

ホフマングラフとグラフの階層構造

広島工業大学・電子情報工学科 谷口 哲至

Tetsuji Taniguchi

Department of Electronics and Computer Engineering,
Hiroshima Institute of Technology

1 はじめに

グラフ G を連結な有限無向グラフとし、その最小固有値を $\lambda_{\min}(G)$ で表す。辺の表記については $\{u, v\}$ とするが、混乱が無ければ uv とする。また、特に混乱が無ければ $\lambda_{\min}(G)$ を $\lambda_{\min}$ で表す。さらに、 Γ の頂点集合 $V(\Gamma)$ と G の辺集合 $E(G)$ の間に全単射 ϕ が存在し、 G において辺 e, f が端点を共有し、かつ、そのときに限り Γ の 2 頂点 $\phi(e), \phi(f)$ が隣接するとき、 Γ を G のライングラフと呼び $L(G)$ で表す。さらに、A. J. Hoffman 氏はライングラフの最小固有値による一般化として、一般ライングラフを与えている。このグラフ $L(G; a_1, \dots, a_m)$ は、ライングラフ $L(G)$ に $m(=|E(G)|)$ 個の互いに非連結なカクテルパーティグラフ $CP(a_i)$ ($i = 1, \dots, m \in V(G)$) を次のようにして付け加えることで得られるグラフである：

- G の頂点 i を含む $L(G)$ の総ての頂点と、 $CP(a_i)$ の総ての頂点を互いに繋ぐ。

別の言い方をすると、一般ライングラフ $L(G; a_1, \dots, a_m)$ とはグラフ G の各頂点 i に a_i 個のペンダント二重辺を付け加えて得られるグラフ $\tilde{G}$ のライングラフ $L(\tilde{G})$ でもある。

この時、 G の接続行列 D と $L(G)$ の隣接行列 A には次のような関係がある：

$$DD^T = A + 2I.$$

明らかに $A + 2I$ は半正定値行列であり、最小固有値は -2 以上である。そこで、「 $\lambda_{\min} \geq -2$ のグラフはどのようなグラフなのか？」という疑問が自然と生じる。次の定理はその疑問を解決したものである：

定理 1.1 (Cameron, Goethals, and Shult [2]). G は連結な有限単純グラフで $\lambda_{\min}(G) \geq -2$ とする。この時、 G は次のいずれかを満たす：

- (i) ルート系 A_n で表される (二部グラフのライングラフ)；
- (ii) ルート系 D_n で表される (一般ライングラフ)；
- (iii) ルート系 E_n ($n = 6, 7, 8$) で表される。

これにより、最小固有値によるグラフの階層構造を知ろうという問題が自然と生じるのだが、(良く知られている) ライングラフの構成法では最小固有値が -2 よりも小さいグラフを構成する事はできない。そこで R. Woo 氏と A. Neumaier 氏 [13] は、グラフの「辺」を「点」で置き換えるという単純な作業であるライングラフの構成法を高度に一般化し、 $\lambda_{\min} < -2$ グラフの構成法を定式化した。[13] では、最小

固有値 $-1 - \sqrt{2}$ 以上のグラフが分類されている。それには (9 種類の) ホフマンガラフと呼ばれる特別なグラフ達の和の概念が用いられており、そこにホフマンガラフの既約性と共にルート系との関わりも生じる。これこそ最小固有値によるグラフの階層構造を解明する道であり、さらに階層を降りる為にもっと多くのホフマンガラフを知る必要がある。これらのことについて、宗政昭弘氏¹、J. Koolen 氏²、佐野良夫氏³、G. Greaves 氏¹らと共同で進めている。

2 ホフマンガラフ

定義 2.1. 条件 (i), (ii) を満たすグラフ $H = (V, E)$ とラベリング $\mu: V \rightarrow \{f, s\}$ とのペア $\mathfrak{H} = (H, \mu)$ をホフマンガラフという:

