

p -進 discrete 群の Ihara-Selberg 型ゼータ関数

早大理工 橋本喜一郎 (Ki-ichiro Hashimoto)

東大理 堀 正 (Akira Hori)

§ 0 序

$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ とその中に入っている第一種 Fuchs 群 Γ に対して、Selberg zeta が [Selberg] によって導入された。そのうち、semi-simple な実 Lie 群 G で $\mathbb{R}$ -rank が 1 であるものに対して、 G/Γ が compact のときには Gangolli、 $\mathrm{vol}(G/\Gamma) < \infty$ のときには Warner-Osborne によって Selberg zeta が定義され、 $\mathbb{R}$ -rank が 1 である場合には最終的な結着がついたのである。他方で、 $G = \mathrm{PSL}_2(K)$ (K は p -進体) とその中の discrete torsion-free 部分群 Γ で、 G/Γ が compact である (これは $\mathrm{vol}(G/\Gamma) < \infty$ と同値) ようなものに対して、上記の Selberg zeta との類似物 (Ihara zeta と呼ぶ) が [Ihara1] によって導入された。ここでは、 K 上の semi-simple な代数群 G で、 K -rank が 1 であるものに対して、同様の Γ を考え Ihara zeta を定義し、最終的な結着を与える。

§ 1 設定、定義、定理

K を $\mathbb{R}$ 進体とする。 q をその剰余体の位数とする。そして、 G を K 上の *semi-simple* な代数群で、 K -rank が 1 であり *affine Tits* 系 (G, B, N, S) をなすとする。 また、そのとき定義される *Weyl* 群を W とする。 K -rank が 1 であるという仮定より、 S は 2 つの *involution* s_1, s_2 からなり、 W の勝手な元は s_1, s_2 を交互に配列して得られる最短表示をもつ。 以上の設定をみたす群 G は [Tits] によってすべて分類されている。 さらに、次が知られている。

Fact 1 (Bruhat 分解)

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B w B$$

Fact 2 G の極大 *compact* 部分群は共役で類別すると 2 つあり、その代表元として $B \sqcup B s_1 B$ と $B \sqcup B s_2 B$ がとれる。 以下では、これらをそれぞれ U_1, U_2 という記号で引用する。

Fact 3 次の式をみたす自然数 d_1, d_2 がある。

$$\#(B \setminus B s_1 B) = q^{d_1}, \quad \#(B \setminus B s_2 B) = q^{d_2}$$

次に Γ は G の部分群で、 *discrete torsion-free* で G/Γ が *compact* であるとする。 このとき、 $\#(U_1 \setminus G/\Gamma)$ と $\#(U_2 \setminus G/\Gamma)$ は共に有限になり、これらをそれぞれ h_1, h_2 とおく。 このような設定のもとでは、 Γ は自由群になり、その rank は

$$q^{d_1} h_1 - h_2 + 1 (= q^{d_2} h_2 - h_1 + 1)$$

であることが、[Serre]によって知られている。[Ihara 1]の一般化として示されているのである。以下では、 Γ のrankを r_Γ と書く。ここで、Ihara zetaの定義を出し、新しい記号はあとで説明する。

$$\text{Def } \zeta_\Gamma(\mu, \rho) = \prod_{\{\gamma\}_\Gamma: \text{primitive}} \det(I_n - \rho(\gamma)\mu^{\deg\{\gamma\}_\Gamma})^{-1}$$

ここに、 μ は変数であり、 $\rho: \Gamma \longrightarrow U(n)$ は n 次unitary表現である。 I_n はsize n の単位行列である。 $\{\gamma\}_\Gamma$ は $\gamma \in \Gamma$ の属する Γ の共役類であり、それがprimitiveであるとは、[Ihara 1]と同様な次の定義による。 Γ が自由群であることより、 $\gamma \in \Gamma$ の Γ 内における中心化群 $C_\Gamma(\gamma)$ が無限次の巡回群になり、

$$\{\gamma\}_\Gamma: \text{primitive} \stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma \text{ が } C_\Gamma(\gamma) \text{ を生成する}$$

と定義するのである。また、これも[Ihara 1]と同様であるが、

$$\deg\{\gamma\}_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in G} l(x^{-1}\gamma x)$$

