

Martin 境界の拡散方程式への応用

東大理 伊藤 清三

§0. 序. R を C^∞ -manifold とし, そこで与えられた Riemannian metric tensor $\|a_{ij}(x)\|$ と vector $\mathbf{b} = \|b_i(x)\|$ (いずれも C^2 級) で定義される拡散作用素 A :

$$Au = \operatorname{div} \nabla u + \mathbf{b} \cdot \nabla u$$

$$\equiv \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \sqrt{a(x)} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

を考え. R の上の実数値有界連続関数の全体 $C(R)$ は, ノルム $\|u\| = \sup_{x \in R} |u(x)|$ によって Banach 空間となる.

R における拡散方程式

$$\partial u / \partial t = Au$$

の最小基本解 (§1) を $U(t, x, y)$ とすると,

$$(U_t f)(x) = \int_R U(t, x, y) f(y) dy \quad (t > 0),$$

$$f \in C(R), \quad dy = \sqrt{a(y)} dy^1 \dots dy^m \quad (m = \dim R),$$

によって定義される $\{U_t\}_{t>0}$ は, $C(R)$ における作用素の半群になるが, $\lim_{t \downarrow 0} U_t = I$ は $C(R)$ では一般に成立しない.

本稿では、 $\{U_t\}$ をそれが (C_0) 級 ($s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} U_t = I$ となること) になるような部分空間に制限したものを $\{U_t^\circ\}$ とし、 $\{U_t^\circ\}$ の拡張であるような (C_0) 級正值縮小半群 $\{T_t\}$ で、拡散方程式の解を与えるもの、すなわち生成作用素が R の内部で局所的には拡散作用素 A で表わされるもの、を求めることを試みる。この問題の正確な記述は §1 で与える。

筆者は [5] において、この問題について一応の報告をしたが、そこで仮定した条件 ([5] の (2.6)) は最も自然な仮定ではなかった。その仮定のために、本稿 §4 以後で現われた集合 (H) が空である場合になっている。本稿 §1 において述べる仮定 (1.7) は、この問題を考えるかぎり必然的といえるものである (補題 1.3)。本稿では、集合 (H) が現われる事情に関連して、[5] では関係のなかった若干の技巧を必要とする。

本稿の内容は、上記の (H) に関係しない準備の部分では [5] と重複するところも多く、また結果の記述も ((H) は結果に貢献しないことが証明されることの集合であるので) [5] と本質的に同じである。しかし、[5] の circulation は他の引用文献に比べてやや劣ると思われるので、本稿では [5] と重複する説明や証明も、紙数の許すかぎり書くことにする。

(なお、[5] の記述に誤りがあったので、本稿 §7 でそれを訂正する。)

§1. 問題の記述. 今後, $C(R)$ の部分空間 D の $C(R)$ における強閉包を $\overline{D}$ と書く. また, $C(R)$ における線形作用素 L の値域, 零空間をそれぞれ $\mathcal{R}(L)$, $\mathcal{N}(L)$ と書く.

まず, R における拡散方程式

$$(1.1) \quad \partial u / \partial t = Au$$

の最小基本解を構成する手順を述べておく. R のコンパクト部分領域 D で *Dirichlet* 型境界条件を与えたときの基本解 $U^D(t, x, y)$ は非負値であり, 各点で D とともに単調増加で, $\int_D U^D(t, x, y) dy \leq 1$ だから, $\lim_{D \uparrow R} U^D(t, x, y) = U(t, x, y)$ が存在し, $U(t, x, y)$ も非負値であって

$$(1.2) \quad \int_R U(t, x, y) dy \leq 1$$

となる. 任意の $f \in C(R)$ に対して, 函数

$$(1.3) \quad u(t, x) = (U_t f)(x) = \int_R U(t, x, y) f(y) dy \quad (t > 0)$$

は拡散方程式 (1.1) と初期条件

$$(1.4) \quad \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x) \quad (\text{有界かつ広義一様収束})$$

を満たし, (1.3) で定義される $\{U_t\}_{t>0}$ は, $C(R)$ における作用素の正值縮小半群となる (以上については [3] 参照).

特に, 非負値函数 $f \in C(R)$ に対しては, (1.1) と (1.4) とを満たす任意の非負値の解 $u(t, \cdot) \in C(R)$ は, (1.3) で与えられた解より小さくないことが示される. だから上記の基本解 $U(t, x, y)$ を 最小基本解 と呼ぶ.