- (i) ラベル f の総ての頂点は、少なくとも一つラベル s の頂点と隣接する;
- (ii) ラベルが f の頂点は互いに非隣接である。

ラベル s の頂点を **slim 頂点** と呼び、それらから成る $\mathfrak{H}$ の頂点集合を $V^s(\mathfrak{H})$ で表す。また、ラベル f の頂点を **fat 頂点** と呼び、それらから成る $\mathfrak{H}$ の頂点集合を $V^f(\mathfrak{H})$ で表す。また、どの slim 頂点も、ある fat 頂点と隣接するとき、 $\mathfrak{H}$ を fat-ホフマンガラフと呼ぶ。また、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x)$ (resp. $N_{\mathfrak{H}}^s(x)$) を $\mathfrak{H}$ の頂点 x と隣接する $\mathfrak{H}$ の fat 頂点 (resp. slim 頂点) の集合とし、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)$ (resp. $N_{\mathfrak{H}}^s(x, y)$) を $\mathfrak{H}$ の頂点 x, y の両方に隣接する $\mathfrak{H}$ の fat 頂点 (resp. slim 頂点) の集合とする。

さらに、ホフマンガラフの固有値を次で与える [13]:

定義 2.2. A を次の様なホフマンガラフ $\mathfrak{H}$ の隣接行列とする:

$$A = \begin{pmatrix} A_s & C \\ C^T & O \end{pmatrix}$$

但し、 A_s は slim 頂点の隣接関係を表し、 C は slim 頂点と fat 頂点の隣接関係を表す。ここで、実対称行列 $B(\mathfrak{H}) = A_s - CC^T$ の固有値を $\mathfrak{H}$ の固有値と呼ぶ。

以下は、行列 $B(\mathfrak{H})$ と slim 全域部分グラフの隣接行列 A_s との関係を表したものである:

補題 2.3 ([13, Lemma 3.4]). 行列 $B(\mathfrak{H})$ の対角成分 $B(\mathfrak{H})_{xx}$ は $-|N_{\mathfrak{H}}^f(x)|$ と等しく、非対角成分 $B(\mathfrak{H})_{xy}$ は $(A_s)_{xy} - |N_{\mathfrak{H}}^f(x) \cap N_{\mathfrak{H}}^f(y)|$ と等しい。

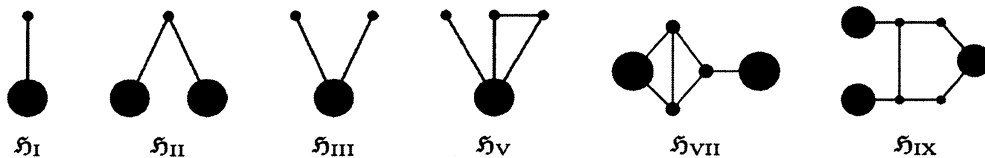


図 1: ホフマンガラフの例

例 2.4. $\mathfrak{H}_I, \mathfrak{H}_{II}, \mathfrak{H}_{III}, \mathfrak{H}_V, \mathfrak{H}_{VII}, \mathfrak{H}_{IX}$ (図 1 参照) は以下で与えられるホフマンガラである:

¹ 東北大学大学院 情報科学研究科

² 中国科学技術大学/浦項工科大学

³ 筑波大学 システム情報系

	V^s	V^f	E	$\lambda_{\min}$
$\mathfrak{H}_I$	v_1	f_1	$v_1 f_1$	-1
$\mathfrak{H}_{II}$	v_1	f_1, f_2	$v_1 f_1, v_1 f_2$	-2
$\mathfrak{H}_{III}$	v_1, v_2	f_1	$v_1 f_1, v_2 f_1$	-2
$\mathfrak{H}_V$	v_1, v_2, v_3	f_1	$v_2 v_3, v_1 f_1, v_2 f_1, v_3 f_1$	$-1 - \sqrt{2}$
$\mathfrak{H}_{VII}$	v_1, v_2, v_3	f_1, f_2	$v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1, v_1 f_1, v_2 f_1, v_3 f_2$	$-1 - \sqrt{2}$
$\mathfrak{H}_{IX}$	v_1, v_2, v_3, v_4	f_1, f_2, f_3	$v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_1 f_1, v_2 f_1, v_3 f_2, v_4 f_3$	$-1 - \sqrt{2}$