であり、ここでの l は長さと呼ばれるもので、次のように定義する。勝手な $g \in G$ に対して

$$l(g) = m \stackrel{\text{def}}{\iff} g \in U_1(s_1 s_2)^m U_1$$

と定義する。 $U_1(s_1 s_2)^m U_1$ はB-double cosetとしては、

$$U_1(s_1 s_2)^m U_1 = \bigsqcup_{\substack{w \in W \\ w \text{ の最短表示に現われる} \\ S_2 \text{ の元の個数が } m}} B w B$$

$$= B(s_1 s_2)^m B \sqcup B(s_1 s_2)^m s_1 B \sqcup B s_2 (s_1 s_2)^{m-1} B \\ \sqcup B s_2 (s_1 s_2)^{m-1} s_1 B$$

と表わされる。したがって、勝手な $g \in G$ は同時に異なる2つの U_1 -double coset に入ることはないし、また、必ずどれかの U_1 -double coset に入るのである。すなわち、上の ℓ の定義は well-defined である。以下では、 U_1 -double coset $U_1(s_1 s_2)^m U_1$ を G_m という記号で引用する。ここで、 s_1 と s_2 を非対称に用いて ℓ や $\deg$ を定義したけれども、 s_1 と s_2 の役割を逆にするとどうなるかということに関しては、後に述べるはずの Remark を参照してほしい。本講演の主目標は、次の定理の証明にある。

Th $Z_P(u, \rho)$ は次のような有理関数である。

$$Z_P(u, \rho) = \left[(1-u)^{n(r_P-1)} (1+q^{d_2} u)^{n(k_2-k_1)} \right. \\ \left. \times \det \{ I_{n k_1} - (A_{1\rho} - q^{d_2} + 1)u + q^{d_1+d_2} u^2 \} \right]^{-1}$$

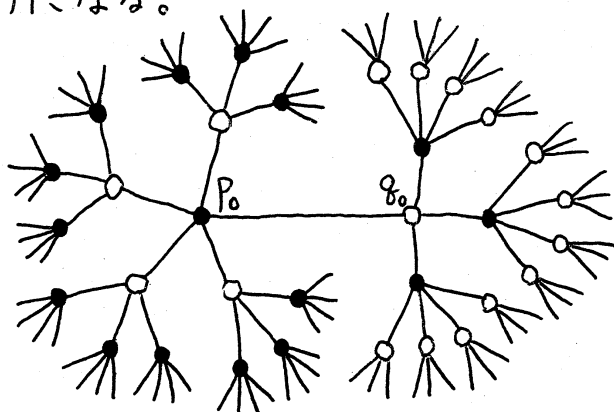
ここで、行列 $A_{1\rho}$ は次のように定義される。 $U_1 \backslash G/P$ の完全代表系 $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_1}\}$ を一組固定して、次の準同型 φ を考える。

$$\begin{array}{ccc} \varphi : H(G, U_1) & \longrightarrow & M_{nh_1}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 \backslash U_1 & \longrightarrow & \left(\sum_{\gamma \in \Gamma \cap x_i^{-1} U_1 \backslash U_1 x_j} \rho(\gamma) \right) \end{array}$$

ただし、 $H(G, U_1)$ は対 (G, U_1) から定義される $\mathbb{Z}$ 上の Hecke 環である。そして、 $A_{mp} = \varphi(G_m)$ によって $A_{mp} (m=0, 1, 2, \dots)$ を定義する。 $m=1$ のときが上の A_{1p} になる。

§2 証明のための準備

群 G から作られる Bruhat-Tits building X を、我々の設定の場合に復習する。 K -rank 1 という仮定から building は tree になる。作り方は次のようである。vertex の集合は $U_1 \backslash G \sqcup U_2 \backslash G$ で与えられ、edge の集合は $B \backslash G$ で与えられる。勝手な edge $e \in B \backslash G$ に対して、これが結んでいる vertex は、2つの標準的な写像 $B \backslash G \rightarrow U_1 \backslash G$, $B \backslash G \rightarrow U_2 \backslash G$ による e の像として与えられる。このようにして構成すると次のようなものになる。



$$P_0 \longleftrightarrow U_1$$

$$Q_0 \longleftrightarrow U_2$$

図では、 U_1 の共役に対応する vertex を黒丸 $\bullet$ で、 U_2 の共役に対応する vertex を白丸 $\circ$ で表わしている。黒丸と白丸が交互に結ばれて、四方八方に無限にのびた tree になっている。

