

Solvability of mixed Monge-Ampère equations and Riemann-Hilbert factorizations

吉野 正史
中央大学 経済学部

Abstract

In this talk we study global solvability of fully nonlinear mixed type Monge-Ampère equations and index formula for a system of ordinary differential equations. Indeed, we will show the global solvability of mixed type Monge-Ampère equations by "blowing up" the problem onto the torus embedded at the singular point of the equations. The reduced operators on the torus are Toeplitz operators. After solving them by the method of harmonic analysis, we construct the solutions by a harmonic extension.

Three main applications are;
solvability of Monge-Ampère equations in (exterior unbounded) domain, extension of Kashiwara-Kawai-Sjöstrand theorem as to the convergence of all formal power series solutions to non-linear equations, index formula of a system of ordinary differential equations.

考える問題

次の Monge-Ampère 方程式を考える。

$$(1) \quad M(u) := \det(u_{x_i x_j}) = f(x), \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

ここで $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (or in C^n) であり、 Ω は必ずしも有界とは限らない。
今 $u^0(x)$ を Ω で滑らかな関数とし

$$f_0(x) = \det(u_{x_i x_j}^0)$$

とおく。この時、 $u^0(x)$ は (1) で $f = f_0$ とした時の解である。そこで、 $z = u_0(x)$ から変形としてえられる曲面を考える。すなわちつぎの問題を考える。

$$(MA) \quad \det(v_{x_i x_j} + u_{x_i x_j}^0) = f_0(x) + g(x) \quad \text{in } \Omega,$$

ここで g は Ω で滑らか、あるいは解析的とする。

例 方程式 (1) に対して、 $x_1 = 0$, $x = (x_1, x')$ に関する初期値問題を考える。

$$M(u) = f, \quad u(0, x') = \phi_0(x'), \quad u_{x_1}(0, x') = \phi_1(x'),$$

ここで ϕ_j は与えられた関数とする。 $u^0 = \phi_0 + x_1\phi_1$ とおいて、 $u = u^0(x) + v(x)$ によってあたらしい未知関数 $v(x)$ を導入する。このように M を u^0 に localize することにより、いわゆる $x_1 = 0$ での Fuchs 型作用素をえる。

一般に 2 次元の場合 $u_0(x) = x_1^4 + cx_1^2x_2^2 + x_2^4$ を考えると c の取り方により localize する曲面の極率が変化し、対応する Monge-Ampère 方程式は $u = u_0$ で degenerate elliptic, degenerate hyperbolic あるいは mixed type, i.e., elliptic-hyperbolic となる。

このような方程式を解くにあたり、基本的なアイデアは内部では方程式の型が変化するのでそれを (Silov) 境界に持ち上げ、"blowing up" し、pseudodifferential operator の real calculus をもちいてといた後それを harmonic extension で内部に拡張する。最大値原理によって解が構成できる。

主なアイデア—常微分方程式の場合

われわれの基本的なアイデアを説明するためつぎの常微分方程式を考える。

$$p(t, \partial_t) := \sum_{k=0}^m a_k(t) \partial_t^k,$$

ここで $a_k(t)$ は $\Omega \subset \mathbb{C}$ で正則な行列とする。等角写像を用いることにより $\Omega = \{|t| < w\}$ ($w > 0$) の場合に議論を帰着できるが、今は簡単の為 $\Omega = \{|t| < w\}$ ($w > 0$) と仮定する。次の写像の Fredholm 性と指数公式の証明を考える。

$$p: \mathcal{O}(\Omega) \mapsto \mathcal{O}(\Omega),$$

(Komatsu, Malgrange, Ramis, Miyake その他の仕事を参照) ここではこの知られた事実の別証明を与えることを考える。

この問題を考えるにあたり、大きな困難は p の $t = 0$ での退化より現れる。そこで Ω で直接働く代わりにその境界 $T = \{|t| = w\}$ で方程式を考える。 Ω での正則関数と T での可積分関数の対応はよく知られた radial limit (Borel theorem) と harmonic extension (=analytic extension) によって与えられる。議論を明確にするため $\mathcal{O}(\Omega)$ より若干小さい空間を導入する。

$L^2(T)$ をトーラス上で 2 乗可積分な関数の全体とし、Hardy 空間 $H^2(T)$ をつぎで定義する。

$$H^2(T) := \{u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta} \in L^2; u_n = 0 \text{ for } n < 0\}.$$

明らかに $H^2(T)$ $L^2(T)$ の閉部分空間である。 π を $L^2(T)$ から $H^2(T)$ への射影とする。すなわち、

$$\pi \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta} \right) = \sum_0^{\infty} u_n e^{in\theta}.$$

以上の設定のもとでは、求める対応は冪級数展開によって与えられる。すなわち

$$\mathcal{O}(\Omega) \ni \sum_0^{\infty} u_n z^n \longleftrightarrow \sum_0^{\infty} u_n e^{in\theta} \in H^2(T).$$