添字は [13] に従ったが、混乱を避けるためアラビア数字からローマ数字に変えてある。

定理 2.5 (Hoffman [7]). $\mathfrak{H}$ をホフマングラフとする. さらに Γ^n を, 各 *fat* 頂点 f を *slim* n -clique $K(f)$ で置き換え, f の総ての隣接点と $K(f)$ の総ての頂点を互いに辺で結ぶことで $\mathfrak{H}$ から得られるグラフとする. このとき, 以下二式が成り立つ:

$$\lambda_{\min}(\Gamma^n) \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\Gamma^n) = \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \quad (2)$$

特に, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, Γ^n を誘導部分グラフとして含む総ての *slim* グラフ Δ が

$$\lambda_{\min}(\Delta) \leq \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) + \epsilon.$$

を満たすように, 自然数 n をとれる.

定理 2.5 から, ホフマングラフとはグラフの最小固有値における極限構造であることがわかる.

3 ホフマングラフの和とライングラフの一般化

A. J. Hoffman 氏はグラフの各頂点に巨大なクリークを付け加えることで, $\lambda_{\min} < -2$ のグラフを分類・特徴付けをしようとした. さらに, Woo 氏, Neumaier 氏 [13] らは, Hoffman 氏の導入したグラフの巨大なクリークを, *fat* 頂点に置き換えることで単純な構造にして $\lambda_{\min} < -2$ のグラフを扱った. [13] で, 彼らはより一般的なライングラフを導入している.

まずホフマングラフの和を紹介する.

定義 3.1. $\mathfrak{H}$ をホフマングラフとし, $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2 (\neq \emptyset)$ を $\mathfrak{H}$ の二つの誘導部分グラフとする. 以下の条件を満たすとき, $\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^2$ の和であると言い, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \mathfrak{H}^2$ で書き表す:

$$(i) \ V(\mathfrak{H}) = V(\mathfrak{H}^1) \cup V(\mathfrak{H}^2);$$

$$(ii) \ V^s(\mathfrak{H}) = V^s(\mathfrak{H}^1) \cup V^s(\mathfrak{H}^2), \\ V^s(\mathfrak{H}^1) \cap V^s(\mathfrak{H}^2) = \emptyset;$$

$$(iii) \ x \in V^s(\mathfrak{H}^i), y \in V^f(\mathfrak{H}), \{x, y\} \in E(\mathfrak{H}) \implies y \in V^f(\mathfrak{H}^i);$$

$$(iv) \ x \in V^s(\mathfrak{H}^1), y \in V^s(\mathfrak{H}^2) \implies |N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| \leq 1 \wedge (|N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| = 1 \iff \{x, y\} \in E(\mathfrak{H})).$$

$\mathfrak{H}$ がホフマングラフ $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2 (\neq \emptyset)$ で $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \mathfrak{H}^2$ と表されるなら, $\mathfrak{H}$ は分解可能であるという. 非連結なホフマングラフは明らかに分解可能である.