edge の生えている本数は、vertex の種類だけで決まっており、黒からは $1+q^{d_1}$ 本、白からは $1+q^{d_2}$ 本生えている。図での本数は便宜的なものである。どこかに U_1 、 U_2 自身と対応する vertex があり、それらをそれぞれ p_0, q_0 とおいて図に書きこんだ。 p_0 と q_0 は edge で結ばれている。以下では、 $U_1 \backslash G$ 、 $U_2 \backslash G$ をそれぞれ X_1, X_2 と略記する。そして、 X_1 上だけに距離を入れる。勝手な2つの $p, q \in X_1$ に対して、 $d(p, q)$ を、 p と q を結ぶ X 内の最短経路の edge の本数の半分であると定義する。vertex は白黒が交互に結ばれているので、 p と q を結ぶ最短経路はいつも偶数本の edge でできており、したがって $d(p, q)$ は常に整数になる。

building X にはその作り方から自然に G が作用しているが、特に Γ も作用している。そして、 Γ の作用で X をわってできる X/Γ の構造が [Serre] において調べられている。それを復習すると次のようになる。まず、 X/Γ は有限 graph になる。building の2種類の vertex は Γ の作用によってうつりあわないので、 Γ の作用でわっても種類は保たれる。つまり、 X/Γ にも2種類の vertex が現われ (X の vertex の種類に

対応して黒丸、白丸で表わす)、それらが交互に結ばれたいくつかの loop からなっている。黒丸は $U_1 \backslash G/\Gamma$ 、白丸は $U_2 \backslash G/\Gamma$ の元と対応している。 X/Γ の edge の生え方も vertex の種類だけで決まっており、黒からは $1+q^{d_1}$ 本、白からは $1+q^{d_2}$ 本生えている。したがって、 X/Γ の edge の総本数を2通りに数えて、 $(1+q^{d_1})h_1 = (1+q^{d_2})h_2$ なる関係が示される。また、 $\pi: X \longrightarrow X/\Gamma$ は universal covering になっている。 X/Γ 内の勝手な max subtree T_0 をとって、それを π によって X 内に持ち上げたものを T と書く。ただし、 $T \ni p_0, q_0$ となるように持ち上げる。そして、 $U_1 \backslash G/\Gamma$ の1つの完全代表系 $\{x_1, x_2, \dots, x_{h_1}\}$ を

$$T \cap X_1 = \{p_0 x_1, p_0 x_2, \dots, p_0 x_{h_1}\} \quad \begin{array}{l} (\text{vertex の集合}) \\ (\text{として等しい}) \end{array}$$

となるように選ぶ。

次に、prime cycle というものを定義する。prime cycle とは、 X/Γ 内の closed path の同値類で、backtracking がなく edge の本数が有限で、同じ所を何度も回るだけの繰り返しにはなっていないものであると定義する。ここに、2つの closed path が同値であるとは、始点が違うだけで同じ所を回っているということである。このとき、次のようなことが [Serre] によって知られている。 Γ は X/Γ の基本群 $\pi_1(X/\Gamma)$ と同一視できる。また、 Γ の共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ で primitive なもの

は prime cycle ρ と 1 対 1 に対応しており、

$$\deg\{\gamma\}_\Gamma = \rho \text{ の edge の本数の半分 } (= |\rho| \text{ と書く})$$

が成り立つ。そこで、Ihara zeta の定義を次のように書き直すことによって、定理の証明をする。

$$\text{Def } Z_\Gamma(u, \rho) = \prod_{\rho: \text{prime cycle}} \det(I_n - \rho(\langle \rho \rangle) u^{|\rho|})^{-1}$$

ただし、 $\langle \rho \rangle$ は ρ を Γ の元と見たときにその属する共役類を表わす。これより

$$u \frac{d}{du} \log Z_\Gamma(u, \rho) = \sum_{m=1}^{\infty} N_{m\rho} u^m$$

と展開すると、

$$N_{m\rho} = \sum_c n_c \rho(c)$$

$\nwarrow$ $\left(\begin{array}{l} X/\Gamma \text{ 内の closed path で} \\ \text{backtracking なし、始点は黒丸} \end{array} \right) \cdots (*)$
edge の本数は $2m$

となる。また、行列 $A_{m\rho}$ は次に言うような一次変換の行列表示であるとみなせる。 n_{h_1} 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間

$$S_\rho(\Gamma) = \{ f: X_1 \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f(x\gamma) = f(x)\rho(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in X_1 \}$$