次に、半群 $\{U_t\}$ のレゾルベントについて述べる。任意の $\lambda > 0$ に対して

$$(1.5) \quad G_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t, x, y) dt$$

を核とする積分作用素 G_λ (レゾルベント) は、 $C(R)$ において $\|G_\lambda\| \leq 1/\lambda$ なる有界作用素である。さらに、 $\{U_t\}$ の半群的性質から、いわゆるレゾルベント方程式

$$(1.6) \quad G_{\lambda_1} - G_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} = 0$$

が導かれる。この関係式により、

補題 1.1. i) 任意の λ_1, λ_2 に対して $G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} = G_{\lambda_2} G_{\lambda_1}$.

ii) $R(G_\lambda), \mathcal{N}(I - \lambda G_\lambda)$ は λ に無関係である。

よって、 $\mathbf{G} = \overline{R(G_\lambda)}$ (λ に無関係) とおくと、 $\{U_t\}$ の半群性を使って、次のことが示される：

補題 1.2. $\lim_{t \downarrow 0} \|U_t f - f\| = 0$ と $f \in \mathbf{G}$ とは同等である。

そこで、 $\{U_t\}$ の $\mathbf{G}$ への制限を $\{U_t^\circ\}$ とする。このとき、我々の 問題 は次のように述べられる。

$C(R) \supseteq E \supseteq \mathbf{G}$ なる閉部分空間 E と、 E における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ で、次の i), ii) を満たすものを求める；ただし E はなるべく広くともとする：

i) 任意の $f \in \mathbf{G}$ に対して $T_t f = U_t^\circ f (= U_t f)$,

ii) 任意の $f \in E$ に対して $u(t) = T_t f$ が $du/dt = Au$ (左辺は強微分, 右辺は超函数的微分) を満たす。

さて, 基本解 $U(t, x, y)$ は非負値であって (1.2) を満たすが, 特に (1.2) でつねに等号が成立すると次のことが言える:

補題 1.3. $\int_R U(t, x, y) dy \equiv 1$ ($t > 0$, $x \in R$ について恒等的に) が成立するならば, 前述のような E , $\{T_t\}$ の存在を仮定しても, $E = G$, $T_t = U_t^\circ$ (すべての $t > 0$ に対して) となる.

証明. 恒等的に 1 なる函数を 1 と書く. $0 \leq f \leq 1$ なる任意の $f \in E$ に対して, $U(t, x, y)$ が '最小' 基本解だから,

$$0 \leq U_t f \leq T_t f \leq 1, \quad 0 \leq U_t(1-f) \leq T_t(1-f) \leq 1$$

となるが, この補題の仮定は $U_t 1 = 1$ を意味するから,

$$1 = U_t f + U_t(1-f) \leq T_t f + T_t(1-f) = T_t 1 \leq 1$$

となる. 以上により任意の $f \in E$ に対して $U_t f = T_t f$, 従って $s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} U_t f = f$ となり $f \in G$ となるから, $E = G$, $T_t = U_t^\circ$ が得られる.

この補題により, 本稿の問題は次の条件のもとに考えればよいから, 以下本稿全体を通して次のことを仮定する:

$$(1.7) \quad \int_R U(t, x, y) dy < 1 \text{ となる } t > 0, x \in R \text{ が存在する.}$$

このとき, 基本解の性質を使って,

$$(1.8) \quad \text{すべての } t > 0, x \in R \text{ に対して } \int_R U(t, x, y) dy < 1 \text{ となることが示される.}$$

§2. Green 函数. 今後, '調和', '優調和' は作用素 A についての意味とする. ~~まず~~

補題 2.1. $u \in C(R)$ が正值優調和ならば, 函数 $u(t, x) = \int_R U(t, x, y) u(y) dy$ は, x について正值優調和であり, t について単調減少である; 従って $0 \leq \lambda G_\lambda u \leq u$ となる.

この補題で特に $u \equiv 1$ に対する $u(t, x)$ は, 非定数正值優調和函数であることが, (1.8) を使って示されるので,

$$(2.1) \quad G(x, y) = \int_0^\infty U(t, x, y) dt, \quad x \neq y \quad (\text{Green 函数})$$

が存在する [3]. $G(x, y)$ を核とする積分作用素 G を

$$\mathcal{D}(G) = \left\{ u \in C(R) \mid (Gu^\pm)(x) = \int_R G(x, y) u^\pm(y) dy \in C(R) \right\}$$

において考える. このとき, 任意の $u \in \mathcal{D}(G)$ に対して

$$(2.2) \quad \lambda G_\lambda G u = \lambda G G_\lambda u = G u - G_\lambda u$$

が示される ((1.6) で $\lambda_2 \downarrow 0$ とした形である). 従って

$$(2.3) \quad R(G) \subset G.$$

補題 2.2. i) 任意の $u \in C(R)$ に対して $(\lambda - A)G_\lambda u = u$.

ii) 任意の $w \in \mathcal{D}(G)$ に対して $-AGw = w$.

ここで, 恒等的に 1 なる函数を 1 と書くことにして,

$$(2.4) \quad \chi_\lambda = 1 - \lambda G_\lambda 1 \quad (\lambda > 0)$$

とおく. このとき, 補題 2.2, (1.8), (1.6) を使って,

補題 2.3. i) R 上で $0 < \chi_\lambda < 1$, $(\lambda - A)\chi_\lambda = 0$;

ii) $\chi_\lambda \in \mathcal{D}(G)$, $G\chi_\lambda \leq G_\lambda 1$.