ここにホフマンガラの規約性が存在し、分解可能でないホフマンガラの分類は問題の一つとしてとても興味深い。

ホフマンガラの最小固有値について次の2つが得られる：

定理 3.2. ホフマンガラ $\mathfrak{H}$ とその誘導部分グラフ $\mathfrak{G}$ について、

$$\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{G})$$

が成り立つ。

定理 3.3. ホフマンガラ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \dots \uplus \mathfrak{H}^l$ について、 $B(\mathfrak{H})$ の最小固有値は

$$\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) = \min_{1 \leq i \leq l} \lambda_{\min}(\mathfrak{H}^i)$$

である。

ここで Woo 氏、Neumaier 氏の導入したライングラフの一般化を紹介する。

定義 3.4. グラフ Γ をホフマンガラ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^1 \uplus \dots \uplus \mathfrak{H}^l$ の誘導部分グラフとする。さらに $\mathcal{H}$ を $\mathfrak{H}^1, \dots, \mathfrak{H}^l$ の同型類からなる集合とする。このとき、 Γ は $\mathcal{H}$ -line graph と呼ばれる。

$\{\mathfrak{H}_{II}\}$ -line graph はライングラフ、 $\{\mathfrak{H}_{II}, \mathfrak{H}_{III}\}$ -line graph は一般ライングラフである。 $(\mathfrak{H}_{II}, \mathfrak{H}_{III})$ については図 1 参照)

定理 3.2, 3.3 から、 Γ が $\mathcal{H}$ -line graph ならば、

$$\lambda_{\min}(\Gamma) \geq \min_{[\mathfrak{H}] \in \mathcal{H}} \lambda_{\min}(\mathfrak{H})$$

が成り立つことが分かる。また、 $\lambda_{\min}(\mathfrak{H}_{II}) = \lambda_{\min}(\mathfrak{H}_{III}) = -2$ であることから、ライングラフ、一般ライングラフで $\lambda_{\min} \geq -2$ であることが確かめられる。

3.1 禁止グラフ

ライングラフにおいて、その禁止構造の研究がある。以下がよく知られている：

定理 3.5 ([1, 3]). 単純グラフについて、

- (i) ライングラフは 9 個の極小な禁止グラフ (*Beineke* の禁止グラフ) で特徴付けられる；
- (ii) 一般ライングラフは 31 個の極小な禁止グラフで特徴付けられる。

[13] の中で、Woo 氏、Neumaier 氏は次の問題を考えている：

問題 3.6. $\{\mathfrak{H}_i \mid i = 2, 5, 7 \text{ or } 9\}$ -line graph を特徴付ける禁止グラフを分類せよ。

この問題はとても難しいので、すこしクラスを小さくした場合について解決をした：

定理 3.7 ([11, 12]). $\{\mathfrak{H}_i \mid i = 2, 5\}$ -line graph は 38 個の極小な禁止グラフで特徴付けられる。

このクラスを少し大きくしたり、別の小さなクラスで禁止グラフを見つけることで、問題 3.6 を解決出来ないかと考えている。

4 ホフマングラフの表現

グラフの最小固有値を考える時に、よく知られた構造（ルート格子等）上で議論を展開する為に、Woo 氏、Neumaier 氏 [13] らはホフマングラフの表現を導入した。

定義 4.1. ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ と正の整数 n に対し、以下を満たす写像 $\varphi: V(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbf{R}^n$ をノルム m の表現と呼ぶ:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \begin{cases} m & \text{if } x = y \in V^s(\mathfrak{H}) \text{ and } x = y; \\ 1 & \text{if } x = y \in V^f(\mathfrak{H}) \text{ and } x = y; \\ 1 & \text{if } \{x, y\} \in E(\mathfrak{H}); \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

さらに、 $\{\varphi(x) \mid x \in V_s(\mathfrak{H})\}$ で生成される格子を $\Lambda(\mathfrak{H}, m)$ で表す。

[13] には新しい表現を導入する。

定義 4.2. ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ と正の整数 n に対し、以下を満たす写像 $\psi: V^s(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbf{R}^n$ をノルム m の被約表現と呼ぶ:

$$(\psi(x), \psi(y)) = \begin{cases} m - |N_{\mathfrak{H}}^f(x)| & \text{if } x = y; \\ 1 - |N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| & \text{if } \{x, y\} \in E(\mathfrak{H}); \\ -|N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)| & \text{その他.} \end{cases}$$