Reduction to the torus. この対応によってトーラス上にあらわれる作用素をもとめる。極座標 $t = re^{i\theta}$ を用いて、

$$t\partial = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \bar{t}\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

ここで $\bar{\partial}$ は Cauchy-Riemann 作用素。 $\bar{\partial}u = 0$ と仮定すると $P(t, \partial)u$ において 動径方向の微分 $r\partial/\partial r$ は接方向の微分でおきかえることができる。すなわち、

$$r \frac{\partial}{\partial r} = -i \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad t\partial = -i \frac{\partial}{\partial \theta} = D_\theta.$$

従って、求める制限はつぎの原理によって与えられる

$$t \frac{\partial}{\partial t} \mapsto D_\theta, \quad t \mapsto e^{i\theta}.$$

よって、トーラス上の作用素は次によって与えられる。

$$\hat{p} = \sum_k a_k(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} D_\theta(D_\theta - 1) \cdots (D_\theta - k + 1),$$

ここで次を用いた。

$$t^k \partial_t^k = t \partial_t (t \partial_t - 1) \cdots (t \partial_t - k + 1).$$

この時 $\pi \hat{p} = \hat{p}$ が成り立つ。

上の対応によって、 $P : H^2(\mathcal{O}) \mapsto H^2(\mathcal{O})$ が Fredholm であるための必要十分条件は $\pi \hat{p} : H^2(\mathbb{T}) \mapsto H^2(\mathbb{T})$ が Fredholm 作用素であることである。ここで $H^2(\mathcal{O})$ は $H^2(\mathbb{T})$ の analytic extension である。特に、 $\pi \hat{p} : H^2 \mapsto H^2$ が Fredholm 作用素であれば $P : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}$ は Fredholm 作用素である。

この議論の有用性を見るために作用素 $\langle D_\theta \rangle$ を次によって定義する。

$$\langle D_\theta \rangle u := \sum_n u_n \langle n \rangle e^{in\theta}, \quad \langle n \rangle = (1 + n^2)^{1/2}.$$

正則関数族上での対応する作用素は次で与えられる。 $\langle t\partial_t \rangle = (1 + (t\partial/\partial t)^2)^{1/2}$, ここで

$$\langle t\partial_t \rangle u = \sum u_n \langle n \rangle z^n.$$

ただちにわかるように

$$D_\theta(D_\theta - 1) \cdots (D_\theta - k + 1) \langle D_\theta \rangle^{-k} = Id + K,$$

ここで K は H^2 上のコンパクト作用素である。従って、コンパクト作用素を法として P は次と等しい。

$$(*) \quad \pi a_m(e^{i\theta}) e^{-im\theta} : H^2 \mapsto H^2.$$

この最後に現れた関数は *regular* であることに注意する。ここであらわれた射影は一般には Szegő projection になる。これより、指数公式を示すことができる。

Riemann-Hilbert 分解の有用性

簡単のため $w = 1$ と仮定し、 $z = e^{i\theta}$ と書く。有理関数 $p(z) := a(z)z^{-m}$ が $|z| = 1$ に関して *Riemann-Hilbert* 分解可能であるとは

$$p(z) = p_-(z)p_+(z),$$

が成立することである。ここで $p_+(z)$ は $|z| < 1$ で正則かつ連続であって、 $|z| \leq 1$ まで 0 にならず、 $p_-(z)$ は $|z| > 1$ で正則、連続であって、 $|z| \geq 1$ で 0 にならない。

われわれの例では $p(z) := a(z)z^{-m}$ であり、条件 $a(0) \neq 0$ と $a(z)$ の零点の位数は $m+n$ であるとして次のようになる。

$$\begin{aligned} p(z) &= c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)(z - \lambda_{m+1}) \cdots (z - \lambda_{m+n})z^{-m} \\ &= c(1 - \frac{\lambda_1}{z}) \cdots (1 - \frac{\lambda_m}{z})(z - \lambda_{m+1}) \cdots (z - \lambda_{m+n}). \end{aligned}$$

従って、*Riemann-Hilbert* 分解可能であるための条件は

$$(RH) \quad |\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_m| < 1 < |\lambda_{m+1}| \leq \cdots \leq |\lambda_{m+n}|.$$

この条件 (RH) のもとで写像 (*) の核と余核は消えることをしめそう。

実際、証明は同じであるので (*) の核を考える。定義により $\pi p u = 0$ は次と同等になる。

$$p(e^{i\theta})u(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta}),$$

ここで g は $e^{i\theta}$ の負べきのみより成る。もし $|\lambda_j| < 1$ ならば級数

$$(1 - \frac{\lambda_j}{e^{i\theta}})^{-1}$$

は非負べきから成る。従って

$$(1 - \frac{\lambda_j}{e^{i\theta}})U(e^{i\theta}) = \text{negative power} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U(e^{i\theta}) &= (1 - \frac{\lambda_j}{e^{i\theta}})^{-1} \times (\text{negative power}) \\ &= (\text{negative power}). \end{aligned}$$