任意の $\lambda > 0$ に対して, 次の写像 $\Phi_\lambda, \Psi_\lambda$ を定義する:

$$(2.5) \quad u \in C(R) \text{ に対して } \Phi_\lambda u = u - \lambda G_\lambda u,$$

$$(2.6) \quad w \in \mathcal{D}(G) \text{ に対して } \Psi_\lambda w = w + \lambda G w.$$

補題 2.4. $w \in \mathcal{D}(G)$ ならば $\Psi_\lambda \Phi_\lambda w = \Phi_\lambda \Psi_\lambda w = w$.

証明は, (2.2) を使って計算すればよい.

補題 2.5. $u \in C(R), Au = 0$ ならば, $w = \Phi_\lambda u$ とおくと,

$$i) (\lambda - A)w = 0, \quad ii) |w| \leq \|u\| \chi_\lambda, \text{ 従って } w \in \mathcal{D}(G);$$

$$iii) \text{ 特に } u \geq 0 \text{ ならば } w \geq 0.$$

証明の方針. i) は補題 2.2 の i) による. ii) は補題 2.1 と補題 2.3 の ii) からわかる. iii) は補題 2.1 による.

補題 2.6. $(\lambda - A)w = 0$ なる条件のもとでは, $w \in \mathcal{D}(G)$ なることと, 任意の $\lambda > 0$ に対して R 上で $|w| \leq M \chi_\lambda$ となるような定数 $M = M_{\lambda, w}$ が存在することとは, 同等である. そのとき $v = \Psi_\lambda w$ とおくと

$$i) \|v\| \leq M, \quad Av = 0, \quad ii) G_\lambda v = Gw \in \mathcal{R}(G);$$

$$iii) \text{ 特に } w \geq 0 \text{ ならば } v \geq 0.$$

証明. $w \in \mathcal{D}(G)$ ならば, $v = \Psi_\lambda w$ とおくと, 補題 2.4 により $w = \Phi_\lambda v$, 補題 2.2 により $Av = 0$; 従って補題 2.5 により $|w| \leq \|v\| \chi_\lambda$ だから, $M = \|v\|$ とすればよい. 逆に, 補題 2.3 の ii) による. この証明から, 後半の i) も言えている. ii) は (2.2) による. iii) は Ψ_λ の定義から明らか.

§3. $\{U_t^0\}$ を拡張するための予備的考察. ここでは, §1

に述べたような E , $\{T_t\}$ が得られたとして考える. まず,

$$(3.1) \quad J_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt \quad (\{T_t\} \text{ のレゾルベント})$$

と定義すると, 吉田-Hille の理論 [7] により,

補題 3.1. $\{J_\lambda\}$ は E において次の性質をもつ:

$$(J.0) \quad (\lambda - \tilde{A}) J_\lambda = I \quad (\tilde{A} \text{ は半群 } \{T_t\} \text{ の生成作用素});$$

$$(J.1) \quad J_{\lambda_1} - J_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) J_{\lambda_1} J_{\lambda_2} = 0;$$

$$(J.2) \quad J_\lambda \geq 0, \quad \|\lambda J_\lambda\| \leq 1, \quad \mathcal{N}(J_\lambda) = \{0\};$$

$$(J.3) \quad \text{任意の } f \in E \text{ に対して } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda J_\lambda f - f\| = 0.$$

逆に $\{J_\lambda\}$ が E において (J.1-3) を満たせば, $\tilde{A} = \lambda - J_\lambda^{-1}$ は λ に無関係で, E においてある (C_0) 級正值縮小半群 $\{T_t\}$ の生成作用素となり, (3.1) および (J.0) が成立する.

次に, 任意の $f \in E$ に対し, (J.0) により, 超函数の意味で $(\lambda - A) J_\lambda f = f$ (前 § 参照). 一方 $(\lambda - A) G_\lambda f = f$ (補題 2.2). また $\{U_t\}$ の '最小' 性 (§1) により, $f \geq 0$ ならば $J_\lambda f \geq G_\lambda f$. よって, $w_\lambda = J_\lambda f - G_\lambda f$ とおくと, $(\lambda - A) w_\lambda = 0$ が成立する. 特に $0 \leq f \leq 1$ ならば $0 \leq \lambda w_\lambda \leq \chi_\lambda$ となり, 補題 2.3 の ii) により $w_\lambda \in \mathcal{D}(G)$ となる. だから補題 2.6 と 2.4 とによって $v_\lambda = \psi_\lambda w_\lambda$ が $Av_\lambda = 0$ を満たし, $w_\lambda = \phi_\lambda v_\lambda$ となる. このことは, $0 \leq f \leq 1$ とかぎりず, 任意の $f \in E$ で言えるから,

$$(3.2) \quad J_\lambda f = G_\lambda f + w_\lambda = G_\lambda f + v_\lambda - \lambda G_\lambda v_\lambda.$$

今後、 R の上の有界調和函数の全体を $\mathcal{H}$ と書く。(3.2) において $v_\lambda \in \mathcal{H}$ (前述) であり、吉田-Hille の理論により $E = \overline{\mathcal{R}(J_\lambda)}$ となるべきだから、