但し、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x)$ は x と隣接する fat 頂点の集合を表し、 $N_{\mathfrak{H}}^f(x, y)$ は x, y の両方に隣接する fat 頂点の集合を表す。さらに、 $\{\psi(x) \mid x \in V_s(\mathfrak{H})\}$ で生成される格子を $\Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, m)$ で表す。

これら表現と最小固有値には次の関係がある：

定理 4.3 ([13]). ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ に対し、以下は同値である：

- (i) $\mathfrak{H}$ はノルム m の表現を持つ；
- (ii) $\mathfrak{H}$ はノルム m の被約表現を持つ；
- (iii) $\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) \geq -m$.

これにより最小固有値が -2 を下回った時にも、ルート格子の理論を用いる事が出来るようになり、次の成果を得ることが出来た：

定理 4.4 ([9]). $\mathfrak{H}$ を分解出来ない fat-ホフマングラフで、 $V^s = V^s(\mathfrak{H})$ 、最小固有値が -3 以上とする。このとき、総ての *slim* 頂点は高々3個の fat 頂点と隣接する。さらに、以下の主張が成立する：

- (i) $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^{(3)} \implies \mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}^{(3)}$
- (ii) $\mathfrak{H} \not\supset \mathfrak{H}^{(3)} \wedge \mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^{(2)} \implies \exists n \geq 0 \ (\Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, 3) \simeq \mathbb{Z}^n)$
- (iii) $\mathfrak{H} \not\supset \mathfrak{H}^{(2)} \implies \Lambda^{\text{red}}(\mathfrak{H}, 3)$: 既約ルート格子。

但し、 $\mathfrak{H}^{(f)}$ は *slim* 頂点が1つで、 f 個の fat 頂点をその隣接点に持つホフマングラフである。

5 ホフマングラフと辺符号グラフ

この節ではホフマングラフのスペシャルグラフを導入し、幾つかの結果を紹介する。

定義 5.1. 辺符号グラフ $\mathcal{S}$ とはグラフ S と写像 $\text{sgn} : E(S) \rightarrow \{+, -\}$ とのペア (S, sgn) のことである。 $V(\mathcal{S}) := V(S)$, $E^+(\mathcal{S}) := \text{sgn}^{-1}(+)$, $E^-(\mathcal{S}) := \text{sgn}^{-1}(-)$ とする。 $E^+(\mathcal{S})$ (resp. $E^-(\mathcal{S})$) の各要素は $\mathcal{S}$ の (+)-辺 (resp. (-)-辺) と呼ばれる。 $\mathcal{S}$ を組 $(V(\mathcal{S}), E^+(\mathcal{S}), E^-(\mathcal{S}))$ で表す。もし、 $\mathcal{S}'$ が $\mathcal{S}$ の誘導部分グラフで、 $\mathcal{S}'$ の任意の辺 e に対し $\text{sgn}(e) = \text{sgn}'(e)$ を満たすなら、辺符号グラフ $\mathcal{S}' = (S', \text{sgn}')$ は辺符号グラフ $\mathcal{S} = (S, \text{sgn})$ の誘導辺符号部分グラフと呼ばれる。2つの辺符号グラフ $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が同型であるとは、次の2つを満たす全単射 $\phi : V(\mathcal{S}) \rightarrow V(\mathcal{S}')$ が存在するときのことである：

- (i) $\{u, v\} \in E^+(\mathcal{S}) \iff \{\phi(u), \phi(v)\} \in E^+(\mathcal{S}')$;
- (ii) $\{u, v\} \in E^-(\mathcal{S}) \iff \{\phi(u), \phi(v)\} \in E^-(\mathcal{S}')$.