を考え、一次変換 $A_{m\rho}: S_\rho(\Gamma) \rightarrow S_\rho(\Gamma)$ を

$$(A_{m\rho} f)(u) = \sum_{\substack{v \in X_1 \\ d(u, v) = m}} f(v)$$

で定義する。ベクトル空間 $S_\rho(\Gamma)$ の基底として次のようなものをとって行列表示すれば、前記の行列 $A_{m\rho}$ が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{v,k}(x) \in S_p(\Gamma) \\ \left. \begin{array}{l} v \in T \cap X_1, k=1, 2, \dots, h_1 \\ \text{次の条件をみたす。} \\ f_{v,k}(x) = \begin{cases} e_k & x=v \\ 0 & x \neq v \end{cases} \\ x \in T \cap X_1 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

ただし、 $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ $\swarrow$ k 成分, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

さらに、

$$\text{tr Amp} = \sum_{\substack{(x,y) \in (T \cap X_1) \times \Gamma \\ d(x, xy) = m}} \text{tr } \rho(y) \dots \dots (*)$$

であることもすぐわかる。

§ 3 定理の証明

証明のポイントは次の2つの式にある。

① $m \geq 1$ に対して

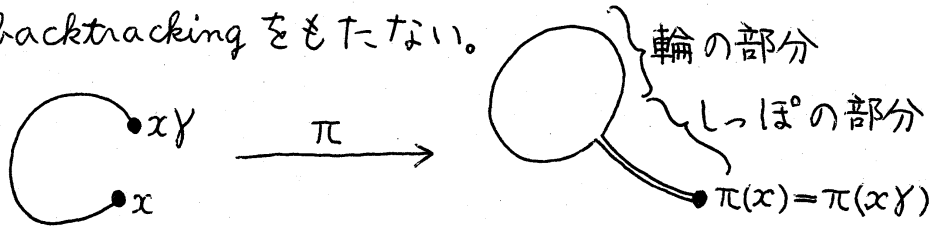
$$\begin{aligned} \text{tr Amp} = N_{mp} &+ \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (q^{d_1+d_2} - q^{d_2}) q^{(k-1)(d_1+d_2)} N_{m-2k,p} \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (q^{d_2} - 1) q^{k(d_1+d_2)} N_{m-2k-1,p} \end{aligned}$$

② Amp たちの関係式

$$\sum_{m=0}^{\infty} \text{Amp } \mu^m = \frac{(1-\mu)(1+q^{d_2}\mu)}{1-(A_{1p}-q^{d_2}+1)\mu+q^{d_1+d_2}\mu^2}$$

以下、このセクションでは、①の証明、②の証明、①、②から定理を出すこと、の3つを説明する。

まず、①の証明を述べる。(**)の条件をみたすような径路をすべてとり、それらを一本ずつ universal covering π によって X/Γ 内におとす。おとされてできたそれぞれの closed path は始点の所でのみ backtracking をもち、それ以外の所では backtracking をもたない。



①を出すためには、おとされる前の径路としては異なっているが、おとされると輪の部分と同じで、しっぽの部分だけが異なっているというような径路の個数を数えればよい。

図 1

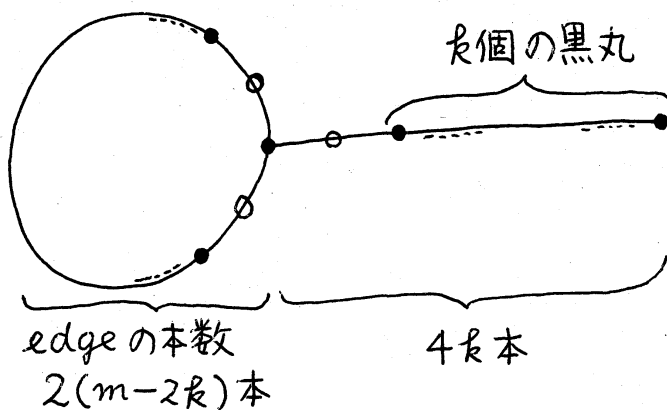


図 2

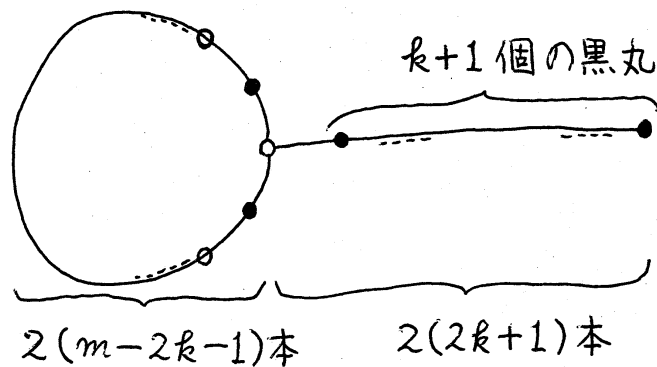


図1、2の輪の部分のedgeが固定されているときに、しっぽの部分のedgeの生え方がそれぞれ $(q^{d_1+d_2} - q^{d_2})q^{(k-1)(d_1+d_2)}$, $(q^{d_2} - 1)q^{k(d_1+d_2)}$ 通りであることを確認すれば、①の証明は終わる。