補題 3.2. E は、 $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ とで張られるところの、 $C(R)$ の線形閉部分空間である。

さて、任意の $\lambda > 0$ に対して、 E における作用素 H_λ を

$$(3.3) \quad H_\lambda f = \Psi_\lambda(J_\lambda f - G_\lambda f)$$

によって定義する。このとき、上に述べたことから、

補題 3.3. i) H_λ は E から $\mathcal{H}$ への写像で $\|\lambda H_\lambda\| \leq 1$ 。

ii) $f \in \mathcal{G}$ ならば $H_\lambda f = 0$ 。

今 H_λ を使って (3.2) を書きなおすと、

$$(3.4) \quad J_\lambda f = G_\lambda f + H_\lambda f - \lambda G_\lambda H_\lambda f$$

となる。また (3.4) と補題 3.3 の ii) および (1.6) を使って計算すると、次の関係式が得られる：

$$(3.5) \quad \begin{aligned} J_{\lambda_1} - J_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) J_{\lambda_1} J_{\lambda_2} \\ = (I - \lambda_1 G_{\lambda_1}) [H_{\lambda_1} - H_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) H_{\lambda_1} H_{\lambda_2}]. \end{aligned}$$

ここで、 E 、 $\{J_\lambda\}$ の形を決定するためには、補題 3.2 における $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ との関係を見なければならぬ。そのためには $\mathcal{H}$ の構造を調べなければならぬので、次の § では、 $\mathcal{H}$ の表現法の一つであるところの Martin 境界を使って、 $\mathcal{H}$ の構造を ($\mathcal{G}$ との関係において) 調べることにする。

§4. Martin 境界と有界調和函数. Green 函数 $G(x, y)$

の存在 (§2) により, R の A に関する Martin 境界の理論が構成される [4][6]. すなわち, 核函数 $K(x, y)$ と, R の理想境界 $\hat{S}$ を定義し, $\hat{S} = \hat{S}_0 + \hat{S}_1$ と適当な方法で分けると, 任意の正值調和函数 u は $\hat{S}_1$ の上で一意的に定まる測度 μ_u により

$$(4.1) \quad u(x) = \int_{\hat{S}_1} K(x, y) d\mu_u(\xi)$$

と表現される. 今 $u_0 \equiv 1$ に対応する μ_{u_0} を単に μ と書くと,

補題 4.1. 任意の有界正值調和函数 u に対する測度 μ_u は μ に関して絶対連続であり, その密度函数は有界にとれる.

証明は, (4.1) から $\|u\|\mu - \mu_u \geq 0$ となることによる.

この補題により, 任意の $h \in \mathcal{H}$ (正值とはかぎらない) に対して, $\hat{S}_1$ の上の有界可測函数 $\hat{h}$ が μ -a.e. で定まり

$$(4.2) \quad h(x) = \int_{\hat{S}_1} K(x, \xi) \hat{h}(\xi) d\mu(\xi), \quad \|h\| = \text{ess. sup}_{\xi \in \hat{S}_1} |\hat{h}(\xi)|,$$

が成立する. このとき $h = K\hat{h}$, $\hat{h} = K^{-1}h$ と書くと, K は $L^\infty(\hat{S}_1, \mu)$ から $\mathcal{H}$ の上への一対一線形写像である.

次に, $0 \leq u \in \mathcal{H}$ ならば $U_t u$ は t について単調減少 (補題 2.1) だから, 任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} U_t h$ が存在して有界可測, 従って $U_t h_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U_{t+\tau} h = h_\infty$ となるから $h_\infty \in \mathcal{H}$. よって $U_\infty h = \lim_{t \rightarrow \infty} U_t h$ なる U_∞ が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ の中の作用素として定義されて, 任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して

$$(4.3) \quad \|U_\infty h\| \leq \|h\|, \quad U_\infty U_\infty h = U_\infty h.$$

さて, $\mathcal{N}(I - \lambda G_\lambda)$ は λ に無関係 (補題 1.1) であったから, 今後それを単に $\mathcal{N}$ と書く. このとき, 半群の性質から

補題 4.2. $\mathcal{N} = \{h \in \mathcal{H} \mid U_\infty h = h\}$.

従ってまた, $h = u + v \in \mathcal{N}$, $0 \leq u \in \mathcal{H}$, $0 \leq v \in \mathcal{H}$ ならば $h = U_\infty h = U_\infty u + U_\infty v \leq u + v = h$ となるから

補題 4.3. $h \in \mathcal{N}$, $u \in \mathcal{H}$, $\hat{h} \geq \hat{u} \geq 0$ ならば $u \in \mathcal{N}$.

ここで $\theta = U_\infty 1$ と定義すると

補題 4.4. μ -a.e. ξ に対して $\hat{\theta}(\xi)$ は 1 または 0 である.

