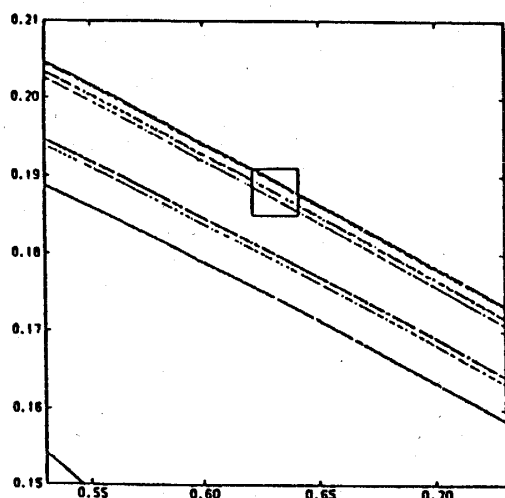
奇妙なアトラクターがフラクタル構造になっていることが知られたので、フラクタル次元を求めることもできる。粗視化の度合を変える方法や相関関数による方法で次元を測ってみると、ヘノン写像とローレンツ系の奇妙なアトラクターの次元はおおの 1.26 と 2.06 程度になることが報告されている。<sup>40)</sup> フラクタル次元を使って奇妙なアトラクターを定量的に特徴づけたり、分類することができるわけである。奇妙なアトラクターという名前がつけられた頃はフラクタルの概念がまだ一般的ではなかったので、「奇妙な」というような呼び方を余儀なくした



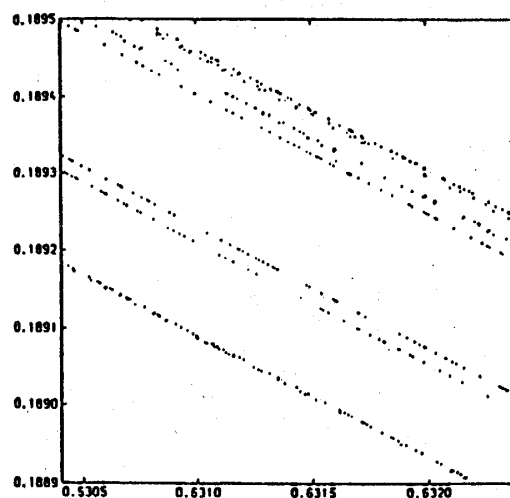
a



c



b



d

 図 3.2.2. ヘノン写像のアトラクター。<sup>39)</sup>

a, b, c の一部分を拡大したものがそれぞれ b, c, d。

高安秀樹

のであろう。しかし、フラクタルとの密接な関連を見ると、むしろフラクタルアトラクターと呼ぶようにした方がよいようにさえ思われる。

奇妙なアトラクターのフラクタル次元を理論的に求めることはできないであろうか？ 現在までのところ、一般的に常微分方程式系や写像を与えたときにフラクタル次元がたちどころに求められるような公式は見つけられていない。しかし、わずかに離れた2点の距離の伸縮を定量化する量、リャプノフ指数がわかれば、奇妙なアトラクターのフラクタル次元は推定できる。ここでリャプノフ指数  $\lambda_\alpha$  は次のように定義される量である。ある時刻  $t$  において  $\alpha$  方向に短かい距離  $L_\alpha(t)$  だけ隔たった2つの点を考える。短かい時間  $\tau$  の後にこの距離が  $L_\alpha(t+\tau)$  になったとしよう。次式のように定義される平均拡大率

$$\lambda_\alpha \equiv \frac{1}{\tau} \left\langle \log \frac{L_\alpha(t+\tau)}{L_\alpha(t)} \right\rangle \quad (3.2.5)$$

が、リャプノフ指数である。<sup>39)</sup>  $\lambda$  が正(負)ならば、2点は指数関数的に離れる(近づく)わけである。方向を表わすパラメータ  $\alpha$  をはっきりさせる為、適当に直交座標を考え、その軸の方向を  $\alpha$  によって示すことにする。即ち、 $\alpha$  は自由度の数と同じだけの数がある。伸長の詳細は局所的に伸びる方向の数 ( $\lambda_\alpha > 0$  の数)  $m^+$ , 縮む方向の数  $m^-$ , 伸縮のない方向の数  $m^0$  および平均伸縮率

$$\lambda^+ = \frac{1}{m^+} \sum_{\lambda_\alpha > 0} \lambda_\alpha \quad (3.2.6)$$

$$\lambda^- = \frac{1}{m^-} \sum_{\lambda_\alpha < 0} \lambda_\alpha \quad (3.2.7)$$

に依存する。これらの量を用いると、奇妙なアトラクターのフラクタル次元  $D$  が次のように与えられることが示されている。<sup>41,42)</sup>

$$D = m^0 + m^+ \left\{ 1 + \left| \frac{\lambda^+}{\lambda^-} \right| \right\} \quad (3.2.8)$$

ローレンツ系においては、 $m^0 = m^+ = m^- = 1$  であり、 $\lambda^+ \doteq 1.4$ ,  $\lambda^- \doteq -2.2$  となるので、(3.2.8)式より決まるフラクタル次元は  $D \doteq 2.06$  となり、実際に測定した次元の値とよく一致している。この方法を使うと、前に述べた方法よりもずっと簡単に奇妙なアトラクターのフラクタル次元を推定することができる。

#### ◦ 写像によるカオス

前節で奇妙なアトラクターがつくられる原因が、折り畳みにあることを述べた。そこで折り畳みにかかわる性質をもう少し詳しく調べてみることにしよう。

まず、最も基本的な1自由度の写像

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad 0 \leq r \leq 4 \quad (3.2.9)$$

を考えることにする。図3.2.3からもわかるように区間  $[0, 1]$  は、写像するごとに1回折り畳まれる。この写像はロジスティック写像と呼ばれ、多くの人によって細かな性質まで詳しく調べられている。

$r$  を変えていったときの変化の様子は次のようになる。<sup>43)</sup>

(イ)  $0 \leq r < 1$  では、 $x_n$  は単調減少で  $x_n \rightarrow 0$  となる。 $(n \rightarrow \infty)$

(ロ)  $1 \leq r \leq 2$  では、 $x_n$  は単調増大で  $x_n \rightarrow 1 - \frac{1}{r}$  となる。

(ハ)  $2 \leq r \leq 3$  では、 $x_n$  は減衰振動を伴いながら  $1 - \frac{1}{r}$  に漸近する。

(ニ)  $3 < r \leq 1 + \sqrt{6} = 3.449$  では、 $x_n$  は2周期振動に漸近する。

(ホ)  $1 + \sqrt{6} < r \leq 4$ 。この領域において、 $r$  を変えた時の  $x_n$  の平衡値の変化は非常に複雑である。その様子は図3.2.4に示してある。まず  $r$  の増大とともに4周期、8周期、……と  $2^n$  周期が次々とでてくる。 $2^\infty$  周期があらわれる  $r$  は、およそ3.57である。黒くぬりつぶされた部分は、平衡値が稠密に分布していることを示しており、 $x_n$  の変動はカオス的になっている。ところどころ白くぬけている部分があるが、そこは窓と呼ばれており、周期運動になっていることを示している。

このように、不連続な写像の場合には1自由度でもカオスが生じるのである。

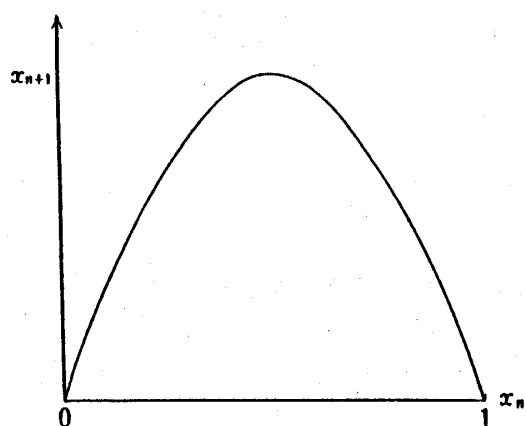


図3.2.3. ロジスティック写像。

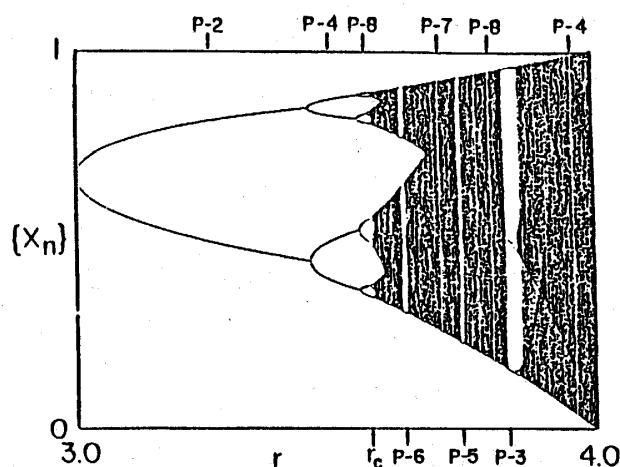


図3.2.4.  $r$  を換えたときの平衡値の分布。<sup>39)</sup>

ファイゲンバウムは、 $2^n$  周期が次々とあらわれる領域において、次のような規則性があることを示した。 $2^n$  周期が始めてあらわれる  $r$  の値を  $r_n$  としたとき、十分大きな  $n$  に対して、

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \doteq \delta = 4.669 \dots \quad (2.2.10)$$

が成り立ち、また振動数  $\omega = \omega_0 / 2^n$  の周期運動と、その半分の振動数の周期運動のスペクトラム強度の比について

$$\frac{P(\omega_0 / 2^n)}{P(\omega_0 / 2^{n+1})} \doteq \mu = 6.57 \dots \quad (2.2.11)$$

が成り立つ。<sup>44)</sup> ここで新しくでてきた定数  $\delta$  と  $\mu$  は、ロジスティック写像に限らず、 $2^n$  周期が次々と出現してカオスが生じるような系では、いつでも同じ値をとる普遍的な定数であると期待されており、実験的にもある程度は実証されている。<sup>45)</sup> このような関係式が成立するのは、 $2^{n-1}$  周期が不安定化して  $2^n$  周期の生じる過程と、 $2^n$  周期が不安定化して  $2^{n+1}$  周期の生じる過程が自己相似的であることに起因している。

図 3.2.4 を見てもわかるように、 $r_\infty$  よりもさらに  $r$  を大きくしていくと、7 周期、5 周期、3 周期運動などが安定化する窓があらわれてくる。一度カオス的になった運動が、パラメータを変えていくと周期運動にもどることは興味深い。1 自由度写像の周期に関しては、シャルコフスキーによる次の定理が知られている。<sup>43)</sup>

次のような自然数の順列を考える。

$$3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, \dots,$$

$$2^n \cdot 3, 2^n \cdot 5, 2^n \cdot 7, \dots, \dots, 2^n, 2^{n-1}, \dots, 2^2, 2, 1. \quad (3.2.12)$$

この順列の勝手な自然数を  $p$  とし、それよりも後ろに並んでいる自然数のひとつを  $q$  とする。実連続関数  $f(x)$  による写像、

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.2.13)$$

に関して、もし  $p$  周期点が 1 つでも存在すれば、任意の  $q$  に対して  $q$  周期点が存在する。

この定理は、数列 (3.2.12) の初めの方の数字は、後の方の数字に比べると周期点になりにくいことを意味している。図 3.2.4 を見てもわかるが、実際、ロジスティック写像では、 $r$  を増加していったとき、(3.2.12) に示された数列の終わりの方の数から順にその数を周期とする運

動が実現されているようである。

この定理はまた、3周期点が存在すれば、任意の周期点が存在することも意味している。このことを更に拡張したのが、有名なリー・ヨークによる次の定理である。<sup>43,46)</sup>

$f(x)$  を区間  $I$  から  $I$  自身への連続な写像とし、次の条件が満足されているとする。

「 $I$  に 4 点  $a, b, c, d$  が存在し、次のことが成り立つ。

$$d \leq a < b < c \text{ かつ } f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d$$

このとき、以下に述べるようなことが成立する。

- 1) すべての自然数  $k$  について、 $k$  周期点がある。
- 2) 区間  $I$  に非可算集合  $S$  があり、 $p$  と  $q$  を  $S$  の異なる 2 点とすると、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

- 3)  $p$  を  $S$  の任意の点、 $q$  を任意の  $k$  周期点とすると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

この定理における条件は、 $d = a$  の場合には 3 周期点が存在することに対応しており、拡張された 3 周期条件と呼ばれている。定理の 3) は漸近的にも周期点にならないような点が無限個存在することを意味し、定理の 2) はそれらの点は何度か写像を繰り返すことによって幾らでも近づきうることを意味している。ロジスティック写像において 3 周期点があられるのは、 $r \doteq 3.8284$  であり、それよりも大きな  $r$  に対しては、リー・ヨークの定理が成立している。

ロジスティック写像 (3.2.9) は、歴史的には人口の増減のモデルであるロジスティック方程式

$$\frac{d}{dt} u = (\varepsilon - hu) u \quad (\varepsilon, h : \text{正定数}) \quad (3.2.14)$$

をオイラー差分することによって得られた。この微分方程式を差分化した式、

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = (\varepsilon - hu_n) u_n \quad (3.2.15)$$

において、

$$a = 1 + \varepsilon \Delta t$$

$$x_n = \frac{h \Delta t}{1 + \varepsilon \Delta t} u_n \quad (3.2.16)$$

とおくことによって、(3.2.9)式が得られるわけである。微分方程式(3.2.14)の解は、任意の初期値  $u(0) > 0$  に対して容易に解析的に求めることができ、単調に平衡値  $\varepsilon/h$  に漸近することがわかる。このように、単純な解しか持たないような微分方程式を差分した方程式(3.2.9)において、差分間隔  $\Delta t$  をある程度大きくすると、もともとの解とは似ても似つかぬカオス解が生じるのである。このことは、ロジスティック方程式に限ったことではなく、一般に常微分方程式を差分したとき、差分間隔が十分に小さくない場合にはカオス解を持つことが示されている。<sup>43)</sup> 従って、微分方程式を差分によって数値的に解く場合には、得られた解がもとの方程式の解のよい近似になっているかを常に慎重に吟味しなければならないだろう。

1自由度写像に関して、シンボリックダイナミックスという興味深い考え方がある。ロジスティック写像(3.2.9)は  $r=4$  の場合、変換

$$y_n = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{x_n} \quad (3.2.17)$$

によって、折れ線型の写像になる。(図3.2.4)

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & 0 \leq y_n \leq 0.5 \\ 2 - 2y_n & 0.5 \leq y_n \leq 1 \end{cases} \quad (3.2.18)$$

この写像において、初期値  $y_0$  を決めれば、 $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  が順次求められるが、 $y_n$  が0.5より小さい場合に0、大きい場合に1というシンボルを対応させることを考える。解の数列  $\{y_n\}$  を0と1という2つのシンボルの列  $\{\omega_n\}$  に簡単化して置き換えるわけである。このようにして得られたシンボル列  $\{\omega_n\}$  を初期値  $y_0$  に対する解と呼ぶことにしよう。ロジスティック写像において  $x_n$  がカオス解を持っていたことに対応して、解  $\{\omega_n\}$  の中の0と1の順列もきわめてランダムである。初期値  $y_0$  を決めれば勿論  $\{\omega_n\}$  は完全に決定的なのであるが、0と1のかたは、お金を何回も投げて表がでれば0、裏がでれば1を対応させて作ったランダムな数列とはほとんど同じと見なす事ができるのである。<sup>43)</sup> このように写像を有限個のシンボルに対応させて、そのシンボルの変化を扱う方法をシンボリックダイナミックスという。

初期値  $y_0$  を与えたときの解  $\{\omega_n\}$  を求めることを考えてみよう。そのためにまず、シンボ

ル列  $\{\omega_n\}$  を区間  $[0, 1]$  の実数  $z$  に対応させる。それには、 $\omega_n$  を、 $z$  を 2 進数展開したときの小数第  $n+1$  位の数字であるとすればよい。

