

反応拡散系のダイナミクス - Pattern Section for Two Breathers -

池田 勉 (龍谷大学理工学部)

反応拡散方程式系は、自然科学の様々な分野における非線形現象の数理モデルとして、パターン(時空間構造)の形成・発展機構の解明に対して理論的な側面から貢献してきた。パターン形成に関する重要な課題の一つに、存在が想定できるいくつかのパターンのうちで特定のものが選択される機構を明らかにすることがあろう。

(一般には、複数の安定な時空間構造が共存する場合があります、その際にはパラメータの変動に応じてどれが一番実現され易いかを議論することになる。))

ここでは、2つの内部遷移層に関する2種類の振動形態(図1)のどちらが実現されるか、というパターン選択問題を扱う。2つのパラメータ $0 < \varepsilon \ll 1$ と $\tau > 0$ を含む、1次元空間における2変数 $u(t, x)$, $v(t, x)$ の反応拡散系:

$$(1) \quad \varepsilon \tau u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u, v), \quad v_t = v_{xx} + g(u, v) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, \ell)$$

をノイマン境界条件の下で考えよう。仮定 $0 < \varepsilon \ll 1$ は $u(t, x)$ と $v(t, x)$ の拡散率および反応率に大きな違いがある状況を設定していることを意味し、 τ は緩和時間に対応するパラメータである。非線形項は

$$(2) \quad \begin{cases} f(u, v) = -u - 1 - v/2 & (u < 0), \quad f(u, v) = -u + 1 - v/2 & (u > 0), \\ g(u, v) = u + d - v/2, & (-1 < d < 1) \end{cases}$$

としておこう。滑らかな初期値に対して、(1)は暫くの間

$$(3) \quad \varepsilon \tau u_t = +f(u, v), \quad v_t = v_{xx} + g(u, v)$$

で近似される。 $f(u, v)$ はbistable、 ε は小さいので、短時間で内部遷移層が形成され、区間 $(0, \ell)$ が2つの領域に分離されることを直観的に理解できるだろう。(一方では $u \cong 1 - v/2$ 、他方では $u \cong -1 - v/2$ 。) 実際、十分小さな ε に対して、内部遷移層を持つ定常解の存在が特異摂動法により示され、内部遷移層の数 n に応じて n -遷移層定常解と呼ばれている。 n -遷移層定常解の安定性は τ に強く依存する。 τ が大きい ($\tau = O(1/\varepsilon)$) と漸近安定である。一方、 ε を固定して τ を小さくしてゆくと n -遷移層定常解はHopf分岐により安定性を失い、遷移層の振動 (n -ブリーザ) が観測される。 n -遷移層定常解に対しては n 個の相異なる振動モードがあるが、そのなかでどの振動形態が安定なものとして実現・観測されるであろうか、というのが我々の問題意識である。

$n = 2$ に限定して詳細な議論を進めよう。この場合には、中心 $x = \ell/2$ に関して対称なin-phaseブリーザと反対称なout-of-phaseブリーザの2種類の振動パターンがある。in-phaseブリーザは1-ブリーザの境界での折り返しにより得られ、また、数値シミュレーションにおいても出現し易いので、in-phaseモードが内部遷移層の安定な振動形態であり、out-of-phaseブリーザは存在したとしても不安定であろうと推測されてきた。しかし、最近のコンピュータを援用した計算により、内部遷移層の位置 ϕ によってはout-of-phaseブリーザも安定に存在すること、 ϕ が安定な振動形態を決定するキーパラメータの一つであることが示唆されてきた。(ϕ は非線形項に含まれるパラメータにより決まる。(2)の場合は d がそれであり、 ϕ は d の単調減

少関数、 $\lim_{d \rightarrow l, \varepsilon \downarrow 0} \Phi = 0$ 、 $\lim_{d \rightarrow -l, \varepsilon \downarrow 0} \Phi = \ell/2$ 。)