グラフ $(V(\mathcal{S}), E^+(\mathcal{S}) \cup E^-(\mathcal{S}))$ が連結 (resp. 非連結) なら辺符号グラフ $\mathcal{S}$ は連結 (resp. 非連結) であると言う。

定義 5.2. ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ のスペシャルグラフとは辺符号グラフ $\mathcal{S}(\mathfrak{H}) := (V^s(\mathfrak{H}), E^+, E^-)$ のことである。ただし、

$$\begin{aligned} E^+ &:= \{\{u, v\} \mid u, v \in V^s(\mathfrak{H}), u \neq v, \{u, v\} \in E(\mathfrak{H}), N_{\mathfrak{H}}^f(u) \cap N_{\mathfrak{H}}^f(v) = \emptyset\}, \\ E^- &:= \{\{u, v\} \mid u, v \in V^s(\mathfrak{H}), u \neq v, \{u, v\} \notin E(\mathfrak{H}), N_{\mathfrak{H}}^f(u) \cap N_{\mathfrak{H}}^f(v) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

である。

補題 5.3 ([9, Lemma 3.4]). ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ が分解可能ではないことと、そのスペシャルグラフ $\mathcal{S}(\mathfrak{H})$ が連結であることは同値である。

定義 5.4. 辺符号グラフ $\mathcal{S}$ に対し、符号隣接行列 $M(\mathcal{S})$ を

$$(M(\mathcal{S}))_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{u, v\} \in E^+(\mathcal{S}), \\ -1 & \text{if } \{u, v\} \in E^-(\mathcal{S}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で与える。 $M(\mathcal{S})$ の最小固有値を $\lambda_{\min}(\mathcal{S})$ で書き表す。

$M(\mathcal{S}')$ が $M(\mathcal{S})$ の主小行列式であることから、次の補題を得る：

補題 5.5. もし、 $\mathcal{S}'$ が辺符号グラフ $\mathcal{S}$ の誘導辺符号部分グラフなら、 $\lambda_{\min}(\mathcal{S}') \geq \lambda_{\min}(\mathcal{S})$ が成り立つ。

補題 2.3 と定義から、次の補題を得る：

補題 5.6. $\mathfrak{H}$ を異なる2つの *slim* 頂点が高々一つの *fat* 頂点を共有するホフマングラフとする。このとき、

$$M(\mathcal{S}(\mathfrak{H})) = B(\mathfrak{H}) + D(\mathfrak{H}),$$

が成り立つ。ただし、 $D(\mathfrak{H})$ は $D(\mathfrak{H})_{xx} := |N_{\mathfrak{H}}^f(x)|$ ($x \in V^s(\mathfrak{H})$) で与えられる対角行列である

補題 5.7. *fat*-ホフマングラフ $\mathfrak{H}$ について、 $\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) > -3$ ならば、 $\lambda_{\min}(\mathcal{S}(\mathfrak{H})) \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{H}) + 1$ である。

Proof. $\mathfrak{H}$ のある異なる 2 つの slim 頂点が 2 つの fat 頂点と隣接するならば、 $\mathfrak{H}$ は最小固有値が高々 -3 の誘導部分グラフを含む。これは定理 3.2 に反する。従って、補題 5.6 の仮定が満たされる。 $\mathfrak{H}$ は fat-ホフマンガラフであるから、 $M(S(\mathfrak{H})) = B(\mathfrak{H}) + D(\mathfrak{H})$ の最小固有値は少なくとも $\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) + 1$ であることが、[8, Corollary 4.3.3] から分かる。□

辺符号グラフから、それをスペシャルグラフに持つホフマンガラフが得られるのであれば、ホフマンガラフを分類するよりも辺符号グラフを分類する方が効率が良いように見える。実際は、次の例のようにホフマンガラフが得られない場合がある：

例 5.8. S を一辺を除く総ての辺が $(-)$ -辺であるサイクルとする。 S のただ一辺のみが $(+)$ -辺である。このとき、 S をスペシャルグラフに持ち、各 slim 頂点が高々 1 つの fat 頂点と隣接するホフマンガラフは存在しない。