つまり、

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \cdot 2^{-n-1} \quad (3.2.19)$$

とするのである。 $\{\omega_n\}$  を与れば  $z$  が決まるので、問題は  $y_0 \in [0, 1]$  を与えたとき、 $z \in [0, 1]$  がどうなるかということになる。ここで、2 進数表示した  $z$  の小数点以下を 1 桁ずらし、小数第 1 位に 0 をつける変換  $f_0$  と、小数第 1 位に 1 をつける変換  $f_1$  を考える。これらは、次のように表すことができる。

$$f_0(z) = \frac{1}{2} z \quad (3.2.20)$$

$$f_1(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z \quad (3.2.21)$$

これらの変換は、解のシンボル列  $\{\omega_n\}$  にもどって考えれば、 $y_n$  の写像 (3.2.18) を 1 回逆のぼることに対応する。従って、初期値  $y_0$  は  $f_0$  と  $f_1$  によって次のように変換されることになる。

$$f_0 : y_0 \rightarrow \frac{1}{2} y_0 \quad (3.2.22)$$

$$f_1 : y_0 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} y_0 \quad (3.2.23)$$

(3.2.20) ~ (3.2.23) を組み合わせれば、次の方程式が得られる。

$$z\left(\frac{y_0}{2}\right) = \frac{1}{2} z(y_0) \quad (3.2.24)$$

$$z\left(1 - \frac{y_0}{2}\right) = \frac{1 + z(y_0)}{2} \quad (3.2.25)$$

これらの方程式を解くことによって、解  $z$  が初期値  $y_0$  の関数として求められる。(3.2.24) 式において、 $y_0 = 0$  とすれば、 $z(0) = 0$  が得られる。次に (3.2.25) 式の  $y_0$  を 0 とすることにより、 $z(1) = \frac{1}{2}$  となる。これらの方程式は、このように代入を繰り返すことによって完全に解くことができる。

高安秀樹

図 3.2.5 は,  $y_0$  と  $z$  の関係を図示したものである。初期値  $y_0$  に対する解  $z$  の振る舞が至る所不連続で, しかもフラクタル的構造になっていることは興味深い。特に  $z(y_0)$  が不連続であるということは, 無限に近い 2 つの初期値を考えたとき, それらの解に有限の差異が生じることを意味している。

#### ◦ 写像によるフラクタル

この節では, 簡単な写像が複雑なフラクタル図形を生じる例を幾つか紹介する。

#### 平面から平面への写像

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.2.26)$$

を考えたとき,  $n \rightarrow \infty$  において  $|x_n| \rightarrow \infty$  にならないような初期値  $\{x_0\}$  の集合をジュリア集合と呼ぶ。非常に簡単な写像について, ジュリア集合がフラクタルになる例が知られている。例えば, 平面を複素平面としたとき, 変数を複素数  $z$  にしたロジスティック写像

$$f(z) = az(1-z) \quad (3.2.27)$$

の場合がそうである。<sup>1)</sup>  $a = 3.236 \dots$  のときのジュリア集合は, 図 3.2.6 a のようになっ

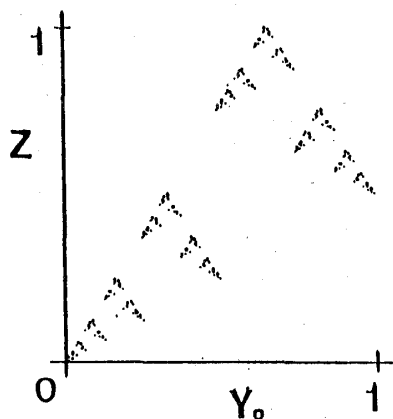


図 3.2.5. シンボル列  $z$  と初期値  $y_0$  の関係。

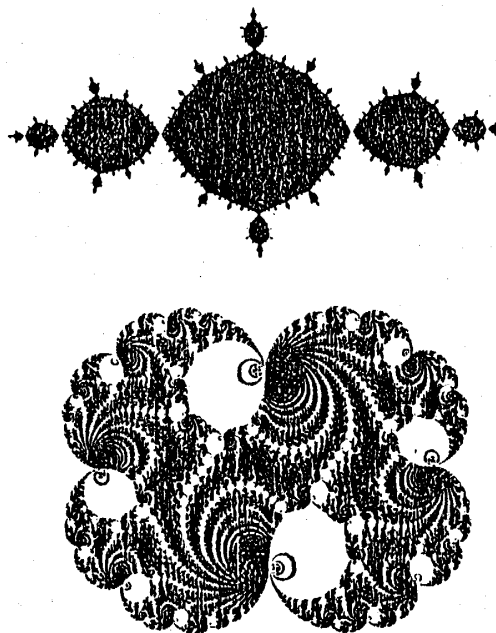


図 3.2.6. 複素平面におけるロジスティック写像のジュリア集合。<sup>1)</sup>

- a.  $a = 3.236 \dots$
- b.  $a = 2 - e^{2\pi i/100}$

ている。また、 $a \doteq 2 - e^{2\pi/100 \cdot i}$  にすると図 3.2.6 b のようになる。このように簡単な写像の中に、これ程複雑な形がひそんでいることは驚くべきことではなかろうか？

代数方程式や超超方程式の複素解をニュートン法によって求める場合には、必ず (3.2.26) 式のような写像を用いることになる。方程式の解のうちの特定な解に漸近するような初期値の集合もまたフラクタル構造になることが知られている。極めて近くの 2 点を初期値にしても異なる解に漸近することがよくあるわけである。

最近、ハッチンソン<sup>47)</sup> と畑<sup>48)</sup> は 2 つ以上の縮小写像の不変集合が非常に沢山のフラクタル図形を表わし得ることを発見した。 $f_1, f_2, \dots, f_n$  を同じ不動点を持たないような  $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  なる縮小写像であるとする。縮小写像とは、2 点間の距離が写像することによって短くなるような写像のことである。このとき、次の式を満たすような集合  $X$  を不変集合という。

$$X = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \dots \cup f_n(X) \quad (3.2.28)$$

例えば、 $n = 2$  のとき  $d = 1$  で、

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{2+x}{3} \quad (3.2.29)$$

とすれば、(3.2.28) を満たす  $X$  はカントール集合を表わし、 $d = 2$  (複素平面) で、

$$f_1(z) = \alpha \bar{z}, \quad f_2(z) = (1-\alpha) \bar{z} + \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \quad (3.2.30)$$

ならば、 $X$  はコッホ曲線となる。また  $\mathbf{R}^2$  上で

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-x \\ 1+y \end{pmatrix} \quad (3.2.31)$$

とすれば、前節の図 3.2.5 が得られる。このようにして、規則的な (ランダムでない) フラクタルは、ほとんどこの形式によって表現することができるのである。フラクタルをこのような簡単な形式で表現することは、フラクタルの応用上極めて重要な意味を持つと期待されている。

## § 3.3 ランダムクラスター

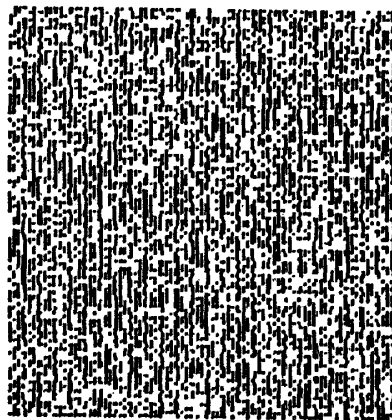
## ○ パーコレーション

§ 2.4 で紹介したパーコレーションはコンピューターによって非常に簡単にシミュレートすることができる。2次元または3次元の正方格子を考え、格子上に点をランダムに分布させる。この点を金属とみなし、隣り合う格子点上に点が並んでいれば、それらは連結しているものとする。点の存在確率  $p$  を変えることにより、相転点  $p_c$  を推定したり、連結した点の塊まりであるクラスターのフラクタル次元を求めたりすることができる。マイコンによるシミュレーションの例とプログラムが図 3.3.1 に示してある。

クラスターのフラクタル次元は、次のようにして計算される。 $s$  個の点からなるクラスターに着目したとき、それらの平均半径  $R_s$  を以下のように定義する。

$$R_s \equiv \left\langle \left( \sum_{i=1}^s \frac{r_i^2}{s} \right)^{1/2} \right\rangle \quad (3.3.1)$$

ここで  $r_i$  はクラスターの重心から  $i$  番目の点までの距離をあらわし、 $\langle \dots \rangle$  は、 $s$  個の点からなるクラスターすべてについての平均を意味する。 $R_s$  が  $s$  のべきに比例するとき、クラスターはフラクタルであり、その輪隔の次元を  $D$  とすれば (1.3.11) 式より、



```

10 REM PERCOLATION
15 P=0.59
20 GRAPH C,01,I1:PRINTCHR#(6)
30 FOR I=0 TO 100
40 FOR J=0 TO 100
50 IF RND(1)<P THEN SET I,J
60 NEXT J
70 NEXT I
80 STOP

```

図 3.3.1. パーコレーションのシミュレーションの例とそのプログラム ( $p = 0.59$ )

$$R_s \propto S^{1/D} \quad (3.3.2)$$

とあらわされることになる。

シミュレーションの結果、臨界点においては、(3.3.2)式の関係が成立しており、フラクタル次元は、2次元、3次元おのおの場合 1.79, 2.13 になっていることがわかった。<sup>49)</sup>

§ 2.4 で述べた 2 次元パーコレーションクラスターのフラクタル次元の実験値は 1.9 であったので、ほぼ一致していると言ってもよいだろう。

$p$  の値が臨界値よりも小さい場合には、関係式 (3.3.2) の成立する範囲には制限があるがフラクタル次元は定義できる。その値は 2 次元の場合 1.67 であり、3 次元の場合には 2.0 になっていることが知られている。<sup>49)</sup>

以上の結果は正方格子上でのシミュレーションによって得られたものであるが、実はパーコレーションは格子の型に依存することが知られている。例えば、2 次元の場合の臨界値  $p_c$  は正方格子の場合は 0.59 であるが、蜂の巣格子では 0.70、三角格子では 0.50、となるのである。<sup>50)</sup> パーコレーションクラスターのフラクタル次元も、格子の型に依存すると思われるが残念ながら詳しいことはまだ調べられていないようである。

#### ○ イジングクラスター

相転移を起こす磁性体のモデルのうちで、最も簡単によく知られているのがイジングモデルである。このモデルでは、格子状にスピンの並んでおり、各スピンのとり得る値は、+1 または -1 だけである。系の全エネルギー  $E$  は、次式によって与えられる。

$$E = -J \sum_i \sum_j S_i S_j - H \sum_i S_i, \quad S_i = \pm 1 \quad (3.3.3)$$

ここで  $\sum_i \sum_j$  は、あらゆる最近接格子についての和をあらわす。熱平衡状態を考えれば、全エネルギーが  $E$  であるような状態が生じる確率  $W$  は温度を  $T$  とすれば、

$$W \propto e^{-E/k_B T} \quad (3.3.4)$$

によって与えられる。

実際にシミュレーションを行う場合には、次のようにする。まず、初期のスピンの状態を適当に決める。次にランダムにひとつのスピンを抽出し、そのスピンの符号を変えた場合のエネルギーを (3.3.3) 式によって求め、その状態の生じる確率を (3.3.4) 式によって計算する。そしてスピンの符号を変えるかまたはそのままにしておくかをその確率に従って決める。新たに別のスピンをランダムに抽出し、同じ操作を繰り返すことにより、熱平衡状態がシミュレー

高安秀樹

トされる。

2次元, 3次元のイジング系は, 有限の温度  $T_c$  で相転移を起こすことが知られている。 $T < T_c$  の場合には, スピンが自発的にそろい, 強磁性を示すが,  $T > T_c$  の場合にはスピンの向きがバラバラになり, 帯磁率が0となるのである。§ 2.2.4.で触れたように, ちょうど臨界点  $T = T_c$  では特徴的な長さが発散し, 同じ符号のスピンの形作るクラスターの形や分布がフラクタルになる。シミュレーションの結果, 空間が2次元, 3次元の場合のクラスターのフラクタル次元は1.88, 2.43程度であることが知られている。<sup>51)</sup>

なお, イジング系において,  $H/T$  を有限にしたまま  $T \rightarrow \infty$  とすると, 近接格子との相互作用  $J$  が無視できるようになり, このスピン系を前節のパークレーション系と同一視することができるようになる。

### § 3.4 放電パターン

図 3.4.1 は, カミナリの写真<sup>52)</sup> よりトレースした放電パターンである。このような分岐をとまなうフラクタルは, 川や血管などにも見られるが, それらはどれもよく似た構造をしているように感じられる。これらのフラクタルには共通する成因があるのではなかろうか? 何か普遍的な法則性があるってこのような分岐を伴うフラクタルが造られるのではなかろうか? コンピューターによって放電のシミュレーションを行うことにより, その手がかりを探してみることしよう。

沢田ら<sup>53)</sup> は, 放電パターンの形成において最も重要なのは, ある種のランダムな成長過程であると考えた。彼らのモデルでは, 2次元格子上的ランダムなパターンは次のような規則によって成長させられる。パターンの先端部は確率  $p$  でまっすぐに伸び, 先端ではない部分からは確率  $q$  で新しい枝が発生する。比率  $R \equiv p/q$  が生長過程を規定する唯一のパラメーターである。この方法によって得られるパターンの例が図 3.4.2 に示してある。彼らは, これらの図形がフラクタルであり, そのフラクタル次元は  $R$  によって変化することを見出している。

このモデルは放電パターンに限らず, ある種の生物の成長のモデルとみなすこともできよう。実際,  $R = 1$  の場合は, エーデンによってガン細胞の成長のモデルとして研究されている。<sup>54)</sup> 図 3.4.2 の図形は放電パターンとしては図 3.4.1 と比べるとあまり似ておらず, 不満が残るがより複雑な成長の規則を導入することにより, 欠点を減らすことは可能である。ニーメヤーらは,<sup>55)</sup> パターンの成長の確率を先端とそうでない点に分けて考えるのではなく, 各部分の電場の強さによって決まるようにしてシミュレーションを行った。つまり, 電場が強いところ程生長しやすくしたわけである。その結果, 放電パターンとしての欠点は大幅に改善され, § 3.

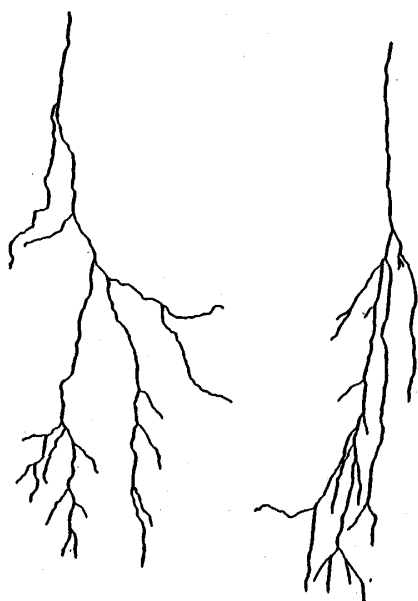
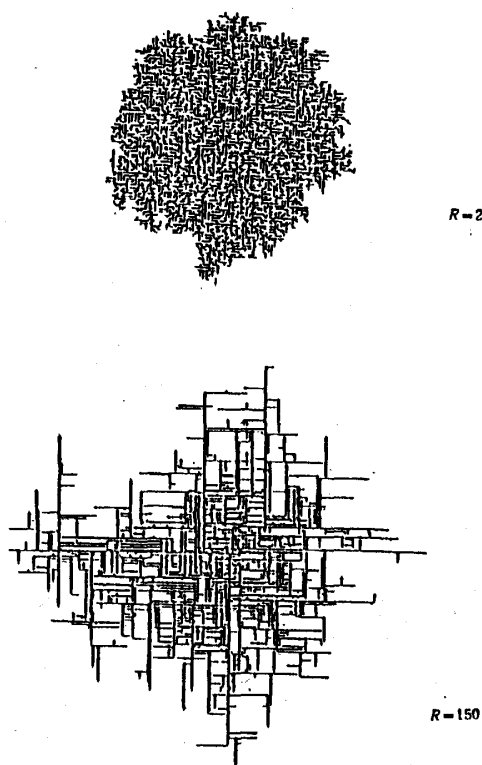


図 3.4.1. 実際のカミナリの放電パターン.