この小論の目的は上記のパターン選択問題に関して、

- (1) 内部遷移層の位置 Φ にどのように依存して安定な振動形態が変動するのか？
- (2) 安定な振動形態とその周波数に関して何らかの関係があるか？

を厳密に明らかにすることであるが、結果を述べる前に議論の方針を示しておこう。滑らかな初期値に対して短時間で形成された内部遷移層のダイナミクスは、 $\varepsilon \downarrow 0$ の極限において、(1)から導かれる特異極限方程式と呼ばれる一種の自由境界問題で記述される。(1)は半線形放物型方程式系であるので、遷移層定常解の安定性はその周りでの線形化固有値問題のスペクトルの実部によって決る。我々はこの固有値問題を、 $\varepsilon \downarrow 0$ の極限(特異極限固有値問題)で調べ、そこから $\varepsilon > 0$ でも成立する性質を引き出すという手法を用いるが、実は、その特異極限固有値問題は特異極限方程式の形式的な線形化固有値問題と一致する。

結果 (1a) Φ が零に近づく時(2つの遷移層が別々の境界に近づく時)、in-phase ブリーザとout-of-phase ブリーザの間での安定性の交換が、特異極限方程式においては無限回、反応拡散系においても $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば任意の有限回数起こる。(1b) $\Phi = \ell/2$ の近傍では(2つの遷移層が近づいた時)、特異極限方程式においても反応拡散系においても、out-of-phase ブリーザが安定である。(2) 安定なブリーザの振動数は、不安定なブリーザの振動数より高い場合も低い場合もある。

この結果は(1)には Φ の位置に依存しない特定の安定な振動形態がないこと、とりわけ $\Phi = 0$ の近傍では、安定な振動形態が Φ に敏感に依存することを示している。

内部遷移層の振動は τ を小さくした時にHopf分岐により発生するが、それでは、 τ をその臨界値よりずっと小さくしたらどうなるだろうか？1-ブリーザに関しては、我々の数値計算では、振動形態の複雑化に結び付く2次分岐などは観測されていない。一方、2-ブリーザ(in-phase)では、 τ を小さくしてゆくと周期倍分岐・対称破壊分岐を経て、極めて複雑な振動形態が出現する。このことと複雑な挙動をする解を与えるパラメータがその周りにあるという2重Hopf分岐点を(1)が数多く持っていることの関連、上記の結果の物理的解釈などについては、今後の研究を待たなければならない。

参考文献 [1] T. Ikeda and Y. Nishiura, in preparation. [2] Y. Nishiura and Y. Mimura, SIAM J. Appl. Math. Vol. 49, No. 2 (1989), pp. 481-514.

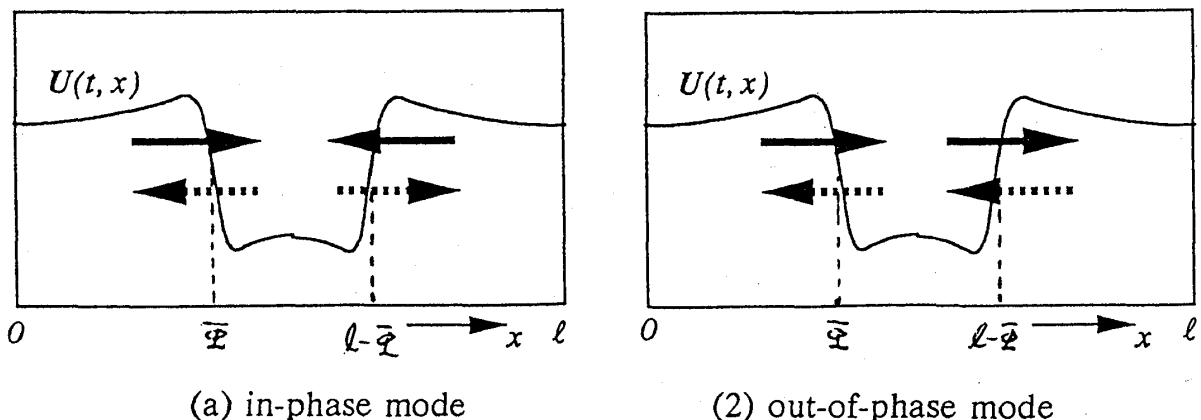


図1 2-内部遷移層の振動パターン