証明. $0 < \alpha < \beta < 1$ なる任意の α, β をとり, 集合 $(H)_{\alpha\beta} = \{\xi \mid \alpha < \hat{\theta}(\xi) < \beta\}$ の定義函数の, 写像 K (前頁) による像を $h_{\alpha\beta}$ とすると, $0 \leq \hat{h}_{\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha} \hat{\theta}$ だから $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{N}$ (補題 4.3). 従って, $0 \leq (1-\beta)h_{\alpha\beta} + \theta \leq 1$ の各項に U_∞ をほどこすと $0 \leq (1-\beta)h_{\alpha\beta} + \theta \leq \theta$ となるから $h_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\mu((H)_{\alpha\beta}) = 0$ を得る. この結果と $0 \leq \hat{\theta} \leq 1$ により補題 4.4 を得る.

そこで, $(H) = \{\xi \in \hat{S}_1 \mid \hat{\theta}(\xi) = 1\}$ とおくと, 上の三つの補題を使って次のことが示される.

補題 4.5. i) $U_\infty h \equiv 0$ は $\hat{h}(\xi) = 0$ (μ -a.e. $\xi \in (H)$) と同等;

ii) $U_\infty h \equiv h$ は $\hat{h}(\xi) = 0$ (μ -a.e. $\xi \in \hat{S}_1 - (H)$) と同等.

以上により, $H = \{h \in \mathcal{H} \mid U_\infty h \equiv 0\}$ とおくとき,

補題 4.6. $\mathcal{N}, H$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間であり, 空間 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H} = \mathcal{N} + H$ と直和分解されて, $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}$ である.

§5. 空間Eの構造. Martin 境界論[4][6]において,
 任意の正值優調和函数 u と任意のコンパクト集合 $\Gamma \subset \bar{S}$ に対
 して定義された函数 u_Γ を, u が有界正值優調和函数の場合に
 制限して考える. Γ を任意に固定すると, 対応 $u \rightarrow u_\Gamma$ は,
 有界正值優調和函数の差の一樣極限となる函数から調和函数
 への線形写像 $f \rightarrow f_\Gamma$ に, 自然な方法で一意的に拡張され,

$$(5.1) \quad f_\Gamma \in \mathcal{H}, \quad \|f_\Gamma\| \leq \|f\|;$$

$$(5.2) \quad h \in \mathcal{H} \quad \text{ならば} \quad h_\Gamma = h.$$

補題5.1. i) $g \in \overline{\mathcal{R}(G)}$ ならば $g_\Gamma \equiv 0$; ii) $\overline{\mathcal{R}(G)} \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

証明. i) は $g = Gu$, $u \geq 0$, の場合に示せばよいが, この
 場合 $g - g_\Gamma$ が正值優調和だから, これを $G\mu_1 + h_1$ と Riesz 分
 解すれば, g の Riesz 分解の一意性から $g_\Gamma + h_1 = 0$; ここで
 $g_\Gamma, h_1 \geq 0$ だから $g_\Gamma = h_1 = 0$. ii) は i) と (5.2) による.

補題5.2. $(\lambda - A)w = 0$, $w \in \mathcal{D}(G)$ ならば, $v = \psi_\lambda w \in \mathcal{H}$.

証明. 補題2.6により $v \in \mathcal{H}$ かつ $\lambda G_\lambda v = \lambda G w$; 従って
 $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda G_\lambda v = 0$. 一方 $\lambda G_\lambda v = \int_0^\infty e^{-\tau} U_{\tau/\lambda} v d\tau \rightarrow U_\infty v$ ($\lambda \downarrow 0$
 のとき各点 $x \in R^d$). 故に $U_\infty v = 0$, すなわち $v \in \mathcal{H}$.

補題5.3. $u \in \mathcal{H}$ ならば $G_\lambda u \in \mathcal{R}(G)$.

証明. $w = \phi_\lambda u$, $v = \psi_\lambda w$ とおくと, 補題2.5と5.2によ
 り $v \in \mathcal{H}$. 一方 $\phi_\lambda(u - v) = w - \phi_\lambda \psi_\lambda w = 0$ (補題2.4).
 故に $u - v \in \mathcal{H} \cap \mathcal{N}$, 従って $G_\lambda u = G_\lambda v = G w \in \mathcal{R}(G)$.

補題 5.4. $G \cap H = \{0\}$.

証明. $u \in G \cap H$ ならば, $\lambda G_\lambda u \rightarrow u$ ($\lambda \rightarrow \infty$) だから補題 5.3 により $u \in \mathcal{R}(G)$, 従って補題 5.1 により $u = 0$.

補題 5.5. 任意のコンパクト $\Gamma \subset \hat{S}$ に対し $(\lambda G_\lambda 1)_\Gamma = \theta_\Gamma$.

証明. (4.3) により $\theta = \bigcup_{\infty} 1 \in \mathcal{N}$, $1 - \theta \in H$. 補題 5.3 により $G_\lambda(1 - \theta) \in \mathcal{R}(G)$. だから補題 5.1 により $(\lambda G_\lambda 1)_\Gamma = \theta_\Gamma$.