図 3.4.2. 沢田らによる放電パターンのシミュレーションの例。<sup>50)</sup>

1に示した凝集体の構造と非常によく似たパターンが得られるようになった。得られたパターンはやはりフラクタルであり、次元はおよそ1.7程度であった。その値は全面上を等方的に放電させた放電パターンのフラクタル次元の実験値とほぼ一致している。

これに対し、最近、高安<sup>56)</sup>は彼らとは全く別の方法で放電のシミュレーションを試みた。この方法においては、放電の素過程が抵抗の非線形不可逆な電圧特性によってモデル化される立場をとる。

ひとつの抵抗の両端に電圧 $E$ がかけられた状態を考える。 $E$ がある臨界値 $E_c$ よりも小さい場合には、 $E$ を変えても抵抗の大きさは $R$ のまま変化しないものとする。 $E$ が $E_c$ を越えた後では、抵抗は電氣的に破壊され、抵抗の大きさは桁違いに小さな値 $\alpha \cdot R$ になるものとする。ここで $\alpha$ は、小さな正の数、例えば0.01をあらわす。そして、一度破壊された抵抗はもとには戻らず、 $E$ が $E_c$ より小さくなったとしても、抵抗の大きさは $\alpha R$ のままであるとする。この、抵抗の破壊に伴う電気抵抗の減少を放電の素過程とみなすわけである。

このような抵抗が、2次元の格子状に配列された回路を考える。回路の上端と下端は導体でできた極板で、その間には電圧 $V$ がかけられる。(図 3.4.3)  $n \times n$  格子の場合の全抵抗数 $N_T$ は、

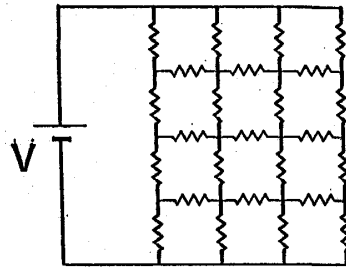


図 3.4.3. 高安による放電のシミュレーションのモデル。4×4 格子の場合。

$$N_T = n^2 + (n-1)^2 \quad (3.4.1)$$

によって与えられる。これらの各抵抗に番号をつけ、 $i$  番目の抵抗の抵抗値を  $R_i$ 、電流を  $I_i$ 、抵抗の両端の電位差を  $E_i$  とする。電流の準定常性を仮定すれば、オームの法則、キルヒホッフの第1法則によって、任意に与えられた  $\{R_i\}$  と  $V$  に対して  $\{I_i\}$  と  $\{E_i\}$  に関する連立1次方程式が導かれる。この連立方程式は、コンピュータによって解くことができ、 $\{I_i\}$  と  $\{E_i\}$  が得られる。

放電パターンの成長過程は、次のような手順によってシミュレートされる。

1.  $\{R_i\}$  と  $V$  を与える。
2.  $\{E_i\}$  と  $\{I_i\}$  を解き、少なくともひとつの抵抗が放電するまで電圧  $V$  を上げていく。  
放電した抵抗に関し、 $R_i = \alpha \cdot R_i$  とする。
3.  $\{E_i\}$  と  $\{I_i\}$  を解く。まだ放電していない抵抗について  $|E_i| \geq E_c$  をみたすものがあれば  $R_i = \alpha \cdot R_i$  とする。
4. 前の過程において、放電した抵抗が両極板をつなぐ連結した塊まりを形成した場合、もしくはひとつも新たに放電しなかった場合には、ストップさせる。それ以外の場合には手順3にもどる。

図 3.4.4 は、10×10 格子における放電パターンの成長の例である。抵抗の値はランダムに与えてある。 $(R_i = \bar{R} + R^* \cdot Z, \bar{R}, R^* : \text{定数}, Z : \text{一様乱数})$  この場合には、最初に1ヶ所で起こった放電が次のステップで近くの抵抗の放電を誘発し、連鎖反発的に放電が起こり第4ステップにおいて、両極板をつなぐ放電パターンが形成されてシミュレーションが終了している。放電が連鎖反発的に起こるのは、放電した抵抗の抵抗値が下がり、その抵抗にかかる電位差が減少したときに、その減少分を補う為に周囲の抵抗にかかる電位差が増大するからである。この図の最終状態では、幾つもの放電した抵抗の塊まりが分布しているが、孤立した塊

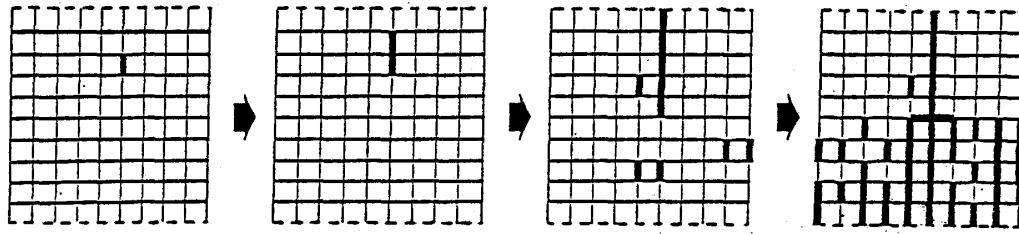


図 3.4.4. 10×10 格子における放電パターンの成長の例。  
太陽が放電した抵抗を表わす。点線は、極板。

まりは格子全体の電気的な特性にはあまり影響を及ぼさない。両極板間の電気伝導度は、両極板をつなぐ放電した抵抗の塊まりだけの性質でほとんど決まるのである。この塊まりをパーコレーションクラスターと呼ぶことにし、以下ではパーコレーションクラスターの形のみ注目することにする。

図 3.4.5 は 32×32 格子上に造られた異なる  $\{R_i\}$  に対するパーコレーションクラスターの例である。これらの形は複雑な分岐構造を持っており、自然界の放電パターン（図 3.4.1）と比較的よく似ているように思われる。まだこのシミュレーションでは格子が粗いのでやや角ばった形になっているが、格子を細かくすることにより、よりよい形が造り出されることが期待される。

放電の成長は必ずしもいつでもパーコレーションクラスターができるまで続くわけではなく、第 1 もしくは第 2 ステップで止まってしまうこともある。しかし、第 3 ステップの放電が起こった場合には、だいたいいつでも放電はパーコレーションクラスターができるまで継続する。またこの方法では幾つかのパラメーター、例えば  $\alpha$ ,  $\bar{R}$ ,  $R^*$ ,  $E_c$  を導入しているが、得られ

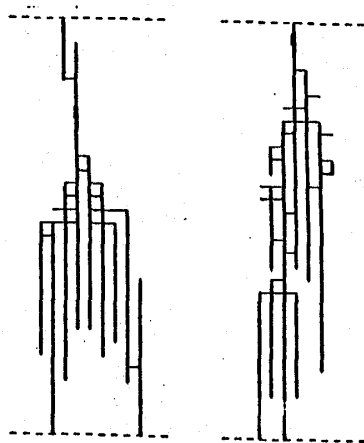


図 3.4.6. 全抵抗数  $N_T$  とパーコレーションクラスター中の抵抗の数  $N_C$ 。

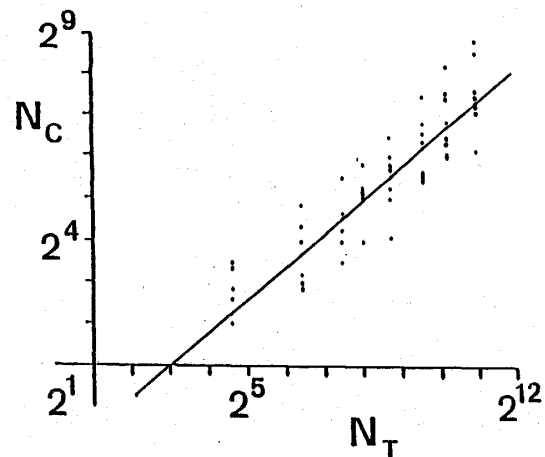


図 3.4.5. 32×32 格子上の放電パターンの例。

高安秀樹

るパーコレーションクラスターの形はこれらのパラメーターにはあまり依存しないようである。

小さな格子上に造られるパーコレーションクラスターは小さいが、それらの形は大きな格子上に造られるものとよく似ている。そこで、これらのパーコレーションクラスターのフラクタル的特性を調べて調べてみよう。図 3.4.6 は、格子の大きさを変えた時のパーコレーションクラスターの中の抵抗の数  $N_c$  と全抵抗数  $N_T$  の関係を log-log プロットしたものである。点のバラツキは大きいですが、近似的に次の関係式が成り立っていることがわかる。

$$N_c \propto N_T^{0.79} \quad (3.4.2)$$

格子を細かくした極限では  $N_T$  は面積に比例した量になるので、(1.3.10) 式よりこれらのパーコレーションクラスターのフラクタル次元  $D$  は、

$$D = 2 \times 0.79 = 1.58 \quad (3.4.3)$$

となる。この値は、通常ランダムなパーコレーションクラスターの次元 1.79 よりも明らかに小さい。それは、ここで得られたパーコレーションクラスターの枝が方向性を持って伸びていることによるものと思われる。図 3.4.4 や図 3.4.5 をよく見ればわかるように、大部分の枝は初めに放電した抵抗から極板に向かって伸びているような形をしているのである。このような、方向性を持った分岐は自然界の放電においても観測されているらしい。

ここで述べた放電のシミュレーションのキーポイントは、次の2つのことに集約できる。ひとつはアприオリな抵抗のゆらぎ、もうひとつは抵抗の非線形不可逆な電圧特性である。後者は、電流に着目すれば、電流が強い程より流れやすくなる性質と言い換えてもよいかもしれない。更に一般的な言い方をすれば、次のようになる。ある流れの場を考えた時、流れの強い場所程、より流れやすくなるような性質があったとする。もしも初期の流れが一様でなく、ゆらぎがあったとすれば、流れの強い場所の流れはより強くなり、流れの弱い場所の流れはより弱くなるだろう。その結果、流れは自発的に組織化され、放電パターンや川のような分岐をとまうフラクタルができあがると考えることはできないだろうか？

### § 3.5 ランダムウォーク

#### ○ 自己回避ランダムウォーク

全く自由なランダムウォークの軌跡のフラクタル次元は、空間の次元によらずに2であることが知られている。それに対し、自己の軌跡が重なり合わないという束縛条件をつけたランダムウォークの性質は空間の次元に依存し、なかなか興味深い。このような自己回避ランダムウ

ォークは § 2.4 で述べたように、糸状の高分子の構造のモデルとしてよく使われるが、それ以外でも地形学の分野では川のモデルとして使われている。<sup>57)</sup> ある地点に降った雨は、川に沿ったランダムウォークをして流されるが、川はループになって流れることはないので自己回避的になっているのである。

自己回避ランダムウォークは、シミュレーションや理論によって詳しく解析されており、軌跡はフラクタルで、その次元  $D$  は、次式によって表されることが知られている。<sup>1)</sup>

$$D \doteq \frac{2+d}{3} \quad (3.5.1)$$

ただし、 $d$  は空間の次元をあらわす。空間が 2 次元の場合には軌跡の次元は 1.33 になるが、この値は § 2.4 で紹介した雲の輪郭の次元 1.35 にほぼ等しい。この一致は、たぶん偶然ではないだろう。

### § 3.6 オートマトン

複雑な組織構造を簡単な同一の規則によって造り出すことはできないだろうか？ どんな生物でも、高々数十本の DNA の複生過程を繰り返すことにより形づくられているという事実から考えれば、このような試みは大変有望であると言えるだろう。コンピューターによってそれを実行しているのがオートマトンと呼ばれている数値的なモデルである。

オートマトンは普通次の 5 つの特性を持っている。<sup>58)</sup> (ここではセルオートマトンを考える。)

- 1) 離散的格子点より構成される。
- 2) 離散的に時間発展をする。
- 3) 各格子点のとりうる値は有限個である。
- 4) 各格子点の値は同一の決定論的な規則に従って、時間発展させられる。
- 5) ひとつの格子点の値の時間発展は、その格子点の近傍だけで決まる。

自明でない最も簡単なオートマトンの例を示そう。 $a_i(n)$  によって、時刻  $n$  における  $i$  番目の格子点上の値を表すことにする。 $a_i(n)$  の取りうる値は 1 と 0 の 2 つだけであるとし、時間発展の規則を次のように定める。

$$a_i(n) = a_{i-1}(n-1) + a_i(n-1) \pmod{2} \quad (3.6.1)$$

ここで  $\pmod{2}$  は、2 で割ったときの余りを表わす。図 3.6.1 は、次の初期条件のもとでの時間発展を示したものである。

$$a_0(0) = 1$$

$$a_i(0) = 0, \quad i \neq 0 \quad (3.6.2)$$

この図では、値が1であるような格子点の位置を黒い点で示している。離散的時空に現われてきたパターンは § 1.4 で紹介したシルピンスキーのギャスケットに他ならない。(3.6.1)の規則は局所的であるにもかかわらず、得られるパターンはフラクタルであり、大局的な組織構造を持っていると言ってもよいだろう。

(3.6.1.) 式は足し算なので、一般の初期値の場合に解の重ね合わせができるのではないと思われるかも知れないが、切り捨てをする演算 mod 2 がある為、解の重ね合わせは全くできない。それは、(3.6.1)の規則が次の規則と全く同値であることからわかる。

$$b_i(n) = b_{i-1}(n-1) \times b_i(n-1) \quad (3.6.3)$$

ここで  $b_i(n)$  は +1 と -1 の値だけをとるものとする。 $a_i(n) = 0$  が  $b_i(n) = +1$  に、 $a_i(n) = 1$  が  $b_i(n) = -1$  に対応していることは明らかだろう。

いずれにしても、このような簡単な規則によって非常に複雑なフラクタル構造が生みだされることは離散系の奥深さを暗示するものであり、微分や連続体になじみの深いものにとっては神秘的にすら見えるのではなかろうか？

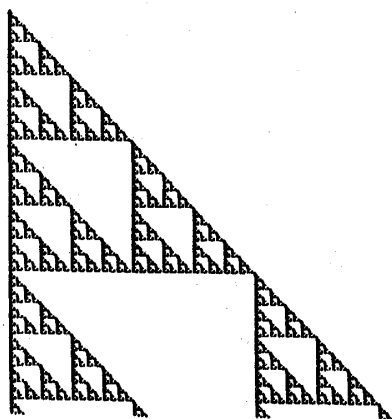


図 3.6.1. オートマトンによるパターン。  
横軸は空間、縦軸は時間（下方が正）。

## 第4章 理論的なフラクタルモデル

この章では、コンピューターシミュレーションに頼らずに解析できるようなモデルを紹介する。理論的な扱いだけで解ける問題は非常に単純化されたものが多く、現実性に欠ける傾向がある。しかし、自然界における雑音、シミュレーションにおける誤差のような未知の要素が入り込まないおかげで、問題の本質が抽出されやすくなるという利点がある。また、シミュレーションの場合には、あるパラメーターの時に何かが成立することがわかっていても、異なるパラメーターに対してどうなるかは全く未知であることが多い。その点理論的に得られた結果は、一般性が高い場合が多い。そういう意味で、シミュレーションと理論的扱いとは相補的な関係にあり、どちらも現実の現象の理解には欠く事ができない。理論的な解析の道具となる数学的な手法等は、第5章で述べることにし、ここでは物理的なモデルに焦点を絞ることにする。