次に、②の証明を述べる。[Iwahori-Matsumoto]により $H(G, U_1)$ の構造が次のようにわかっている。

$$H(G, U_1) \cong \mathbb{Z}[G_1]$$

であり、Hecke環内における $G_m (m=0, 1, 2, \dots)$ の関係式は、

$$\begin{cases} G_1^2 = G_2 + (q^{d_2} - 1)G_1 + q^{d_2}(q^{d_1} + 1)G_0 & (m \geq 2) \\ G_1 G_m = G_m G_1 = G_{m+1} + (q^{d_2} - 1)G_m + q^{d_1+d_2} G_{m-1} \end{cases}$$

となる。これらの両辺を準同型 φ でうつせば、 $A_{mp} (m=0, 1, 2, \dots)$ の関係式が得られ、それを generating function を用いて表わせば②が得られる。

最後に、①、②から定理が出ることを示す。まず、①の式を反転すると

$$N_{mp} = \text{tr } A_{mp} - (q^{d_2} - 1) \text{tr } A_{m-1,p} - \sum_{k=1}^{m-2} \left\{ (q^{d_2} - 1) + (q^{d_1+d_2} - q^{2d_2}) \sum_{l=0}^{m-2-k} (-q^{d_2})^l \right\} \text{tr } A_{kp}$$

となるので、これを

$$\mu \frac{d}{d\mu} \log \sum_p(u, p) = \sum_{m=1}^{\infty} N_{mp} \mu^m$$

に代入して整理する。

$$\begin{aligned}
& u \frac{d}{du} \log Z_T(u, \rho) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (\text{tr } A_m \rho) u^m - (q^{d_2} - 1) \sum_{m=2}^{\infty} (\text{tr } A_{m-1}, \rho) u^m \\
&\quad - (q^{d_2} - 1) \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-2} (\text{tr } A_k \rho) u^m \\
&\quad - (q^{d_1+d_2} - q^{2d_2}) \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-2} \sum_{l=0}^{m-2-k} (-q^{d_2})^l (\text{tr } A_k \rho) u^m \\
&= \left\{ 1 - (q^{d_2} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} u^k - (q^{d_1+d_2} - q^{2d_2}) \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-2} (-q^{d_2})^l u^k \right\} \\
&\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} (\text{tr } A_m \rho) u^m \\
&= \left\{ 1 - \frac{(q^{d_2} - 1)u}{1-u} - \frac{(q^{d_1+d_2} - q^{2d_2})u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)} \right\} \times \sum_{m=1}^{\infty} (\text{tr } A_m \rho) u^m \\
&= \frac{1 - q^{d_1+d_2}u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)} \sum_{m=1}^{\infty} (\text{tr } A_m \rho) u^m
\end{aligned}$$

ここで、②の式の両辺の trace をとって代入する。

$$\begin{aligned}
& u \frac{d}{du} \log Z_T(u, \rho) \\
&= (1 - q^{d_1+d_2}u^2) \text{tr} \left\{ 1 - (A_{1\rho} - q^{d_2} + 1)u + q^{d_1+d_2}u^2 \right\}^{-1} \\
&\quad - n h_1 \frac{1 - q^{d_1+d_2}u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)}
\end{aligned}$$

さらに、ここで次のような等式が容易に示される。

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left\{ 1 - (A_{1\rho} - q^{d_2} + 1)u + q^{d_1+d_2}u^2 \right\}^{-1} \\
&= \frac{u}{1 - q^{d_1+d_2}u^2} \frac{d}{du} \log \det \left\{ 1 - (A_{1\rho} - q^{d_2} + 1)u + q^{d_1+d_2}u^2 \right\}^{-1} \\
&\quad + \frac{n h_1}{1 - q^{d_1+d_2}u^2}
\end{aligned}$$