補題 5.6. $f = g + h$, $g \in G$, $h \in H$ ならば

i) $\|f\| \geq \|h\|$; ii) 特に $f \geq 0$ ならば $h \geq 0$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|\lambda G_\lambda g - g\| < \varepsilon$ なる $\lambda > 0$ をとれば, R の上で $|\lambda G_\lambda g + h| \leq \|f\| + \varepsilon$, 従って

$$|h| \leq \|f\| + \varepsilon + \|\lambda G_\lambda g\| \leq \|f\| + \varepsilon + \lambda \|g\| G_\lambda 1.$$

一方, 任意のコンパクト $\Gamma \subset \hat{S}_1 - \textcircled{H}$ に対して $\theta_\Gamma = 0$ (補題 4.5) だから, 補題 5.5 により $\|h_\Gamma\| \leq \|f\| + \varepsilon$. Γ は $\hat{S}_1 - \textcircled{H}$ の中で任意であり, $h \in H$ だから, $\varepsilon \downarrow 0$ として $\|h\| \leq \|f\|$ となる. 特に $f \geq 0$ ならば $h \geq -\varepsilon - |\lambda G_\lambda g| \geq -\varepsilon - \lambda \|g\| G_\lambda 1$ だから, 上と同様の論法で $h \geq 0$ を得る.

さて, 補題 5.4 により, $C(R)$ の部分空間 $E_0 = G + H$ (直和) を考えることができるが, これが閉部分空間であることが, 補題 5.6 を使って示される. だから補題 3.2 と 4.6 とにより $E = E_0$ となる. 以上により,

補題 5.7. E は閉部分空間 G, H の直和である.

§ 6. 空間 H におけるレゾルベント H_λ について. § 3 の H_λ の定義と補題 5.2 により, 補題 3.3 は次のようになる:

補題 6.1. i) H_λ は E から H への写像で $\|\lambda H_\lambda\| \leq 1$.

ii) $g \in G$ ならば $H_\lambda g = 0$.

ここで $\{G_\lambda\}$ の性質を再記する; これらは補題 3.1 で述べた $\{J_\lambda\}$ の性質に対応するが, $\{G_\lambda\}$ は G における半群 $\{U_t^0\}$ のレゾルベントとしてでなく, (1.5) で定義されているので, (G. 3) 以外は $C(R)$ で成立することには注意すべきである:

$$(G. 0) \quad (\lambda - A) G_\lambda = I;$$

$$(G. 1) \quad G_{\lambda_1} - G_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} = 0;$$

$$(G. 2) \quad G_\lambda \geq 0, \quad \|\lambda G_\lambda\| \leq 1, \quad \mathcal{N}(G_\lambda) = \{0\};$$

$$(G. 3) \quad \text{任意の } g \in G \text{ に対して } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda G_\lambda g - g\| = 0.$$

補題 6.2. $\{J_\lambda\}$ が補題 3.1 の (J. 1—3) を満たし, 各 λ に対して $J_\lambda - G_\lambda \geq 0$ ならば, (3.3) で定義される H_λ を H に制限したものは, 次の性質をもつ:

$$(H. 1) \quad H_{\lambda_1} - H_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) H_{\lambda_1} H_{\lambda_2} = 0;$$

$$(H. 2) \quad H_\lambda \geq 0, \quad \|\lambda H_\lambda\| \leq 1, \quad \mathcal{N}(H_\lambda) = \{0\};$$

$$(H. 3) \quad \text{任意の } h \in H \text{ に対して } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda H_\lambda h - h\| = 0.$$

証明の方針. (3.3) で定義される H_λ は (3.5) を満たすから, (J. 1) と補題 4.6 により (H. 1) を得る. (H. 2), (H. 3) も, $\{J_\lambda\}$, $\{G_\lambda\}$ の対応する性質と (3.4) によって示される.

逆に, H における $\{H_\lambda\}$ から E における $\{J_\lambda\}$ を定義するために, 次の補題を準備しておく.

補題 6.3. 空間 H における作用素系 $\{H_\lambda\}$ が (H. 1—3) を満たすとし, $f = g + h \in E$ ($g \in G, h \in H$) に対して, $H_\lambda f = H_\lambda h$ (従って特に $H_\lambda g = 0$) と定義する. このとき, (3.4) で定義される $\{J_\lambda\}$ は (J. 1—3) を満たす.

証明. 以下 f, g, h は上記の通りとする.

(J. 1): この補題の $H_\lambda f$ の定義により, (3.4) で定義される J_λ は (3.5) を満たすから, (H. 1) により (J. 1) を得る.

(J. 2): (G. 2) により $\|G_\lambda f\| \leq \|f\| \cdot G_\lambda 1$ だから χ_λ の定義により $\|\lambda G_\lambda f\| \leq \|f\| \cdot \lambda G_\lambda 1 = \|f\| (1 - \chi_\lambda)$; また補題 2.4 と補題 5.6 の i) により $\|\lambda (I - \lambda G_\lambda) H_\lambda h\| \leq \|\lambda H_\lambda h\| \chi_\lambda \leq \|f\| \chi_\lambda$.
だから $\|\lambda J_\lambda f\| = \|\lambda G_\lambda f + \lambda (I - \lambda G_\lambda) H_\lambda h\| \leq \|f\|$.