このように、与えられた辺符号グラフに対し、いつもホフマンガラフが存在するわけではない。しかしながら、辺符号グラフを扱う方が膨大な量のホフマンガラフを扱うより、はるかに勝手が良い。

5.1 $\lambda_{\min} > -3$ のホフマンガラフ

また、 $\lambda_{\min} = -3$ のホフマンガラフは量が多すぎて分類が難しい。しかしながら、 $\lambda_{\min} > -3$ であれば、制約も強いので構造が単純に表されることが期待される。そこで、最小固有値が -2 よりも大きな辺符号グラフを分類したので、以下に 2 つ紹介する：

定理 5.9 ([6]). *Let G be a connected integrally represented edge-signed graph having smallest eigenvalue greater than -2 . Let H be the representation graph of G for some integral representation. Then one of the following statements holds:*

- (i) H is a simple tree or H is unicyclic with an odd cycle, and G is switching equivalent to the line graph $\mathfrak{L}(H)$,
- (ii) H is unicyclic with an even cycle C , and G is switching equivalent to $\mathfrak{L}^{\dagger}(H, uu')$ where uu' is an edge of $\mathfrak{L}(C)$.
- (iii) H is a tree with a double edge, and G is switching equivalent to the edge-signed graph obtained from the line graph $\mathfrak{L}(H)$, by attaching a new vertex u' , and join u' by $(+)$ -edges to every vertex of a clique in the neighbourhood of u , $(-)$ -edges to every vertex of the other clique in the neighbourhood of u , where u is a fixed vertex of $\mathfrak{L}(H)$.

Conversely, if G is an edge-signed graph described by (i), (ii), or (iii) above, then G is integrally represented and has smallest eigenvalue greater than -2 .

定理 5.10 ([6]). *Let G be an exceptional edge-signed graph having smallest eigenvalue greater than -2 . Then G is switching equivalent to one of*

- (i) 32 edge-signed graphs on 6 vertices;
- (ii) 233 edge-signed graphs on 7 vertices;
- (iii) 1242 edge-signed graphs on 8 vertices.

ここでは、条件を日本語に翻訳することで生じる混乱を避けるため原文のままとした。補題 5.7 により、 $\lambda_{\min} > -3$ のホフマンガラのスペシャルグラフが、これらの辺符号グラフの部分グラフであることには違いない。

$\mathfrak{H}_{II}$ を誘導部分グラフに持つように制限すると、さらに条件が絞れ、定理 5.11 を得る。結果を紹介する前に幾つか記号を与える。 K_n^+ を n 頂点の (+)-完全グラフ、 K_2^- を 2 頂点の (-)-完全グラフ、 $\mathcal{T}_1^*$ を $V(\mathcal{T}_1^*) = \{v^*, v_1, v_2\}$, $E^+(\mathcal{T}_1^*) = \{\{v_1, v_2\}\}$, $E^-(\mathcal{T}_1^*) = \{\{v^*, v_1\}, \{v^*, v_2\}\}$ で与えられるトライアングル (三頂点からなる完全グラフ) とする。また、 $\mathcal{S}$ を辺符号グラフとする。 $\mathcal{S}$ のブロックは、基礎グラフ (underlying graph) $U(\mathcal{S})$ のブロックで誘導される $\mathcal{S}$ の部分グラフを意味する。

定理 5.11 ([10]). *fat*-ホフマンガラ $\mathfrak{H}$ は分解可能ではなく、2つの *fat* 頂点と隣接する *slim* 頂点 v^* を持つものとする。このとき、 $\lambda_{\min}(\mathfrak{H}) > -3$ であることと、以下の条件を総て満たすことは同値である：