これを代入すると定理が出る。微分をはずすときの積分定数

は $\mu=0$ において決める。

§ 4 定理の系と Remarks

まず、次の系が成り立つ。

Cor $\rho=1$ (単位表現) のとき

$$(1-\mu)^{-1} \text{ のベキ } = r_F$$

$$= L^2(G/F) \text{ に含まれる special 表現の重複度}$$

これは、[Ihara 1] の拡張である。第一の等号は [Ihara 1] と同様に示され、第二の等号は [Garland] による。

次に、いくつか Remark を出す。

Remark 1

Ihara zeta の有理関数としての表示を求める方法は、[Ihara 1] においては、free product expression を使う非常に combinatorial な方法であったが、それは [Serre] によって building X だけを使う graph 理論的な方法に書き直されたのである。我々の設定の場合にも、後者の方法で有理関数としての表示を求めたのである。なお、building X を使いはするものの [Ihara 1] の手法をまねた combinatorial な方法も知られており、それに関しては [Hori] を参照してほしい。

Remark 2

我々の設定をみたす群 G は [Tits] によってすべて分類さ

れている。central isogeny で類別すると 11 個の type に分けられて、

$$\begin{cases} d_1 = d_2 \text{ なるもの} & 4 \text{ つ} \\ d_1 \neq d_2 \text{ なるもの} & 7 \text{ つ} \end{cases}$$

である。前者の 4 つはすべて [Ihara1] で扱われている公理をみたしており、後者はどれもみたしていない。

Remark 3

実は、前セクションまでの議論は、2 つの involution S_1 と S_2 の役割を入れかえても、全く同様に展開できるのである。Ihara zeta の定義を見ればわかるように、 S_1 と S_2 のどちらをとるかということとは無関係に定義されている。それにもかかわらず、得られた有理関数としての表示には、 S_1 と S_2 が非対称に入っている。定理の証明をする過程で、手段として S_1 と S_2 を非対称に用いたので、非対称な表示が得られたのである。 S_1 と S_2 を逆にして求めた表示と、もとの表示とが等しいということは、上のようなわけで当然であるが、2 つの表示を等号で結んだ恒等式は、それ自身では自明ではない。今のところ、その恒等式が成立する直接的な理由ははっきりしておらず、単に同じ定義から右辺と左辺が別々に出てきたからというに過ぎない。Selberg's trace formula などを用いれば、その恒等式の表現論的、または幾何学的な意味などがわかる

のかも知れないが、それはまだできていない。あわせて、定理の表示に出ている第二の因数 $(1+q^{d_2}u)^{n(k_2-k_1)}$ の意味づけができればおもしろいだろう。特に、このセクションの系に対応するような表現論的な意味づけはできないものだろうか。

参考文献

[Bourbaki] N. Bourbaki

Groupes et Algèbres de Lie, chap. IV, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Hermann, Paris, 1968

[Garland] H. Garland

p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic groups. Ann. of Math. 97 (1973), pp. 375-423

[Hori] A. Hori

修士論文, 東京大学, 1987

[Ihara1] Y. Ihara

On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p -adic fields. J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), pp. 219-235

[Ihara 2] Y. Ihara

Discrete subgroups of $PL(2, \mathbb{K}_p)$. Proc. Symposia
Pure Math. IX, AMS. 1966, pp. 272-278

[Ihara 3] Y. Ihara

Algebraic curves mod p and arithmetic groups.
Proc. Symposia Pure Math. IX, AMS. 1966, pp. 265-271

[Ihara 4] Y. Ihara

On congruence monodromy problems I, II. Lecture
Notes, Dep. of Math. Univ. of Tokyo, 1968

[Iwahori-Matsumoto] N. Iwahori-H. Matsumoto

On some Bruhat decomposition and the structure
of the Hecke ring of p -adic Chevalley groups.
Publ. Math. IHES, 25(1965), pp. 5-48

[Kuga] M. Kuga

弱対称リーマン空間における位相解析とその応用 (A.
Selberg の仕事の紹介). 数学, 9(1957), pp. 166-185

[Selberg] A. Selberg

Harmonic analysis and discontinuous groups in
weakly symmetric Riemannian spaces with appli-
cations to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20
(1956), pp. 47-87

[Serre] J.-P. Serre

Arbres, Amalgames, SL_2 . Astérisque, no 46, Soc.
Math. France, 1977

[Tits] J. Tits

Reductive groups over local fields. Proc. Symposia
Pure Math. 33 (1979), part 1, pp. 29-69