特に $f \geq 0$ ならば, 補題 5.6 の ii), (H. 2) および $H_\lambda g = 0$ により $H_\lambda f \geq 0$. だから補題 2.1 により $H_\lambda f - \lambda G_\lambda H_\lambda f \geq 0$.
一方 (G. 2) により $G_\lambda f \geq 0$. だから (3.4) により $J_\lambda f \geq 0$.

また, $J_\lambda f = 0$ とすると, $G_\lambda f - \lambda G_\lambda H_\lambda f + H_\lambda h = 0$ で, 補題 5.4 により $G_\lambda f - \lambda G_\lambda H_\lambda h = H_\lambda h = 0$, 従って (H. 2) により $h = 0$. だから $G_\lambda f = 0$. 従って (G. 2) により $f = 0$.

(J. 3): $\lambda J_\lambda f - f = (\lambda G_\lambda g - g) + (I - \lambda G_\lambda)(\lambda H_\lambda h - h)$
((3.4) より) と (G. 3), (H. 3) により (J. 3) を得る.

§ 7. 半群 $\{T_t\}$ の特徴づけ. Martin 境界 $\hat{S}$ において,
 $\hat{S}_{II} = \hat{S}_I - (H)$ と定義する. この $\hat{S}$ では本稿の主要結果として,
 $\{T_t\}$ を $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$ における半群によって特徴づける.

まず, § 4 で述べた $L^\infty(\hat{S}_I, \mu)$ から H への写像 K は, H の
 定義と補題 4.5 により, $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$ から H への写像を与える.
 K の $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$ への制限を再び K と書くことにする. この K
 は $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$ から H の上への一対一等距離線形写像である.

定理 1. E における (C_0) 級正值縮小半群 $\{T_t\}$ が, G にお
 ける半群 $\{U_t^\circ\}$ の拡張であって, A を局所生成作用素とする
 ならば, (3.3) で定義される $\{H_\lambda\}$ から, $B = \lambda I - H_\lambda^{-1}$ が,
 λ に無関係で $\mathcal{D}(B) = H$ なる作用素として定義せられ, H に
 おける (C_0) 級正值縮小半群 $\{V_t\}$ を生成する. この半群は,
 Martin 境界 $\hat{S}$ の部分集合 $\hat{S}_{II}$ の上の $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$ における一
 つの (C_0) 級正值縮小半群を定める.

証明. $\{T_t\}$ から § 3 で述べたように $\{J_\lambda\}$, $\{H_\lambda\}$ を定義
 すると, $\{H_\lambda\}$ は補題 6.2 により (H.1—3) を満たす. だから,
 補題 3.1 の後半を H における $\{H_\lambda\}$ に適用すると, 定理に述
 べたような作用素 B と, それが生ずる半群 $\{V_t\}$ とが得ら
 れる. ここで $\hat{V}_t = K^{-1} V_t K$ と定義すると, $\{\hat{V}_t\}$ は $L^\infty(\hat{S}_{II}, \mu)$
 における (C_0) 級正值縮小半群である.

逆に $\{\hat{V}_t\}$ を与えて, 対応する半群 $\{T_t\}$ の存在を示そう.

定理 2. $L^\infty(\hat{S}_n, \mu)$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{\hat{V}_t\}$ を与えたと, $V_t = K \hat{V}_t K^{-1}$ は H における正値縮小半群となり, そのレゾルベント系 $\{H_\lambda\}$ から (3.4) により E におけるレゾルベント系 $\{J_\lambda\}$ が得られて, $\tilde{A} = \lambda I - J_\lambda^{-1}$ が, λ に無関係で $\overline{\mathcal{D}(\tilde{A})} = E$ なる作用素として定義され, E における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ を生成する. この半群は $\{U_t^\circ\}$ の拡張であって, $T_t = U_t + \int_0^t (-AU_{t-\tau}) V_\tau d\tau$ と表わされる.

証明. $\{V_t\}$ が H における (C_0) 級正値縮小半群になることは, K の性質から明らか, 従って $\{H_\lambda\}$ が (H. 1—3) を満たし, 補題 6.3 により, (3.4) で定義される $\{J_\lambda\}$ が (J. 1—3) を満たす. 従って補題 3.1 の後半により $\tilde{A} = \lambda I - J_\lambda^{-1}$ が上記のように定義されて, E における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ を生成する. これが $\{U_t^\circ\}$ の拡張であることは, $g \in G$ ならば $V_\tau g = 0$ なることと, $T_t = U_t + \int_0^t (-AU_{t-\tau}) V_\tau d\tau$ (証明下記) による. この T_t の表現式を示すには, 右辺 (T_t° とおく) の Laplace 変換が J_λ になることを言えばよい.