### § 4.1 乱流モデル

§ 2.4 で述べたように、レイノルズ数の十分大きい場合の乱流は、フラクタル構造になっていることが知られている。このことを考慮に入れた乱流モデルが幾つか提案されている。

フラクタルの概念が考え出される以前に、ノビコフとスチュワート<sup>59)</sup> は乱流のエネルギー散逸領域が空間的に次のように分布しているようなモデルを考えた。乱流のエネルギーの大部分が含まれるような大きな仮想的な立方体を考える。この立方体を  $N^3$  個の立方体に分割したとき、そのうちの  $M$  個の立方体にエネルギーの大部分が局在し、残りの  $N^3 - M$  個の立方体には乱流のエネルギーはほとんどない。従って、その部分ではエネルギー散逸もないと考える。 $M$  個の立方体のうちのひとつを取り出し、それをまた同様に  $N^3$  個の立方体に分割すると、そのうちの  $M$  個にエネルギーが局在しているものとする。このような分割を繰り返し、立方体の大きさが粘性の影響が現われる程度になったとき、その小さな立方体では一様にエネルギー散逸が起こっているものとみなす。このモデルは、典型的なフラクタルであり、そのフラクタル次元  $D$  は次式によって与えられることは明らかであろう。

$$D = \frac{\log M}{\log N} \quad (4.1.1)$$

このような  $D$  次元のフラクタル領域で一様にエネルギーが散逸しているモデルでは、エネルギー散逸の相関は (2.4.4) 式及び (2.5.5) 式を満たすことが知られている。

乱流の乱れた領域がこのようにフラクタルになっていることは、速度相関や、エネルギー

高安秀樹

ベクトルに影響を与えている。エネルギー散逸が一様である場合には、§ 5.3 で述べるように有名なコルモゴロフの  $-5/3$  乗則が次元解析によって導かれるが、それは次のように修正される。空間的に離れた 2 点,  $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}$  における速度の差の自乗平均  $B(r)$  は,

$$B(r) \equiv \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2 \rangle \propto r^{2/3 + (3-D)/3} \quad (4.1.2)$$

となり、そのフーリエ変換によって定義されるエネルギースペクトル  $E(k)$  は,

$$E(k) \propto k^{-5/3 - (3-D)/3} \quad (4.1.3)$$

となる。指数部分の第 2 項がフラクタル構造による効果である。この補正は 0.1 程度の大きさであり、精密な測定によって検証可能な範囲にあるが、まだ実験的には確認されていないようである。

統計的に見れば、乱流におけるエネルギー散逸量は、渦度の 2 乗に比例するので、エネルギー散逸領域がフラクタルであるということは、渦度の空間的分布がフラクタルであるということである。それでは、渦度が 3 次元空間にランダムにフラクタル分布している場合、それらの渦によって誘導される速度場はどのようなものになるだろうか？ この問いに対する答えは、高安<sup>60)</sup>によって以下のように与えられている。

3 次元ユークリッド空間中に、沢山の渦点が分布している状態を考え、それらの座標、渦度ベクトルをそれぞれ  $\{\mathbf{r}_j\}$ ,  $\{\boldsymbol{\omega}_j\}$  とする。ここで渦点とは、渦度がデルタ関数のように 1 点に集中したものである。各渦点が、ビオーサバールの法則に従って周囲の流体を流しているものとすれば、座標  $\mathbf{r}$  における速度は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{u}_j \quad (4.1.4)$$

$$\mathbf{u}_j \equiv - \frac{\boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (4.1.5)$$

各渦点が独立に分布していると仮定すると、速度  $\mathbf{u}$  の分布関数  $W(\mathbf{u})$  は次のように与えられる。

$$W(\mathbf{u}) = \prod_j \int \int \int d\mathbf{r}_j \tau_j(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\omega}_j) \cdot \delta(\mathbf{u} - \sum_j \mathbf{u}_j) \quad (4.1.6)$$

ただし、 $\tau_j(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\omega}_j)$  は、 $j$  番目の渦点が座標  $\mathbf{r}_j$  にあり、渦度が  $\boldsymbol{\omega}_j$  である確率をあらわす。渦度が  $D$  次元のフラクタル領域  $\mathbf{F}_D$  上を一様に分布するものとし、

$$\tau_j(\mathbf{r}_j, \boldsymbol{\omega}_j) \propto \begin{cases} \tau(\boldsymbol{\omega}_j); \mathbf{r}_j \in \mathbf{F}_D \\ 0 & ; \mathbf{r}_j \notin \mathbf{F}_D \end{cases} \quad (4.1.7)$$

とおく。(4.1.6)式のデルタ関数をフーリエ積分で表し、積分の順序交換を行うと、多少の計算の後、 $W(\mathbf{u})$ を次のような型に表現することができる。

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint d\boldsymbol{\rho} \cdot \exp\{-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u} - \eta \cdot A(\boldsymbol{\rho}) \cdot |\boldsymbol{\rho}|^{D/2}\} \quad (4.1.8)$$

ここで、 $\eta$ は渦点の $\mathbf{F}_D$ 上での密度に比例する量であり、 $A(\boldsymbol{\rho})$ は次式によって与えられる量である。

$$A(\boldsymbol{\rho}) = \iiint d\boldsymbol{\omega} \tau(\boldsymbol{\omega}) |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} / \boldsymbol{\rho}|^{D/2} \quad (4.1.9)$$

(4.1.8)式によって与えられる $W(\mathbf{u})$ は、特性指数が $D/2$ の対称な安定分布である。安定分布については§5.2で詳しく述べるが、興味深いのは $|\mathbf{u}|$ が大きいところで $W(\mathbf{u})$ がベキの型になっていることである。渦度の分布 $\tau(\boldsymbol{\omega})$ が等方的な場合には、 $W(\mathbf{u})$ は次のように近似することができる。

$$\begin{aligned} W'(|\mathbf{u}|) &= 4\pi^2 \cdot |\mathbf{u}|^2 W(\mathbf{u}) \\ &= \begin{cases} |\mathbf{u}|^2 & ; |\mathbf{u}| \rightarrow 0 \\ |\mathbf{u}|^{-D/2-1} & ; |\mathbf{u}| \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

この式からもわかるように、ベキの指数は、乱流のフラクタル次元 $D$ に依存している。(4.1.8)式及び(4.1.10)式は、乱れが一様な場合( $D=3$ )にも成立し、それは特別にホルツマーク分布と呼ばれている。中央極限定理に馴染みの深い人は、(4.1.4)式から $\mathbf{u}$ の分布が、ガウス分布になることを予想するかも知れないが、図4.1.1を見ればわかるように、 $|\mathbf{u}|=0$ の近く以外では $\mathbf{u}$ の分布はガウス分布とは大きく異なっている。

乱流を渦点の集合とみなすこのモデルは、コルモゴロフ型のエネルギースペクトルを与えないという重大な欠点があり、<sup>61)</sup> そのままでは乱流のモデルとしては適当ではないかもしれない。実験によって測定されている乱流中の速度の分布も、ここで述べた分布よりはずっとガウス分布に近いようである。<sup>62)</sup> しかし、速度の大きなところでは、ベキの型の分布が観測されると

高安秀樹

いう報告もあり、<sup>63)</sup> このモデルの帰結は必ずしも誤りではない。渦点同志の分布に空間的な相関を入れる等、このモデルを改良していく余地は十分あると思われる。

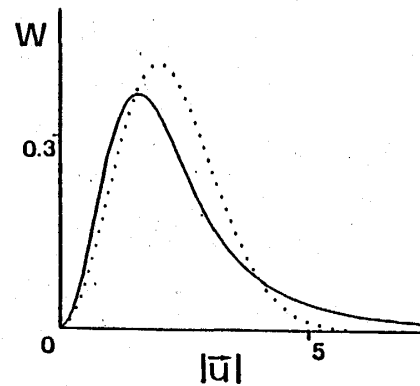


図 4.1.1. ガウス分布(…)とホルツマーク分布(—)。

## § 4.2 ロングタイムテイル

アルダーとウェインライトは、沢山の粒子がお互いに弾性散乱しているような系のシミュレーションを行っているうちに、粒子の自己速度相関関数の奇妙な性質を発見した。時間とともに指数関数的に減衰すると思われていた相関が、ある時間以降はベキの型の減衰をすることがわかったのである。<sup>64)</sup> その後、シミュレーションや理論的解析が進むにつれて、このベキの指数は空間の次元  $d$  に依存し、次のように表わされることが明らかになってきた。

$$\langle v(0) v(t) \rangle \propto t^{-d/2} \quad (4.2.1)$$

このようなベキの型の相関は、指数減衰に比べて長く尾をひくというニュアンスから、long-time tail (略して L. T. T) と呼ばれている。

相関関数に L. T. T. があるということは、非常に長い時間がたっても粒子が過去の自分の速度を忘れないということである。忘れないといっても、粒子自身には記憶のメカニズムはないので、単に過去の影響が残ると言った方が正確かも知れない。ランダムウォーク粒子の運動を解析する場合には、粒子の存在確率  $S(x, t)$  に対して、次のようなフォッカー・プランク方程式の偏微分方程式を考えることが多い。

$$\frac{\partial}{\partial t} S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \frac{\partial^j}{\partial x^j} S \quad (4.2.2)$$

しかし、L. T. T. があると拡散係数  $a_2$  あるいは高次の拡散係数  $a_3, a_4, \dots$  が発散し、この展開は破綻する。従って、L. T. T. の有無は、粒子の運動を理論的に解析する立場からすれば重大な問題なのである。

このような速度相関関数の L. T. T. は、多体系固有の性質ではない。1つの粒子が、固定さ

れた散乱体に弾性散乱されるようなローレンツガスモデルにおいても L.T.T がみつかったのである。このモデルは、金属中の電子の運動を古典力学的にモデル化したもので、粒子をパチンコ玉、そして散乱体を釘とみなすことにより、パチンコと同一視してもかまわない。散乱体が格子状に規則正しく並んでいる場合には、相関関数は指数的減衰をする。しかし、散乱体がランダムに分布している場合には、次のような L.T.T があらわれることが知られている。<sup>65)</sup>

$$\langle v(0) \cdot v(t) \rangle \propto t^{-(d/2+1)} \quad (4.2.3)$$

(4.2.1) と比べると、ベキの指数が異なるだけでなく、符号も逆になっている。

これらの L.T.T に関して、特に興味深いのは、ベキの指数が空間の次元  $d$  に依存することであろう。(4.2.1), (4.2.3) 式における  $d$  は、整数値 1, 2, 3 だけしか考えていないがこの次元を非整数に拡張することはできないだろうか？ 1次元の確率的ローレンツガスモデルに関しては、高安と平松<sup>66)</sup>によって不純物の分布がフラクタルになっている場合にまで拡張されている。それを次に紹介する。

次のような格子モデルを考える。 $x$  軸上の各点  $x = i \Delta x$  ( $i$ : 整数) に、点状の不純物が並んでいる中を、 $+c$  または  $-c$  の速度だけをとる粒子が走っている状態を考える。時刻  $t = n \Delta x / c$  に、区間  $((i-1) \Delta x, i \Delta x]$  にあり、速度が  $+c$  だった粒子は、時刻  $t = (n+1) \Delta x / c$  においては  $x = i \Delta x$  にある不純物に散乱されて速度が  $-c$  になり、区間  $((i-1) \Delta x, i \Delta x]$  にあるかあるいはその不純物に散乱されずに同じ速度のまま、区間  $(i \Delta x, (i+1) \Delta x]$  にあるかのいずれかであるとする。おのおの場合の生じる確率は、それぞれ  $1 - e^{-a_i}$  と  $e^{-a_i}$  であるとする。即ち、 $x = i \Delta x$  における不純物は、確率  $1 - e^{-a_i}$  で粒子をはね返すわけである。(図 4.2.1) ここで、この正の数  $a_i$  は、点  $x = i \Delta x$  における不純物の量をあらわすものとみなすことができる。この系に対して、次の差分方程式が厳密に成立する。

$$S_i^+(n+1) = e^{-a_i} \cdot S_{i-1}^+(n) + (1 - e^{-a_i}) S_i^-(n)$$

$$S_i^-(n+1) = (1 - e^{-a_{i+1}}) S_i^+(n) + e^{-a_{i+1}} \cdot S_{i+1}^-(n) \quad (4.2.4)$$

ここで  $S_i^+(n)$  と  $S_i^-(n)$  は、それぞれ粒子が、時刻  $t = n \Delta x / c$  において、区間  $(i \Delta x, (i+1) \Delta x]$  にあり、速度が  $+c$  と  $-c$  である確率をあらわす。

速度相関関数は、次式によって与えられる。

$$C(n \Delta x / c) = \langle v(n) v(0) \rangle$$

$$= c^2 \frac{\sum_i (S_i^+(n) - S_i^-(n))}{\sum_i (S_i^+(0) - S_i^-(0))} \quad (4.2.5)$$

(4.2.4) 式に対する初期条件を

$$S_i^+(0) = -S_i^-(0) = \text{一定}$$

とすれば、(4.2.5) 式は粒子の初期座標と初期速度について平均をとったことになる。<sup>67)</sup>

不純物の分布が  $D$  次元のフラクタルである場合には、(1.3.16) によれば  $\{a_i\}$  が次のような関係を満足する。

$$\overline{(a_j - a)(a_i - a)} \propto \begin{cases} |i - j|^{D-1}, & 0 < D < 1, \quad i \neq j \\ \delta_{ij}, & D = 0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

ここで  $\overline{\quad}$  は、アンサンブル平均をあらわし、また  $a = \overline{a_i}$  ( $i$  に依存しない) である。各  $a_i$  はこの関係をみたす範囲でランダムに与えられる。

図 4.2.2 は、 $D=0$  と  $D=0.6$  の場合について (4.2.4) 式を数値的に解いた結果の  $C(t)$  を示している。この図の  $t \geq 5 \times 10^1$  の部分が L.T.T である。L.T.T. のベキの指数は  $D=0$  の場合に  $-1.50$ ,  $D=0.6$  の場合に  $-1.21$  となっている。 $D=0$  の場合は (4.2.3) 式に

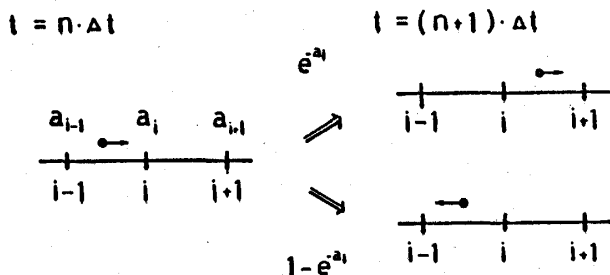


図 4.2.1. 不純物による粒子の散乱の様子。

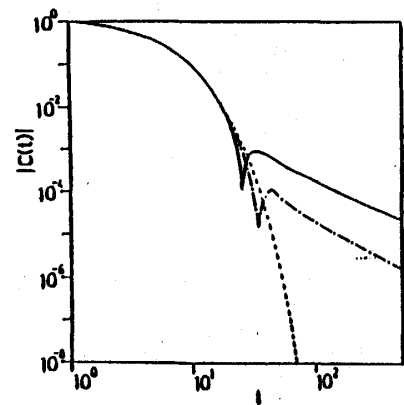


図 4.2.2. 相関関数の絶対値と時間。

$D = 0.0$  ————。  
 $D = 0.6$  —————。

による値、 $-3/2$  と一致するが、 $D = 0.6$  の場合には (4.2.3) は正しくない。 $D$  をいろいろ変えて計算してみた結果、(4.2.3) 式は空間が 1 次元で不純物が  $D$  次元分布している場合には、次のように拡張されることが確かめられた。

$$\overline{C(t)} \propto t^{-\{(1-D)/2+1\}}, \quad 0 \leq D < 1 \quad (4.2.7)$$

この結果は、数値的に確かめられただけでなく、摂動展開に基づく理論によっても裏づけられている。さらに、空間が次元  $d$  の場合には、次のようになることが予想されている。

$$\overline{C(t)} \propto t^{-\{(d-D)/2+1\}} \quad (4.2.8)$$

この一般型はまだ確認されてはいないが、いずれにしても L.T.T のベキの指数が不純物（あるいは散乱体）のフラクタル次元に依存することは間違いないだろう。

### § 4.3 悪魔の階段

相転移現象等との関連で、短距離相互作用の働くスピン系の性質に関しては多くのことがわかってきているが、クーロン力のような長距離相互作用がある場合のスピン系については、未知な部分が多い。ここでは、そのような長距離相互作用がある場合に、外場と帯磁率の関係が厳密に悪魔の階段になるような 1 次元のスピンモデルを紹介する。

ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  が次式で与えられるような  $N$  個のスピン  $S_i = \pm 1$  より成る環状イジング系を考える。

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N H \cdot S_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J(i-j)(S_i + 1)(S_j + 1) \quad (4.3.1)$$

ここで  $H$  は外場の強さを表わす。また、 $i$  番目と  $j$  番目の格子間の相互作用を規定する。

$J(i-j)$  は、次の関係を満足するものとする。

$$1) \quad i \rightarrow \infty \text{ としたとき, } J(i) = 0$$

$$2) \quad \text{すべての } i \text{ に対して, } J(i+1) - 2J(i) + J(i-1) \geq 0$$

この 2 番目の条件は、ポテンシャルが下に凸であることを意味している。通常のイジング系では、相互作用  $J(i-j)$  は、最近接格子同志以外の場合には 0 とするが、ここでは長距離相互作用を考えるので、 $J(0)$  以外では一般に 0 ではない。またこの系では、(4.3.1) 式の第 2 項の型からわかるように、上向きのスピン ( $S = +1$ ) 同志だけしか相互作用をしない。従っ

高安秀樹

て、上向きスピンを電荷を持った粒子とみなして、クーロン力が働いているような状況を考えればよい。

全スピン中の上向きスピンの比率  $q$  を与えたとき、エネルギー  $\mathcal{M}$  の最も低い状態は、上向きスピンのできる限り等間隔で並んでいる状態である。例えば、 $n$  をある自然数としたとき、 $q = \frac{1}{n}$  の場合には、上向きのスピンは  $n$  スピンごとに配位している状態が最もエネルギーが低い。 $q$  が有理数であり、互いに素な自然数  $m, n$  によって  $q = \frac{m}{n}$  とあらわされる場合には、スピンは  $n$  を周期とし、1つの周期の中に  $m$  個の上向きのスピンを含むように配列する。このとき上向きのスピン同志の間隔は、 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  または  $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$  である。例えば、 $q = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$  の場合には、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} ; \dots + - - + - - + - - \dots \\ \frac{2}{5} ; \dots + - - + - + - - + - \dots \\ \frac{3}{7} ; \dots + - + - + - - + - + - \dots \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$q$  が一般の有理数の場合には、エネルギーが最小となるような配列は次のアルゴリズムによって与えられることが証明されている。<sup>68)</sup> まず、 $q$  を次のような連分数の型で表わす。

$$\begin{aligned} q = & \frac{1}{n_0 + \frac{\alpha_0}{n_1 + \frac{\alpha_1}{n_2 + \frac{\alpha_2}{n_3 + \dots + \frac{\alpha_{k-2}}{n_{k-1} + \frac{\alpha_{k-1}}{n_k}}}}} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

ここで  $n_i$  は自然数、 $\alpha_i$  は  $+1$  または  $-1$  である。このような連分数展開は、任意の正の有理数に対して一意的に定まる。次に数列  $X_0, X_1, \dots, X_k$  と  $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$  を次のように

定める。

$$X_0 = n_0,$$

$$Y_0 = n_0 + \alpha_0,$$

$$X_{i+1} = (X_i)^{n_i-1} \cdot Y_i,$$

$$Y_{i+1} = (X_i)^{n_i+\alpha_i-1} \cdot Y_i, \quad (4.3.4)$$

この漸化式によって決まる  $X_k$  がスピンの配列を与える。例えば、 $q = \frac{11}{47}$  としてみよう。(4.3.3) 式により、 $n_0 = 4$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 3$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = -1$  となり、(4.3.4) 式によれば  $X_0 = 4$ ,  $Y_0 = 5$ ,  $X_1 = 4^3 \cdot 5$ ,  $Y_1 = 4^2 \cdot 5$  となり  $X_2 = (4^3 \cdot 5)^2 4^2 \cdot 5$  が得られる。これは、次のように書き換えることができる。

$$X_2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \quad (4.3.5)$$

この表式において、4と5はそれぞれ4番目または5番目のスピンの上向きであることを示している。これらの数字の和は47になっており、周期が確かに47であることがわかる。また、4と5の個数の和は11であり、1周期あたり11個の上向きスピンが入っていることがわかる。ちなみに、先に示した例をこの表式によって表わすと次のようになる。

$$\frac{1}{3}; 3$$

$$\frac{2}{5}; 3 \cdot 2$$

$$\frac{3}{7}; 2^2 \cdot 3 \quad (4.3.2)'$$

このようにして、帯磁率に相当する量、 $q = \frac{m}{n}$ を決めたときに、エネルギーが最小となるスピン配列が決まったので、次に外場の強さを変えたときに帯磁率がどう変わるかを求めてみよう。その為に、まず外場  $H$  と帯磁率  $q = \frac{m}{n}$  が与えられた状態で、ひとつの上向きスピンを下

高安秀樹

向きを変えたときのエネルギー変化を考えてみる。Bak と Bruinsma<sup>69)</sup> によれば、そのときのエネルギー変化  $\Delta U$  は次の式によって与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta U = & 2H + 4(r_1 + 1)J(r_1) - 4r_1J(r_1 + 1) + 4(r_2 + 1)J(r_2) \\ & - 4r_2J(r_2 + 1) + \cdots + 4nJ(n - 1) - 4(n - 1)J(n) + \cdots \\ & + 8nJ(2n - 1) - 4(2n - 1)J(2n) + \cdots\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

ここで  $r_i$  は、 $i$  番目の上向きスピンまでの間隔を表わす量で、次式によって定義されるような自然数である。

$$r_i \leq \frac{n}{m} i < r_i + 1 \quad (4.3.7)$$

(4.3.6) 式では、 $r_m = n$ ,  $r_{2m} = 2n$ ,  $\cdots$  等の関係を代入してある。同様に、同じ帯磁率で外場が  $H'$  のとき、ひとつの下向きスピンを上向きにすると、エネルギーは次のように変化する。

$$\begin{aligned}\Delta U' = & -2H' - 4(r_1 + 1)J(r_1) + 4r_1J(r_1 + 1) \\ & - 4(r_2 + 1)J(r_2) + 4r_2J(r_2 + 1) - \cdots - 4(n + 1)J(n) \\ & + 4nJ(n + 1) - \cdots - 4(2n + 1)J(2n) + 8nJ(2n + 1) \\ & - \cdots\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

与えられた外場に対して、帯磁率  $q$  の状態が安定であるということは、全エネルギーがそこで極小になっているということであり、スピン配列の微小な変化が 0 となっているということである。

従って、(4.3.6), (4.3.8) 式の  $\Delta U$ ,  $\Delta U'$  をそれぞれ 0 とすることによって、帯磁率  $q$  の状態が安定である為の条件式が得られる。これらの条件式より、外場の強さの差  $\Delta H = H - H'$  が次のように与えられる。

$$\frac{1}{2} \Delta H(q = \frac{m}{n}) = n \{ J(n + 1) + J(n - 1) - 2J(n) \}$$

$$+ 2n \{ J(2n+1) + J(2n-1) - J(2n) \} + \dots$$

$$+ in \{ J(in+1) + J(in-1) - J(in) \} + \dots \quad (4.3.9)$$

ここで注意すべき点は、右辺が  $m$  に依存しないことである。 $J(i)$  には下に凸であるという条件 2) が課してあるので、(4.3.9) 式の右辺は、任意の  $n, m$  に対して有限な正の値となる。即ち、 $q$  を連続的に変化させたとき、 $q$  が有理数のときに  $H$  が有限な変化をすることになり、悪魔の階段を構成することになる。図 4.3.1 は、クーロン型の相互作用  $J(i) = i^{-2}$  の場合の  $q$  と  $H$  の関係を示している。階段の一部を拡大してみれば、そこには全体と同じような形の階段構造が見られる。

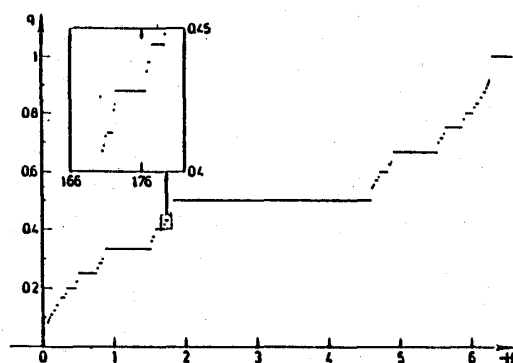


図 4.3.1. スピン同志がクーロン相互作用する場合の外場  $H$  と帯磁率  $q$  の関係<sup>69)</sup>

## 第5章 フラクタルを扱う数学的方法

ここでは、フラクタルに関する解析を行う時に役に立つ数学的な道具や方法を紹介する。今まで述べてきたことを振り返ってもわかるように、フラクタルには、特に難しい数学を必要とするような要素はない。基本的には、対数と指数法則がわかれば十分である。ここで紹介する内容も、決して高度な数学ではない。特に、§5.1の繰り込み群や§5.3の次元解析は、数学とは呼びにくい。むしろ、物理学における便利な道具と言った方が適切かもしれない。フラクタルに関連が深く、しかも特定の対象に限らず、広く使えるような手法の解説をする。

### §5.1 繰り込み群

繰り込み群の理論<sup>70)</sup>は、1982年、ウィルソンに与えられたノーベル物理学賞の対象となったということも影響し、非常に難解な理論であるという印象を与えがちなようである。ところが、実際にはこの理論は決して難解ではなく、少なくとも本質的なところは高校レベルの数学で十分理解可能である。特に後で具体例を示すような実空間での繰り込みは、わかりやすくフラクタルとの関連も深い。

繰り込み群のねらいは、観測における粗視化の度合を変えたときの物理量の変化を定量的にとらえることである。例えば、あるスケールの粗視化のもとで測定した物理量を $P$ とする。このスケールよりも2倍だけ大きなスケールで粗く粗視化した場合に、その物理量が $P'$ になったとする。この $P'$ は、適当な粗視化に関する変換 $f_2$ によってもとの $P$ と次のように関係づけることができるだろう。

$$P' = f_2(P) \quad (5.1.1)$$

ここで $f$ の添字2は2倍の粗視化を意味する。もしも、粗視化の度合をさらに2倍すれば、次のような関係が成り立つ。

$$P'' = f_2(P') = f_2 \circ f_2(P) = f_4(P) \quad (5.1.2)$$

このような関係を一般化すれば、変換 $f$ が次のような性質を持つことがわかる。

$$f_a \circ f_b = f_{a \cdot b} \quad (5.1.3)$$

$$f_1 = 1 \cdot \quad (5.1.4)$$

ここで  $1 \cdot$  は恒等変換を表す。変換  $f$  は、一般的には逆変換  $f^{-1}$  を持たない。というのは、ある状態が与えられたとき、それを粗視化することはいつでもできるが、逆に粗視化された状態を与えておいても、もとの状態は一意的には決まらないからである。このような性質を持つ変換は、数学的には半群と呼ばれる。粗視化による変換を物理では繰り込みと名付けているのでこの  $f$  という変換は本来ならば繰り込み半群と呼ぶ方が正確であろう。しかし、繰り込み群という呼び方が定着している。

この繰り込み群の定義が、フラクタルと密接な関係を持つことは明らかであろう。フラクタルとは、粗視化をしても変化しないようなもののことであるから、繰り込み群の変換  $f$  に対して不変なものがフラクタルであると言ってもよい。歴史的には、フラクタルと繰り込み群は同じくらいの時期（と言っても今から 10 数年前）に独立に生まれた。どちらも観測スケールを変える変換のもとで不変なものを解析することがねらいであったが、フラクタルは幾何学的な形に、そして繰り込み群は物理的な量にそれぞれ焦点を向けていた。しかし、最近ではフラクタルも物理量を含むようになり、一方、実空間繰り込みも幾何学的な対象を扱うようになったので、両者の区別はほとんどなくなっている。

繰り込み群は、相転移における臨界現象の解析には最も有力な道具となる。例えば、§ 2.4 で述べたような液相と気相の臨界点近傍にある  $H_2O$  の状態を考えてみる。状態  $P$  が、臨界点よりもわずかに液相に近かったとしよう。ミクロに見ればこの状態は、液体と気体がランダムに分布しているようにしか見えないだろう。しかし、変換  $f$  を何度も施すことにより、粗視化された状態  $P'$  においては、その度、液相の占める割合が増していくだろう。そして、無限回変換した極限における状態は、完全に液相とみなすことができるようになる。また、もし逆にミクロな状態が気相に近ければ、変換  $f$  を繰り返すことにより、完全に気相であるような状態が得られるだろう。つまり、変換  $f$  に対して不変であるような状態が臨界点であり、その近傍の状態を解析することは、変換  $f$  の性質を調べることに帰着できるのである。

これまで何度かでてきたパーコレーションの問題を、繰り込み群を使って実際に解いてみよう。2次元正方格子の格子点に、ランダムに金属が分布している状態を考える。物理量  $P$  としては、金属の存在確率をとればよい。

今、 $2 \times 2$  の格子点を 1 つの仮想的な格子点に粗視化することを考える。この新しい格子を超格子、粗視化される  $2 \times 2$  の格子点をブロックと呼ぶことにする。ブロック内の 4 点すべてに、金属がある場合には、それを粗視化した超格子点にも金属があるとしてよいだろう。ブロック内の 3 点に金属がある場合も、そのブロックは必ず縦方向にも横方向にも電気を通すので超格子点に金属があるものとしてよい。しかし、ブロック内の点の数が 2 以下になるとそのブ

高安秀樹

ロックは、少なくとも縦方向か横方向のどちらかに電気を通さなくなる。従って、このような場合には、超格子に金属がない場合を対応させるべきであろう。(図 5.1.1) 従って、超格子における金属の存在確率を  $P'$  とすれば、

$$P' = f_2(P) = P^4 + 4P^3(1-P) \quad (5.1.5)$$

が成立する。第 1 項がブロック内の 4 点とも金属の場合、第 2 項が 3 点が金属の場合を表わしているのは明らかだろう。この式によって、変換  $f$  が決定したので、後は  $f$  の性質を調べるだけで相転移が解析できるわけである。

先の議論でも述べたように、臨界点  $P_c$  は、変換  $f$  によって不変な点、つまり不動点である。不動点を  $P^*$  とすれば、(5.1.5) 式より、

$$P^* = P^{*4} + 4P^{*3}(1-P^*) \quad (5.1.6)$$

となり、

$$P^* = 0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \doteq -0.434, 0.768 \quad (5.1.7)$$