- (i) $U(\mathcal{S}(\mathfrak{H}))$ は *claw-free* ブロックグラフである；
- (ii) $\mathfrak{H}$ はちょうど一つの $\mathfrak{H}_{II}$ と同型な誘導部分グラフを含む；
- (iii) v^* は $U(\mathcal{S}(\mathfrak{H}))$ の切断点ではない；
- (iv) v^* を含む $\mathcal{S}(\mathfrak{H})$ のブロック B^* は、 K_n^+ ($n \geq 2$), K_2^- , $\mathcal{T}_1^*$ のいずれかと同型である；
- (v) B^* を除く $\mathcal{S}(\mathfrak{H})$ の各ブロックは、 K_n^+ ($n \geq 2$), K_2^- のいずれかと同型である。

6 最後に

ホフマンガラ $\mathfrak{H}$ のノルム 3 の表現から生成される格子 $\Lambda(\mathfrak{H}, 3)$ は 3-格子 [14] を成す。ここに、最小固有値問題の格子理論への広がりが存在する。ここで、「総ての 3-格子はホフマンガラで表されることができるのだろうか？」という疑問が生じる。ルート格子 E_i ($i = 6, 7, 8$) で表されるグラフは $\lambda_{\min} \geq -2$ ではあるものの、一般ライングラフではないことから、通常正しいとは言いきれない。

今後は主に 3-格子理論の発展や $\lambda_{\min} = -3$, $\lambda_{\min} < -3$ の場合について取り組んでいきたい。

参考文献

- [1] Lowell W. Beineke. Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9(2):129 – 135, 1970.
- [2] P.J Cameron, J.M Goethals, J.J Seidel, and E.E Shult. Line graphs, root systems, and elliptic geometry. *Journal of Algebra*, 43(1):305 – 327, 1976.
- [3] Dragoš Cvetković, Michael Doob, and Slobodan Simić. Generalized line graphs. *J. Graph Theory*, 5(4):385–399, 1981.
- [4] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. Graphs with least eigenvalue -2 : Ten years on. *Linear Algebra and its Applications*, 484:504 – 539, 2015.
- [5] Gary Greaves, Jack Koolen, Akihiro Munemasa, Yoshio Sano, and Tetsuji Taniguchi. Edge-signed graphs with smallest eigenvalue greater than -2 . *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 110:90 – 111, 2015.

- [6] Gary Greaves, Jack H. Koolen, Akihiro Munemasa, Yoshio Sano, and Tetsuji Taniguchi. Edge-signed graphs with smallest eigenvalue greater than -2 . *J. Comb. Theory, Ser. B*, 110:90–111, 2015.
- [7] A.J. Hoffman. On graphs whose least eigenvalue exceeds $-1 - \sqrt{2}$. *Linear Algebra and its Applications*, 16(2):153 – 165, 1977.
- [8] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, editors. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1986.
- [9] Hye Jin Jang, Jack Koolen, Akihiro Munemasa, and Tetsuji Taniguchi. On fat hoffman graphs with smallest eigenvalue at least -3 . *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 7(1), 2012.
- [10] Akihiro Munemasa, Yoshio Sano, and Tetsuji Taniguchi. Fat hoffman graphs with smallest eigenvalue greater than -3 . *Discrete Applied Mathematics*, 176:78 – 88, 2014. Graph Spectra in Computer Science.
- [11] Tetsuji Taniguchi. On graphs with the smallest eigenvalue at least $-1 - \sqrt{2}$, Part I. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 1(1), 2008.
- [12] Tetsuji Taniguchi. On graphs with the smallest eigenvalue at least $-1 - \sqrt{2}$, Part II. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 5(2), 2012.
- [13] Renee Woo and Arnold Neumaier. On graphs whose smallest eigenvalue is at least $-1 - \sqrt{2}$. *Linear Algebra and its Applications*, 226-228:577 – 591, 1995. Honoring J.J.Seidel.
- [14] 良雄 味村. 3-格子について. 神戸薬科大学研究論集 : *Libra*, 7:29–42, mar 2006.