$Q_t = \int_0^t U_{t-\tau} V_\tau d\tau$ とおくと, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} Q_t dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t dt = \lambda G_\lambda H_\lambda$, $\frac{d}{dt} Q_t = V_t + \int_0^t A V_\tau d\tau$ 従って, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t^\circ dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ U_t + V_t - \frac{d}{dt} Q_t \right\} dt = G_\lambda + H_\lambda - \lambda G_\lambda H_\lambda = J_\lambda$ となる (以上の計算は形式的ではあるが実際に正当化される).

次に, $T_t f$ の表現式を, より具体的な形で与える.

定理 3. 前定理の $T_t f$ は次の式で与えられる:

$$(7.1) \quad (T_t f)(x) = \int_R U(t, x, y) f(y) dy \\ + \int_0^t d\tau \int_{\hat{S}_n} W(t-\tau, x, \xi) (\hat{V}_\tau \hat{h})(\xi) d\mu(\xi),$$

ここに $\hat{h}$ は, $f = g + h$ ($g \in G, h \in H$), $\hat{h} = K^{-1}h$ としたもの; $W(t, x, \xi)$ ($t > 0, x \in R, \xi \in \hat{S}_n$) は正の値の函数で,

$$(7.2) \quad \partial W / \partial t = A W \quad (A \text{ は変数 } x \text{ についてほどこす}),$$

$$(7.3) \quad \int_0^t d\tau \int_{\hat{S}} W(\tau, x, \xi) d\mu(\xi) \leq 1 - \int_R U(t, x, y) dy,$$

$$(7.4) \quad W(t+s, x, \xi) = \int_R U(t, x, z) W(s, z, \xi) dz \quad (\mu\text{-a.e. } \xi)$$

を満たす. 従って, $u(t, x) = (T_t f)(x)$ は拡散方程式 (1.1) と初期条件 $\|u(t, \cdot) - f\| \rightarrow 0$ ($t \downarrow 0$) とを満たす.

証明の方針. 前定理の T_t の表現式の最後の項は

$$- \int_0^t d\tau \int_R A_x U(t-\tau, x, y) dy \int_{\hat{S}_n} K(y, \xi) (\hat{V}_\tau \hat{h})(\xi) d\mu(\xi)$$

となる. ここで $W(t, x, \xi) = - \int_R A_x U(t, x, y) K(y, \xi) dy$ とお

けば, 形式的には (7.1) が得られるが, これが実際に意味をもつことと (7.2) - (7.4) を満たすことは, Martin 境界論における論法を使って証明する. $u(t, x)$ が方程式 (1.1) と初期条件 とを満たすことは, 半群の一般論による.

最後に, $L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における半群 $\{\hat{V}_t\}$ について, 若干の注意を述べておく. $(\hat{V}_t \hat{h})(\xi)$ は μ -a.e. ξ に対して $\hat{h}$ について有界線形汎函数となるから, ' μ について絶対連続な有限加法的測度による Radon 積分' で表わされる. しかし, それが可算加法的な拡張をもつとはかぎらないので, 条件付確率法則の場合 (たとえば [1]) のように, すべての ξ に対して意味をもつ形に表わすことはできない. また, $L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における (C_0) 級正值縮小半群 $\{\hat{V}_t\}$ であって, 可算加法性をもった推移確率法則では表わされない例を, R が円板 (m 次元の有界領域で境界の一部が滑らかなる同じ) の内部で, A が普通のラプラスアンの場合に, 具体的に作ることもできる.

だから, [5] において $\{\hat{V}_t\}$ がいつも $\hat{S}$ の上の Markov 過程の推移確率法則で表わされようとしたのは, 誤りであったので, この機会に訂正しておく.

$\{\hat{V}_t\}$ が推移確率法則で与えられることは, $\{T_t\}$ が与えられるための必要条件ではないが, $L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における強連続半群を与えるような推移確率法則 $\hat{V}(t, \xi, d\eta)$ (それは $\hat{S}_{11}$ があるかぎり, いつでも作れる) があれば, それに対して定理 2 が成立し, 定理 3 の (7.1) で $(\hat{V}_t \hat{h})(\xi) = \int_{\hat{S}_{11}} \hat{V}(t, \xi, d\eta) \hat{h}(\eta)$ とした式が成立する. その場合は, [5] の最後に述べたような確率論的解釈が可能である.

文 献 (本文中直接引用したもののみ)

- [1] J. L. Doob: Stochastic processes with an integral-valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 87-150.
- [2] S. Itô: Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Japan. J. Math. **27** (1957), 55-102.
- [3] —: On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 299-306.
- [4] —: Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, *ibid.* 307-334.
- [5] —: Martin 境界と拡散方程式. 日本数学会 第10回定例数論
第9回関数解析 合同シンポジウム講演集録, 1971, 77-90.
- [6] R. S. Martin: Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 137-172.
- [7] K. Yosida: Functional Analysis, Springer, 1965 (3rd ed. 1971).