が得られる。ここで、 $P$  は確率なので、 $P^* = -0.434$  は除外する。 $P^* = 0, 1$  はそれぞれ金属が全くない場合とすべてが金属の場合を表す自明な不動点である。従って、相転移点は、 $P_c = 0.768$  であるということになる。この値は、シミュレーションによる値  $P_c = 0.59$  よりは、だいぶ大きい。実験値  $P_c = 0.752$  とはほぼ一致している。 $P_c$  よりも小さな  $P$  に対しては、

$$P_c > P > f_2(P) > f_{2^2}(P) > \dots > f_{2^n}(P) \quad (5.1.8)$$

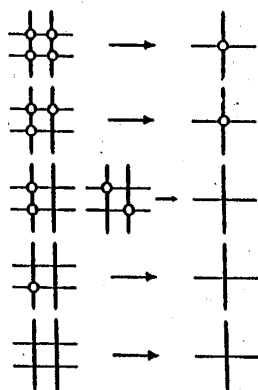


図 5.1.1. ブロックから格子へのくりこみ。

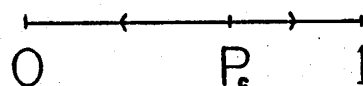


図 5.1.2. くりこみ変換による  $p$  の変化の様子。

が成立し、 $P$ は繰り込むごとに小さくなり、無限に繰り込んだ極限では、 $f_{2\infty}(P) = 0$  となる。これは、非常に大きく粗視化すると、金属が見えなくなることを表わしている。 $P$ が $P_c$ よりも大きい場合には逆のことが成立し、 $f_{2\infty}(P) = 1$  となる。つまり粗視化の極限では、すべて金属になる。このように、 $P_c$ 近傍の点は繰り込むごとに $P_c$ から離れていくので、臨界点 $P_c$ が変換 $f_2$ の不安定な不動点になっていることがわかる。(図5.1.2)

臨界点 $P_c$ が決定したので、次に臨界点におけるパーコレーションクラスターのフラクタル次元を求めてみよう。超格子点が金属になっているとき、ブロック内には3点または4点の金属がある。ブロック内の金属であるような点の数の期待値 $N_c$ は、

$$N_c = \{4 \cdot P_c^4 + 3 \cdot 4 \cdot P_c^3(1 - P_c)\} / P_c \doteq 3.45 \quad (5.1.9)$$

となる。 $P_c$ で割っているのは、この期待値は超格子点が金属であるという条件付きの期待値だからである。超格子と比べると、格子間隔は $1/2$ になっている。超格子で1回だった金属点が、観測の単位長さを $1/2$ にすることによって $N_c$ 個の金属点に見えるわけである。この関係を一般化すれば、観測の単位長さを $1/b$ 倍したときに見える金属点の数 $N_c(b)$ は、

$$N_c(b) = b^{-D} \quad (5.1.10)$$

と表され、今の場合には

$$D \equiv \frac{\log N_c}{\log 2} \doteq 1.79 \quad (5.1.11)$$

という関係を満足することになるだろう。ここで与えられる $D$ の値が求めるパーコレーションクラスターのフラクタル次元を与えていることは言うまでもない。 $D = 1.79$ という値は、シミュレーションによる値と全く一致し、実験値1.9にも近い値となっており、繰り込み群の優秀さを裏づけている。

今は、ちょうど臨界点におけるクラスターのフラクタル次元を求めたが、それ以外にも臨界点近傍の振舞、特に臨界指数は、繰り込み群によって明らかにすることができる。例として、相関長に関する臨界指数 $\nu$ を求めてみよう。

$P$ が臨界点 $P_c$ よりは小さいが、十分臨界点に近いような場合には、格子同志の相関の長さ $\xi$ は有限であり、次のような型になることが知られている。<sup>71)</sup>

$$\xi = \xi_0 (P_c - P)^{-\nu} \quad (5.1.12)$$

ここで、 $\xi_0$ は長さの次元を持った量で、格子間隔程度の大きさの比例定数である。格子を一

高安秀樹

度繰り込んだ超格子上で考えると、相関長 $\xi$ そのものの大きさは、粗視化しても変わらないはずであるから、

$$\xi = \xi_0' |P_c - P'|^{-\nu} \quad (5.1.13)$$

が成立するはずである。ここで $\xi_0'$ は、繰り込んだことにより格子間隔が $b=2$ 倍になっていることから、

$$\xi_0' = b \cdot \xi_0 \quad (5.1.14)$$

と与えられる。(5.1.12)～(5.1.14)式を合わせれば、臨界指数 $\nu$ は次のように表せる。

$$\nu = \frac{\log b}{\log \frac{P_c - P'}{P_c - P}} \quad (5.1.15)$$

$P$ が臨界点に無限に近ければ、

$$\frac{P_c - P'}{P_c - P} \rightarrow \frac{\partial P'}{\partial P} \bigg|_{P=P_c} \quad (5.1.16)$$

となるので、

$$\nu = \frac{\log b}{\log \frac{\partial f_b(P)}{\partial P} \bigg|_{P=P_c}} \quad (5.1.17)$$

が得られる。(5.1.5)式を使ってこの値を計算すると、 $\nu \doteq 1.40$ となる。この値は、シミュレーションによって予想される値 $\nu = 1.35$ とほぼ一致している。

このように繰り込み群を用いると、フラクタル次元や臨界指数は比較的簡単に求められる。

しかし、注意しなければならないのは、

繰り込み群はあくまで近似理論なので、

どうすれば近似の精度を高くしうるかを

押えておかなければいけないという点で

ある。例えば、図5.1.3 aのように格子上ではつながっていない点

が、超格子ではつながったり、逆に図5.1.3 bのように、

格子上でつながっている点

が超格子では離れてしまうことがあるからである。

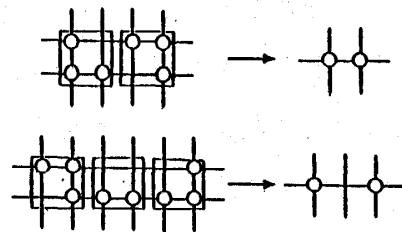


図5.1.3 a. 格子ではつながっていないが、超格子ではつながる場合。  
b. その逆。

このような誤差を減らす為には、一度に繰り込むブロックの大きさが大きければ大きい程よい。しかし、ブロックの一辺の長さを  $b$  とすれば、ブロック内の点の数は  $b^2$  個あり、ブロック全部の状態数は  $2^{b^2}$  個になるので、解析的に変換  $f_b$  を決めることは、 $b=4$  が限度である。

そこで、解析的に  $f_b$  を求めるかわりに、統計的に  $f_b$  を決めるモンテカルロ繰り込みが考え出された。<sup>72)</sup> 例えば、 $b=100$  位にしておいて、 $100 \times 100$  格子上で  $P$  をいろいろ変えたときのパーコレーションクラスターの出現確率  $P'$  をコンピューターによって調べ、 $f_b$  の関数型を推定するのである。 $f_b$  の関数型は正確には決まらないという欠点はあるが、一度に大きなブロックを繰り込めるので、繰り込みの精度は非常によくなる。この方法を使うと、小さなシミュレーションによる結果を利用して、シミュレーションができないような大きな系の性質を知ることができるので、今後、コンピューターの発達に伴って、増々重要性が高まっていくだろう。

## § 5.2 安定分布

安定分布については、§ 2.5 及び § 4.1 でも少し触れたが、フラクタルとの関連が非常に強いので、ここで改めて説明をすることにする。

レビによって考え出された分布の安定性という概念は、次のような和に対する分布の不変性を意味する。<sup>73)</sup>

$X, X_1, \dots, X_n$  を共通な分布  $R$  を持つ互いに独立な確率変数としたとき、

$Y_n \equiv X_1 + \dots + X_n$  に対して

$$Y_n \stackrel{d}{=} c_n X + r_n \quad (5.2.1)$$

となるような定数  $c_n, r_n$  が存在する場合に、分布  $R$  は安定であるという。

ただし、ここで  $\stackrel{d}{=}$  は、両辺の分布が等しいことを示す。

一般に、ある分布に従う確率変数の和は、もととは異なる確率変数となるが、適当な1次変換によって、もとと同じ分布になるのが安定分布である。ある安定分布に従う確率的な変量が沢山あるとき、それらを幾つかのグループに分けた時、各グループ内での平均量の分布は、グループ内の変数の数によらずに同一で、1つの変量の分布と一致する。これは、ある種の自己相似性であると言えよう。このような性質を持つ分布として一番よく知られているのは、ガウス分布である。しかし、安定分布はガウス分布だけではない。むしろ以下で見るように、ガウス分布とは安定分布の非常に特殊な場合なのである。

高安秀樹

条件式 ( 5.2.1 ) は、分布の特性関数、

$$\phi(z) = \langle e^{ixz} \rangle \quad (5.2.2)$$

を用いると、次のように書き換えることができる。

$$\phi^n(z) = \phi(c_n \cdot z) \cdot e^{ir_n z} \quad (5.2.3)$$

この方程式を満足するような  $\phi(z)$  は、4つのパラメーター  $\alpha, \beta, r, \delta$  によって、

$$\phi(z) = e^{i\delta z - r|z|^\alpha \cdot [1 + i\beta(z/|z|)\omega(z, \alpha)]}$$

$$\omega(z, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi \alpha}{2} & ; \alpha \neq 1 \text{ のとき} \\ \frac{2}{\pi} \log |z| & ; \alpha = 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

と表すことができる。ただし、

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad r > 0.$$

パラメーター  $\alpha$  は特性指数と呼ばれており、安定分布を特徴づける最も大切な量である。

$\alpha = 2$  の場合がガウス分布に対応する。また  $\alpha > 2$  のときには、確率が非負という条件を満足しなくなってしまう。これらの4つのパラメーターのうち、 $\delta$  は分布全体を平行移動するパラメーターであり、 $r$  は  $X$  の縮尺を変えるパラメーターなので、あまり重要ではない。このような線形変換の自由度を除外すれば、安定分布の特性関数は  $\alpha = 1$  の場合を除いて、次のような簡単な型で表現できる。

$$\phi(z) = e^{-|z|^\alpha \cdot e^{\pm(i\pi/2)\theta}} \quad (5.2.5)$$

ここで、紙数の  $\pm$  は、 $z$  の符号と一致させるものとし、また、 $\theta$  の変域は、

$$|\theta| \leq \begin{cases} \alpha & ; 0 < \alpha < 1 \text{ のとき} \\ 2 - \alpha & ; 1 < \alpha < 2 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.2.6)$$

である。対応する確率密度関数を  $p(X; \alpha, \theta)$  とすれば、これは ( 5.2.5 ) 式のフーリエ変換であるから、

$$p(X; \alpha, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty dz e^{-ixz - z^\alpha \cdot e^{(i\pi/2)\theta}} \quad (5.2.7)$$

と与えられることになる。この型より明らかなように,

$$p(X; \alpha, \theta) = p(-X; \alpha, -\theta) \quad (5.2.8)$$

が成立している。従って,  $\theta = 0$  の場合には,

$$p(X; \alpha, 0) = p(-X; \alpha, 0) \quad (5.2.9)$$

となり, 分布は対称である。(5.2.5)式の指数関数をベキ級数展開し, 項別に(5.2.7)式の積分を実行することにより, 次のような展開公式が得られる。 $X > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  に対しては,

$$p(X; \alpha, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n\alpha + 1)}{n! X^{n\alpha+1}} \sin \frac{n\pi}{2} (\theta - \alpha) \quad (5.2.10)$$

$X > 0$ ,  $1 < \alpha < 2$  に対しては,

$$p(X; \alpha, \theta) = \frac{1}{\pi X} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X)^n \Gamma(n\alpha^{-1} + 1)}{n!} \sin \frac{n\pi}{2\alpha} (\theta - \alpha) \quad (5.2.11)$$

$X < 0$  の場合は, (5.2.8)式によって与えられる。

もしも  $0 < \alpha < 1$  で, かつ  $\theta = -\alpha$  のときには  $X < 0$  に対して,

$$p(X; \alpha, -\alpha) = 0 \quad (5.2.12)$$

となることが, (5.2.10)及び(5.2.8)式よりわかる。この場合には, 確率変数  $X$  が正の値だけをとるような片側分布となる。

このように, 安定分布は一般に積分型(5.2.7)または, ベキ級数展開の型(5.2.10)と(5.2.11)によって表すことができるが, 解析的な表現のできる場合はほんの少ししかない。 $\alpha = 2$ ,  $\theta = 0$  の場合には, ガウス分布になる。

$$p(X; 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \quad (5.2.13)$$

$\alpha = 1$  で  $\theta = 0$  の場合は, ローレンツ分布になる。

(注. (5.2.5)式は  $\alpha = 1$  を除外しているが(5.2.7)式は  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0$  に対しては有効である。)

$$p(X; 1, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+X^2} \quad (5.2.14)$$

$\alpha = \frac{1}{2}$  で  $\theta = -\frac{1}{2}$  の場合は、次のような片側分布になる。

$$p(X; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2x} \cdot x^{-3/2} & ; x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.2.15)$$

また、 $\alpha \neq 0$  のときには、小さすぎずまた大きすぎない  $X$  に対し、 $X$  の分布は対数正規分布で近似できることが知られている。<sup>74)</sup>

$$p(X; \alpha, \theta) \propto \frac{e^{-(1/2)\alpha^2(\log X)^2}}{X} ; \alpha \neq 0 \text{ のとき} \quad (5.2.16)$$

図 5.2.1 は  $\alpha$  と  $\theta$  の組み合わせを図示したものである。

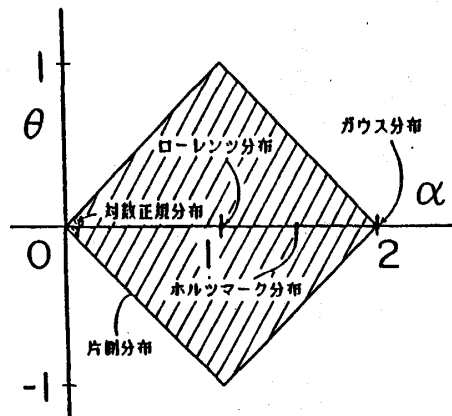


図 5.2.1. 安定分布となる  $\alpha$  と  $\theta$  の領域。

安定分布の一般解 (5.2.4) または (5.2.7) よりわかることであるが、 $\alpha \neq 2$  の場合には  $|X|$  が大きいところで分布はべきの型になり、特性指数が  $\alpha$  であるような安定分布が、 $X$  よりも大きな値をとる確率  $P_\alpha(X)$  は、次のように表わされる。

$$P_\alpha(X) \propto X^{-\alpha} ; \alpha \neq 2 \text{ のとき} \quad (5.2.17)$$

これは、§ 1.3 で述べたフラクタル分布の式 (1.3.20) と全く同じ型をしており、 $\alpha$  がフラクタル次元に対応している。

$|X|$  が大きいところで分布が (5.2.17) のようなべきの型になっていると、分布の  $q$  次モ

ーメント  $\langle |X|^q \rangle$  は、 $q$  が  $\alpha$  よりも大きい場合には無限大となる。 $\alpha$  は高々 2 であるから特に 2 次のモーメントである分散は、このような場合には発散している。

$$\langle X^2 \rangle = \infty \quad (5.2.18)$$

安全分布のうちで分散が有限なものは、ガウス分布だけである。安定分布という概念が、非常に重要なものであるにもかかわらず、今まであまり注目されなかった原因のひとつは、この分散にあると思われる。分散が無限大となることを非物理的であるとして、除外する傾向があるからである。

しかし、分散が無限大であることを非物理的であると決めつける態度は正しくない。仮りに母集団の分散が無限大であったとしても、サンプルの数が有限であれば、サンプル内での分散は有限である。母集団の分散が有限の場合と異なるのは、サンプル数を増せば増すほど、分散が大きくなり、発散する傾向を示すことである。このように、サンプル数を増すにつれて分散が発散する傾向を示す実験事実もある。それは、いわゆる  $1/f$  雑音である。半導体に直流を流した時に観測される電圧の変動の分散は、観測時間を長くすればする程増大することが確認されている。<sup>75)</sup>  $1/f$  雑音は、半導体に限らず、多くの物質について見つかったが、それらの変動の分散は発散しているとみなす方が自然である。

沢山の確率的変動を加え合わせた量が、ガウス分布になることは、中央極限定理という名でよく知られている。この定理のおかげで、ガウス分布は自然科学の各分野で特別扱いを受け、もてはやされることが多い。しかし、この定理はいつでも成立するわけではない。例えば、特性指数が 2 でないような安定分布は幾つ加え合わせたところで、その定義よりもとの安定分布と相似であり、ガウス分布に近づくことはない。中央極限定理が成立する条件を明らかにし、さらにそれを一般化したのが、次に示す拡張された中央極限定理である。

確率変数  $X_1, \dots, X_n$  を加え合わせた量  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  の分布が、適当に規格化することによって、 $n \rightarrow \infty$  のときある分布  $R$  に収束するならば、その分布  $R$  は安定分布である。特に分散が有限の場合には、 $R$  は特性指数が 2 の安定分布（ガウス分布）である。

この定理によれば、分散が発散しているような確率的変動を加え合わせた量は、ガウス分布ではない安定分布に漸近することがわかる。従って、ガウス分布以外の安定分布は、分散が発散しているような確率的現象に対して、最も基本的な分布であると言えるだろう。

変位の分布が独立な安定分布であるような確率過程を安定過程と呼ぶ。例えば、§ 1.4 で紹

高安秀樹

介したレビのダストをつくるときのランダムウォークは近似的に安定過程である。近似的と言ったのは、変位の分布が(1. 3. 20)のようなベキの分布なので、上の定理より、変位を沢山加え合わせたものが、漸近的に安定分布になるからである。このようなランダムウォークを記述する確率方程式は、通常の拡散方程式にはならない。粒子の存在確率を  $p(x, t)$  としたとき、変位が特性指数  $D$  の安定分布に従うならば、

$$\hat{p}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p(x, t) dx \propto e^{-ct|k|^D} \quad (5.2.19)$$

が成立する。従って  $\hat{p}$  は次の微分方程式を満たす。<sup>76)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{p}(k, t) = -c|k|^D \hat{p}(k, t) \quad (5.2.20)$$

$D=2$  の場合には、この式をフーリエ変換すれば、拡散方程式が得られるが、 $D \neq 2$  のときは、この式は通常の偏微分方程式では表現できない。それは、§ 5.4 を見ればわかるように、 $|k|^D$  が非整数回の微分演算に対応しているからである。

### § 5.3 次元解析

ある物理系が与えられたとき、そこに現われる物理量の単位を物理的直観に基づいて解析するだけで、詳細な解析なしに重要な情報が得られることがよくある。ここで単位を解析するのは、長さ、時間、質量などの最も基本的な物理量で他の物理量を表わすことである。例えば、速度は長さを時間で割った量であるから、

$$\text{速度} = \text{長さ} / \text{時間} \quad (5.3.1)$$

と書ける。長さ、時間、質量をそれぞれ  $L, T, M$  とあらわすことにし、(5.3.1) 式を次のように書くことにする。(速度を  $v$  とする)

$$[v] = L/T \quad (5.3.1)'$$

このように、物理量の単位を  $L, T, M$  などに分解することを次元解析と呼ぶ。次元解析の最も良い例は、§ 4.1 で触れた乱流におけるコルモゴロフの  $5/3$  乗則である。<sup>77)</sup> 以下では、それを説明することにしよう。

3次元空間中の乱流を考える。境界条件や外力等で与えられた大きな渦は、時間とともに分裂して小さな渦となり、またその小さな渦が分裂してより小さな渦になる。このような分裂のプロセスを繰り返す、渦が非常に小さくなると、粘性が効くようになり、摩擦によって回転の

運動エネルギーが不可逆に熱エネルギーに変換される。この描像は、流体の方程式から厳密に導いたものではなく、経験的ではあるが、一般によく受け入れられており、エネルギーカスケードと呼ばれている。カスケードとは、連鎖的崩壊というような意味である。エネルギーの立場から見れば、この描像を大きなスケールの運動のエネルギーが、次々と小さなスケールの運動のエネルギーに分割されていくと解釈することができるからである。運動エネルギーを運動の大きさのスケールに分解して考えることは、エネルギースペクトル  $E(k)$  を考えることとはほぼ等しい。それは、 $E(k)dk$  が、波数の大きさが  $(k, k+dk)$  の間にあるモードの持つ運動エネルギーの平均値を表すからである。従って、 $E(k)$  の  $k$  依存性を知ることが、乱流を理解するための第一歩であると言える。

レイノルズ数の非常に大きな乱流は、前にも述べたように特徴的なスケールがなくなっていると期待される。即ち、系全体の大きさよりはずっと小さく、粘性が効く長さよりはずっと大きいような中間の大きさを慣性領域と呼ぶが、そこでのエネルギースペクトルは、境界条件にも粘性にも無関係であると思われる。唯一、エネルギースペクトルと関係しそうな量は、単位時間当りのエネルギー散逸量  $\varepsilon$  である。常に外部から大きなスケールの運動エネルギーが注入され、定常状態が保たれている状況を考えると、その注入されたエネルギーは、エネルギーカスケードによって小さなスケールの運動エネルギーになり、最終的には粘性によって散逸される。 $\varepsilon$  は、その散逸されるエネルギーの量であるが、エネルギーはカスケードの途中では保存されているので、この量は単位時間当りに注入されるエネルギー量とも、また慣性領域を通りぬけているエネルギー流とも等しい。

$E(k)$  が  $\varepsilon$  だけで決まるという仮定をすれば、次のような次元解析によって  $E(k)$  の  $k$  依存性が求められる。 $E(k)$  は単位質量当りの運動エネルギーのスペクトルであり、

$$\frac{1}{2} v^2 = \int_0^\infty E(k) dk \quad (5.3.2)$$

を満足しているので、 $[k] = 1/L$  より、

$$[E(k)] = (L/T)^2 \cdot L = L^3/T^2 \quad (5.3.3)$$

が成り立ち、また  $\varepsilon$  は単位時間、単位質量あたりのエネルギー散逸量なので、

$$[\varepsilon] = \left[ \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} \right] = (L/T)^2 \cdot 1/T = L^2/T^3 \quad (5.3.4)$$

となる。そこで、

高安秀樹

$$E(k) \propto k^a \cdot \varepsilon^b \quad (5.3.5)$$

とおいてみると、両辺の単位は、

$$L^3/T^2 = L^{-a} \cdot (L^2/T^3)^b = L^{-a+2b}/T^{3b} \quad (5.3.6)$$

となっており、

$$3 = -a + 2b, \quad 2 = 3b \quad (5.3.7)$$

を満たさなければならない。これより、 $b = 2/3$ 、 $a = -5/3$  となるので、

$$E(k) \propto k^{-5/3} \cdot \varepsilon^{2/3} \quad (5.3.8)$$

が得られる。これが有名なコロモゴロフの $-5/3$ 乗則である。

今の論議では $\varepsilon$ が空間的に一様、つまりフラクタル的でないことを暗に仮定していた。エネルギー散逸領域が $D$ 次元のフラクタルである場合には、次のように $\varepsilon$ に $k$ 依存性が生じてくる。まず、考えている流体を一辺の長さが $1/k$ 程度の立方体に仮想的に分割する。それらの立方体のうち、エネルギー散逸領域を含むものの個数 $N(1/k)$ は、

$$N(1/k) \propto (1/k)^{-D} = k^D \quad (5.3.9)$$

と表せる。立方体の総数は $k^3$ に比例するから、ひとつの立方体がエネルギー散逸領域に属する確率 $p(1/k)$ は、

$$p(1/k) = k^{D-3} \quad (k > 1) \quad (5.3.10)$$

となる。従って、散逸領域以外では、 $\varepsilon = 0$ であると仮定すれば、散逸領域に属する立方体における $\varepsilon$ の値 $\varepsilon^*$ は、 $\varepsilon$ の全空間での平均を $\langle \varepsilon \rangle$ としたとき、

$$\varepsilon^* = \langle \varepsilon \rangle \cdot p(1/k)^{-1} \quad (5.3.11)$$

と与えられる。(5.3.11)式を用いれば、

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^{2/3} \rangle &= (\varepsilon^*)^{2/3} \cdot p(1/k) \\ &= \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \cdot k^{(D-3)/3} \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

となり、(4.1.3)式に対応する式

$$E(k) \propto k^{-5/3} \cdot \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \cdot k^{D-3/3}$$

$$= \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \cdot k^{-5/3-(3-D)/3} \quad (5.3.13)$$

が導かれる。

次元解析によって得られた (5.3.8) 式は、実際に実験的に検証することができる。図 5.3.1 は、実験室で作り出された乱流のエネルギースペクトル  $E(k)$  と  $k$  の関係を log-log プロットしたものであるが、<sup>78)</sup> 慣性領域に見られる直線的な部分はほぼ  $k^{-5/3}$  になっており、次元解析の結果が正しいことを裏づけている。しかし、残念ながら、 $-5/3$  乗則からの補正 ((5.3.13) 式) を確かめる程、実験の精度は高くないようである。

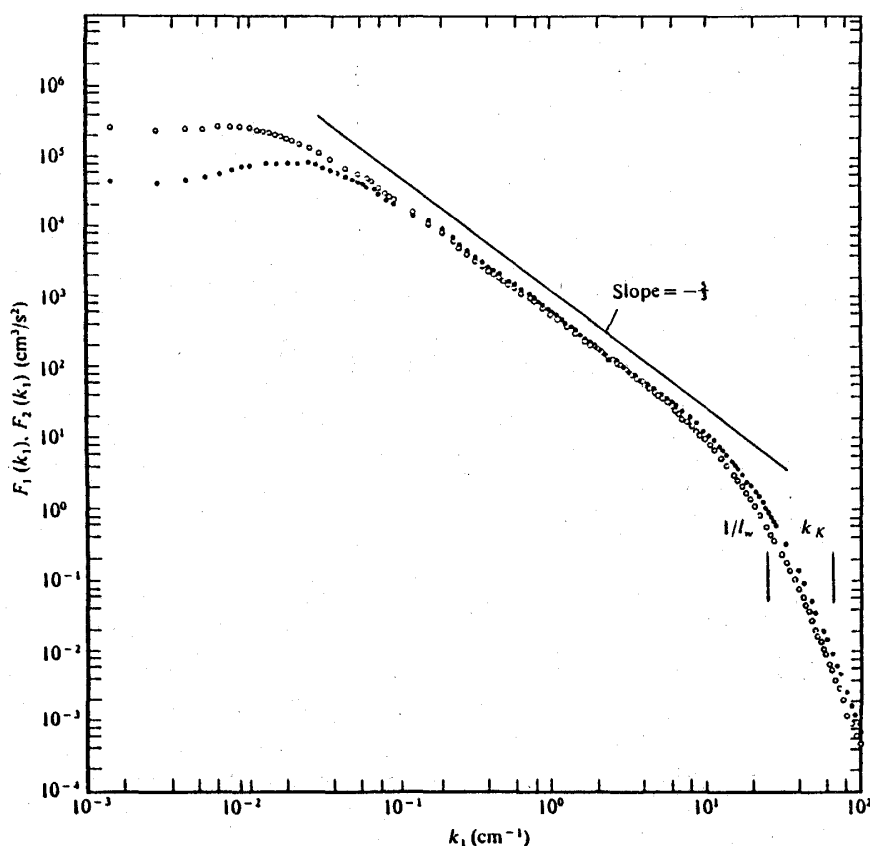


図 5.3.1. 実験による乱流のエネルギースペクトル<sup>78)</sup>。

#### § 5.4 非整数回の微積分

微分や積分の階回は、次元と同様に非整数にまで拡張しうることが知られている。1.24 階の微分や 0.3 階の積分といった量を考えることができるのである。こうした考え方は、容易に

推測されるように、フラクタルとは密接な関係を持っている。

正弦波  $e^{ikx}$  に対しては、微分演算  $d/dx$  を  $n$  回施すことは、 $(ik)^n$  をかけることに等価である。

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ikx} = (ik)^n e^{ikx} \quad (5.4.1)$$

$n$  が 0 を含めた自然数のとき、この等式は明らかである。 $n$  が負の自然数のときには、 $n$  回微分を  $|n|$  回積分とみなすことにより (5.4.1) 式が成立する。ただし、そのとき積分定数に関する項は無視するものとする。 $n$  が非整数のときには (5.4.1) 式を非整数回の微分の定義と考えることができる。このように、単一の正弦波に関しては、非整数回の微積分を考えることは容易である。

一般の関数についても、この微分の定義を拡張できる。関数  $f(x)$  の  $n$  回微分を次のようなフーリエ変換によって定義すればよい。

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ik)^n \hat{f}(k) \cdot e^{-ikx} dk \quad (5.4.2)$$

$n=0$  の場合が、普通のフーリエ変換で、それによって  $\hat{f}(k)$  が決められる。この式も  $n$  が整数の場合には通常の意味と一致する。

一般にある関数を積分すると、関数の滑らかさが増し、微分をすると滑らかさが減少することが知られている。このことは、非整数に拡張された微積分についても言える。関数  $f(x)$  のスペクトル  $S(k)$  が、次のように  $k$  のべきになっている場合を考えてみる。

$$S(k) \equiv |\hat{f}(k)|^2 \propto k^{-\alpha} \quad (5.4.3)$$

$f$  を  $n$  回微分した関数のスペクトルを  $S^{(n)}(k)$  とすれば、(5.4.2) 式より、

$$S^{(n)}(k) \propto k^{-\alpha+2n} \quad (5.4.4)$$

となる。 $1 < \alpha < 3$  のとき関数のグラフのフラクタル次元を  $D$  とすると、

$$\alpha = 5 - 2D \quad (5.4.5)$$

という関係が成立することを (1.3.23) 式で触れた。(5.4.3) ~ (5.4.5) 式によれば、 $f(x)$  を  $n$  回微分した関数

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

のグラフのフラクタル次元  $D^{(n)}$  は,

$$D^{(n)} = D + n \quad (5.4.6)$$

となる。ただし、この関係式は  $D$  及び  $D^{(n)}$  が 1 と 2 の間になるような非整数の  $n$  について有効である。 $n > 0$  のとき、 $D^{(n)} > D$  となることより、微分をするとグラフのフラクタル次元は大きくなり、グラフはもとよりも複雑になることがわかる。また逆に、 $n < 0$  のときは、 $D^{(n)} < D$  となるが、これは積分によってグラフが平滑化されることを示している。これらのことより、非整数回の微積分を演算することによって曲線のフラクタル次元を連続的に変化させることができることがわかるであろう。

定義式 (5.4.2) は、直観的にはわかりやすいが、数学的には収束性の問題などがあり、あまりよい定義とは言えない。数学的に厳密な非整数回の微積分は、次のように定義する。<sup>79)</sup>

$\varphi(x)$  を任意の有限区間で積分可能で、 $x \rightarrow -\infty$  のとき十分速く 0 になるならば、任意の正の数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} I^n \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^x \varphi(y) (x-y)^{n-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \varphi(x-y) y^{n-1} dy \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

を  $\varphi$  の  $n$  階の積分という。また  $\varphi$  が  $N$  回連続微分可能ならば、 $-N < n < 0$  に対して  $I^n$  を、

$$I^n \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \text{Pf} \int_0^{\infty} \varphi(x-y) y^{n-1} dy \quad (5.4.8)$$

によって定義する。ただし、Pf は発散積分の有限部分をとることを示す。

このように定義した  $I^n$  には、次のような性質がある。

$$I^\lambda (I^\mu \varphi) = I^{\lambda+\mu}, \quad I^0 \varphi = \varphi \quad (5.4.9)$$

$$I^{-r} \varphi(x) = \frac{d^r}{dx^r} \varphi(x), \quad [r = 0, 1, 2, \dots, N] \quad (5.4.10)$$

また、例えば次のようなことが成立する。

$$I^\lambda (x^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x^{\lambda+\mu}, \quad x \geq 0 \quad (5.4.11)$$

$$I^\lambda(e^{ax}) = \frac{1}{a^\lambda} e^{ax}, \quad a > 0 \quad (5.4.12)$$

これらより、 $n > 0$  のとき  $I^n$  は積分を、 $n < 0$  のときには微分を、一般化したものであることが確認されるだろう。この定義を用いても、(5.4.3) ~ (5.4.6) 式は成立することが知られている。

全く無相関な変動は、白色雑音と呼ばれているが、それを1回積分したものが通常のブラウン運動  $B(x)$  である。白色雑音のスペクトルは、すべての振動数を平等に含んでおり、 $k^0$  (定数) に比例している。従って、 $B(x)$  のスペクトルは  $k^{-2}$  に比例していることがわかる。(5.4.5) 式によれば、このことから  $B(x)$  のグラフのフラクタル次元は1.5になる。ブラウン運動の軌跡は2次元的事であることを § 2.4 で述べたが、軌跡がどの座標軸に対しても自由に動けるのに対し、グラフは、1つの座標軸についてだけしか自由に変動できないので、フラクタル次元が小さくなるのである。このブラウン運動  $B(x)$  を非整数回微積分することにより、グラフのフラクタル次元が  $D$  ( $1 < D < 2$ ) であるような確率過程をつくることができる。通常、そのようなランダムな運動は、新しいパラメーター  $H$  ( $0 < H < 1$ ) を導入し、 $B_H(x)$  と表される。<sup>88)</sup>

$$\begin{aligned} B_H(x) &\equiv I^{H-(1/2)}(B(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^x (x-y)^{H-(1/2)} dB(x) \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

この積分は一般には発散するが、差  $B_H(x+X) - B_H(x)$  は有限であり、意味がある。 $H = 1/2$  がもとのブラウン運動を表し、 $H > 1/2$  の場合には、 $B_H(x)$  はブラウン運動よりも滑らかな確率過程となる。 $H$  は、フラクタル次元  $D$  と次の関係で結ばれている。

$$D = 2 - H \quad (5.4.14)$$

また、 $B_H(x)$  は次のような自己相似性を持っていることが知られている。

$$B_H(x+X) - B_H(x) \stackrel{d}{=} h^{-H} \{B_H(x+hX) - B_H(x)\} \quad (5.4.15)$$

つまり、大きなスケールの変動は、適当に規格化することによって、小さなスケールの変動と同じ分布に従うようにできるわけである。マンデルブロの本<sup>1)</sup>には、コンピューターの描いたランダムな地形の図が沢山載っているが、それらはどれも  $B_H(x)$  のグラフに他ならない。

$x$  を 2 次元空間の座標とし，地面の高さを  $B_H(x)$  とすれば， $H$  を適当に調整することにより， $B_H(x)$  のグラフが自然な地形を思わせる形になるのである。

## 第6章 フラクタルの拡張

フラクタルに基づく解析において、最も大切なのは、粗視化の度合  $r$  と観測されるものの個数  $N(r)$  の関係、

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (6.1)$$

である。今までは、この式によって決まる  $D$  が定数である場合だけを考えてきた。それは、 $D$  が定数であることがフラクタルである為の条件であったことから当然である。しかし、現実的には  $D$  が定数である範囲は限られている。 $D$  が定数からずれる領域も、同じような解析ができるようにフラクタル次元の定義を拡張することはできないだろうか？

$N(r)$  が  $r$  のべきでないときにも、フラクタル次元に相当する量を考える為のひとつの方法は、(6.1) 式を次のように書き換えることである。

$$D(r) \equiv -\frac{d \log N(r)}{d \log r} \quad (6.2)$$

こうして定義される  $D(r)$  は、観測スケール  $r$  の関数となっている。観測スケールに依存するフラクタル次元は、フラクタルの創始者であるマンデルブロ自身彼の本の中で述べているが、その他にも何人かによって議論されている。<sup>81, 53)</sup> 平均自由行程が有限であるようなランダムウォークの軌跡についてこの量を考えてみよう。

通常のブラウン運動の軌跡のフラクタル次元が2であることは、§2.4で述べた。ブラウン運動の平均自由行程は0なので、あらゆるスケールで自己相似性が成り立っている。それに対し、平均自由行程  $l$  が有限であるようなランダムウォークの場合には、 $l$  よりもずっと大きなスケールで観測すれば、軌跡は2次元的に見えるだろうが、 $l$  よりも小さなスケールでは、粒子は直線的に運動するので、その軌跡は1次元的に観測されるはずである。1次元空間上のあるマルコフ的なランダムウォークに関して高安は、次の厳密解を求めている。<sup>82)</sup>

$$D(r) = 2 - \frac{1}{1 + r/l^*} \quad (6.3)$$

ここで  $l^*$  は、平均自由行程に比例するようなパラメーターである。 $D(r)$  のグラフ (図6.1) から明らかなように  $D(0) = 1$ ,  $D(\infty) = 2$  となっており、先の直観的な予想が正しいことがわかる。

(6.3) 式は、1次元空間中のランダムウォークに対する表式であるが、3次元空間中のラ

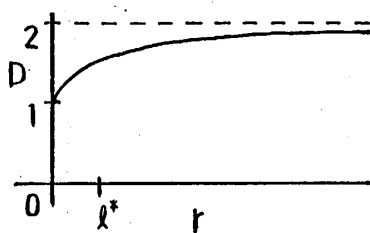


図 6.1. 平均自由行程が有限なランダムウォークのフラクタル次元.

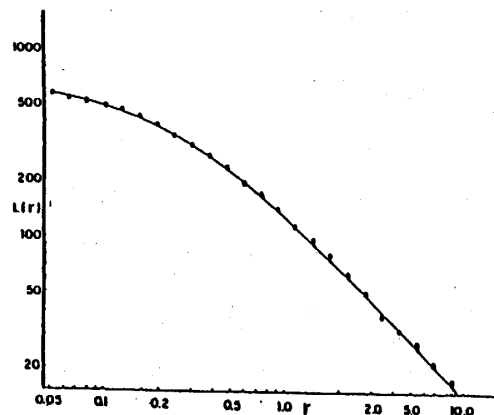


図 6.2. シミュレーションによる分子のランダムウォークのフラクタル次元(・)と理論値(—)<sup>81)</sup>。

ランダムウォークに対しても非常によい結果を与えることが最近確められた。<sup>83)</sup> Rapaport は、剛体球の集合によるガスのシミュレーションを行い、1 個 1 個の球の軌跡をフラクタルの立場から解析した。<sup>84)</sup> 彼の求めた量は  $D(r)$  ではなく、長さ  $r$  の折れ線で近似したときの軌跡の長さ  $L(r)$  である。沢山の軌跡について平均をとった  $L(r)$  は、図 6.2 に示してある。 $r$  が大きいところでは、 $L(r) \propto r^{-1}$  となっており、フラクタル次元が 2 になっていることがわかる。また、 $r$  が小さい程  $L(r)$  の傾きの絶対値は小さくなっており、フラクタル次元は確かに 1 に近づいている。理論式 (6.3) を仮定すると、 $L(r)$  は次のように与えられる。

$$L(r) \propto \frac{1}{1 + r/l^*} \quad (6.4)$$

図 6.2 の実線は、適当な  $l^*$  に対する (6.4) 式のグラフを描いたものであるが、シミュレーションによる値と極めてよく一致していることがわかる。

このように、観測スケールに依存するようなフラクタル次元に対しても、通常のフラクタル次元と同じように解析を実行することができることがわかった。これまでは、フラクタルとフラクタルでないものを、特徴的なスケールがないかあるかで決めてきたが、観測スケールに依存するフラクタルは、これらの垣根を取り払うものである。このフラクタル次元が一定であるようなものが、今までの意味でのフラクタルである。一定でないものについては、その値の変わるスケールが、その非フラクタルの特徴的なスケールを与えることになる。例えば、先のランダムウォークでは、 $l^*$  が特徴的な長さである。

観測の粗視化の度合を変えることによって得られる情報を有効に使って解析しようとするのが、この拡張されたフラクタルの立場である。このような観点に立つ研究は、まだ始まったばかりであるが、今後いろいろな分野に広く適用されていくことが期待される。

参 考 文 献

- 1) B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Free man, San Francisco, 1982).  
広中平祐監訳, フラクタル幾何学 (日経サイエンス社, 1984).
- 2) 平田森三, キリンのまだら, 自然界の統計現象 (中央公論社, 1975).
- 3) J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke, *Physica* **7D** (1983), 153.
- 4) 武者利光, ゆらぎの世界, (講談社, 1980).
- 5) H. Takayasu, *Japan Jour. of Applied Math.* **1** (1984), 201.
- 6) Y. Gefen, A. Aharony, B. B. Mandelbrot and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981), 1771.
- 7) 高山茂美, 河川地形 (共立出版, 1974).
- 8) 杉山寿伸, 名古屋大学フラクタル研究会内報.
- 9) 国上真章, 名古屋大学フラクタル研究会内報.
- 10) D. R. Morse et al., *Nature* **314** (1985), 731.
- 11) 水谷仁, クレータの科学 (東京大学出版会, 1980).
- 12) A. Fujiwara, G. Kamimoto and A. Tsukamoto, *Icarus* **31** (1977), 277.
- 13) 竹内均, 水谷仁, *科学* **38** (1964), 622.
- 14) M. F. Shlesinger and E. W. Montroll, *Lecture Note in Math.* **1035** (Springer Verlag, Berlin, 1983), 130.
- 15) D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer, *Nature* **308** (1984), 261.
- 16) S. R. Forrest and T. A. Witten Jr., *J. Phys.* **A12** (1979), L109.
- 17) 松下貢, 早川美德, 沢田康次, *固体物理* **19** (1984), 789.
- 18) J. P. Allen, J. T. Colvin, D. G. Stinson, C. P. Flynn and H. J. Stapleton, *Biophys. J.* **38** (1982), 299.
- 19) S.-k. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin Cummings, London, 1976).
- 20) R. F. Voss, R. B. Laibowitz and E. I. Alessandrini, *Lecture Note in Math.* **1035** (Springer Verlag, Berlin, 1983), 153.
- 21) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **69** (1983), 65.
- 22) 今井功, 流体力学 (裳華房, 1973).
- 23) A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence 2* (MIT Press, 1975); R. A. Antonia et al., *Phys. Fluids* **241** (1981), 554.
- 24) S. Lovejoy, *Science* **216** (1982), 185.
- 25) 小舞知子, 名古屋大学フラクタル研究会内報.
- 26) ジャン・ペラン, 原子 (玉虫文一訳, 岩波文庫, 1978).
- 27) E. Nelson, *Phys. Rev.* **150** (1966), 1079.

- 28) L. F. Abbot and M. B. Wise, American J. of Physics **49** (1981), 37.
- 29) 電気学会編, ジョセフソン効果 (基礎と応用) (コロナ社, 1978).
- 30) V. N. Belykh, N. F. Pedersen and O. H. Soerensen, Phys. Rev. **B16** (1977), 4860.
- 31) E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, J. Stat. Physics **32** (1983), 209.
- 32) T. A. Witten Jr. and L. M. Sander, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 1400.
- 33) P. Meakin, Phys. Rev. **A27** (1983), 1495.
- 34) H. Gould, F. Family and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 686.
- 35) K. Kawasaki and M. Tokuyama, *Chaos and Statistical Methods* (Springer Verlag, 1983), 56.
- 36) E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130.
- 37) J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer Verlag, 1983).
- 38) O. E. Rossler, Phys. Lett. **57A** (1976), 397.
- 39) 蔵本由紀, 特定研究 乱流現象の解明と制御 理論系 4 班合同研究会報告集 (1982), 37.
- 40) D. A. Russell, J. D. Hanson and E. Ott, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 1175; P. Grassberger and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 346.
- 41) 森 肇, 統計力学の進歩 第 4 章 (裳華房, 1981).
- 42) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1044.
- 43) 山口昌哉, 非線型の現象と解析 (日本評論社, 1979).
- 44) M. J. Faigenbaum, Phys. Lett. **74A** (1979), 375; J. Stat. Phys. **19** (1978), 25.
- 45) J. P. Gollub and S. V. Benson, Phys. Rev. Lett. **41** (1978), 948; J. Fluid Mech. **100** (1980), 449.
- 46) T. Y. Li and J. A. York, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985.
- 47) J. E. Hutchinson, Indiana University Mathematics Journal, **30** (1981), 713.
- 48) M. Hata, to appear in Japan Jour. of Applied Math.
- 49) H. P. Peters, D. Stauffer, H. P. Holters and K. Loewenich, Z. Physik **B34** (1979), 399.
- 50) 日本物理学会編, ランダム系の物理学 (培風館, 1981).
- 51) L. Reatto and E. Rastelli, J. Phys. **C5** (1972), 2785.
- 52) Newton, 8 月号 (教育社, 1984).
- 53) Y. Sawada, S. Ohta, M. Yamazaki and H. Honjo, Phys. Rev. **A26** (1982), 3557.
- 54) P. Tautu, Z. Krebsforsch. **91** (1978), 223.
- 55) L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1033.
- 56) H. Takayasu, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 1099.
- 57) L. B. Leopold and W. B. Langbeim, U. S. Geol. Surv. Profess. Pap. **500-A** (1962), 1.

- 58) S. Wolfram, *Physica* **10D** (1984), preface.
- 59) E. A. Novikov and R. W. Stewart, *Isv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Geophys.* **3** (1964), 408.
- 60) H. Takayasu, *Prog. Theor. Phys.* **72** (1984), 471.
- 61) H. Takayasu, preprint DPNU-84-33.
- 62) C. W. van Atta and W. Y. Chen, *J. Fluid Mech.* **34** (1968), 497.
- 63) D. Schertzer and S. Lovejoy, preprints of IUTAM symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Kyoto (1983), 141.
- 64) B. J. Alder and T. E. Weinwright, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967), 988.
- 65) M. H. Ernst and A. Weyland, *Phys. Lett.* **34A** (1971), 39; H. van Beijeren, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982), 195.
- 66) H. Takayasu and K. Hiramatsu, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 633.
- 67) P. Grassberger, *Physica (Utrecht)* **103A** (1978), 558.
- 68) J. Hubbard, *Phys. Rev.* **B17** (1978), 494.
- 69) P. Bak and R. Bruinsma, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), 249.
- 70) K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* **12** (1974), 75.
- 71) D. Stauffer, *Phys. Rep.* **54** (1979), 1.
- 72) P. J. Reynolds, H. E. Stanley and W. Klein, *Phys. Rev.* **B21** (1980), 1223.
- 73) W. フェラー, 確率論とその応用 I, II (紀伊国屋書店)
- 74) E. W. Montroll and T. Bendler, *J. Stat. Phys.* **34** (1984), 129.
- 75) M. A. Caloyannides, *J. Appl. Phys.* **45** (1974), 307; F. N. Hooze, *Physica* **83B** (1976), 14.
- 76) B. D. Hughes, E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, *J. Stat. Phys.* **28** (1982), 111.
- 77) A. N. Kolmogorov, *C. R. Acad. Sci. USSR* **30** (1941), 301.
- 78) F. H. Champague, *J. Fluid Mech.* **86** (1978), 67.
- 79) 森口繁一 他, 数学公式 I (岩波全書, 1956) p 52.
- 80) B. B. Mandelbrot and J. W. van Ness, *SIAM Review* **10** (1968), 422.
- 81) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Lett.* **71** (1984), 1397.
- 82) H. Takayasu, *J. Phys. Soc. Japan* **51** (1982), 3057.
- 83) H. Takayasu and S. Tsurumi, preprint.
- 84) D. C. Rapaport, *Phys. Rev. Lett. comment* **53** (1984), 1965.

本文で引用はしなかったが, 以下の文献もフラクタルの研究に役立つと思われる。

- 85) K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets* (Cambridge University Press, 1985).
- 86) *J. Stat. Phys.* Vol. **36** (1984).
- 37) Edited by F. Family and D. P. Landan, *Kinetics of Aggregation and Gelation* (North-Holland,

- 1984).
- 88) 広中平祐, 広中平祐の数学教室 (サンケイ出版, 1981).
  - 89) 本田成親, MICRO (新紀元社, 1984), 4月号, p 36.
  - 90) 高木隆司, かたちの不思議 (講談社, 1984).
  - 91) 石井威望他編, ミクロコスモスへの挑戦 (中山書店, 1984) ヒューマンサイエンス 1.