これを繰り返して

$$(z - \lambda_{m+1}) \cdots (z - \lambda_{m+n})u(z), \quad z = e^{i\theta}$$

は負べきのみよりなることがわかる。他方、これは z の多項式であつたので $u = 0$ を得る。

PDE の場合 - 例

Some Examples. $n = 2$ と仮定し、 $x_1 = x$ $x_2 = y$ と置き、Monge-Ampère 方程式を考える。

$$(MA) \quad M(u) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + c(x, y)u_{xy},$$

ここで $c(x, y)$ は x と y の多項式である。 u_0 は次数が 4 の斉次多項式であると仮定する。 $f_0 = M(u^0)$ とおき (MA) を考える。 $P := M'_{u_0}$ を $M(u)$ の $u = u^0$ での線形化とする。

注意 v での M の線形化は次で与えられる。

$$v_{xx}\partial_y^2 + v_{yy}\partial_x^2 - 2v_{xy}\partial_x\partial_y.$$

従って、discriminant は $-M(v)$ に等しい。これより、方程式 (MA) は (weakly) hyperbolic であるための必要十分条件は $M(v) \leq 0$ であることであり、(MA) が elliptic であるための必要十分条件は $M(v) \geq 0$ である。

Example 1.

$$u^0 = x^2y^2, \quad c(x, y) = kxy \quad k \in \mathbb{R}$$

の場合

$$f_0 = M(u^0) = 4(k-3)x^2y^2$$

であり、線形化作用素は

$$P = 2x^2\partial_x^2 + 2y^2\partial_y^2 + (k-8)xy\partial_x\partial_y, \quad \partial_x = \partial/\partial x, \dots$$

である。特性多項式は

$$-2x^2\xi_1^2 - 2y^2\xi_2^2 - (k-8)xy\xi_1\xi_2$$

であるので discriminant は

$$D = (k-4)(k-12)x^2y^2$$

である。これより、(MA) が degenerate hyperbolic $\iff k < 4$ or $k > 12$, 他方 degenerate elliptic $\iff 4 < k < 12$.

後で示すように もし $k > 4$ ならば方程式 (MA) は可解である。

Example 2. 次の方程式を考える。」

$$u^0 = x^4 + kx^2y^2 + y^4, \quad k \in \mathbb{R}, \quad c \equiv 0.$$

この時、

$$f_0 = M(u^0) = 12(2kx^4 + 2ky^4 + (12-k^2)x^2y^2).$$

簡単な計算よりわかるようにもし $k < -6$ ならば $f_0 \leq 0$ であり、degenerate hyperbolic. もし $k > 6$ ならば集合 $\{f_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ は4つの原点で交わる直線より成る。この時、方程式はこの直線を横切る時 elliptic から hyperbolic と型を変える。従って、方程式は混合型である。

この例において もし $k < -6$ あるいは $k > 8$ ならば (MA) は可解である。実際、これは混合型に成る場合を含む。

PDEの場合 - 主なアイデア

Monge-Ampère 方程式に戻る。関数族

$$W_R(D_R) := \{u = \sum_{\eta} u_{\eta} x^{\eta}; \|u\|_R := \sum_{\eta} |u_{\eta}| R^{\eta} < \infty\}$$

を定義する。この時、 $g \in W_R(D_R)$ に対して、(MA) を解く。我々は (MA) をトーラス T^n 上に Cauchy-Riemann 方程式を用いて常微分方程式の場合のように制限する。空間 $W_R(D_R)$ は $W_R(T^n)$ に変換される。ここで $R = (R_1, \dots, R_n)$ 。この時、次を得る。

$$\det \left(z_j^{-1} z_k^{-1} D_j D_k v + u_{x_j x_k}^0(Rz) \right) = f_0 + g,$$

ここで $z_j = R_j e^{i\theta_j}$.
 M を線形化する。

$$M(u^0 + v) = M(u^0) + \pi P v + R(v),$$

ここで $R(v)$ は剰余項である。これより

$$(*) \quad \pi P v + R(v) = g \quad \text{on } W_R(T^n).$$

今 $(\pi P)^{-1}$ が存在したと仮定する。この時、通常の iteration によって $(*)$ を解くことができる。すなわち、もし $\|g\|_{W_R}$ が十分に小さいならば $(*)$ の一意解 v が存在する。

$\hat{v}$ を v の D_R への analytic extension とする。関数

$$M(u^0 + \hat{v}) - f_0 - g$$

は D_R において正則であり、 D_R の Silov 境界上で消える。最大値原理により、

$$M(u^0 + \hat{v}) = f_0 + g \quad \text{in } D_R.$$

すなわち、可解性がわかる。

局所一意性 今 (MA) に対し 2 つの解 w_1, w_2 で $\|w_j\| \leq \varepsilon$ for small ε であるようなものが存在したとする。その時、 T^n への制限により、制限された方程式の一意可解性より T^n 上において $w_1 = w_2$ が成立する。最大値原理により、 D_R において $w_1 = w_2$ が成立する。これは一意性を示している。

可解性と Riemann-Hilbert 分解について

制限する時の公式

制限を計算する時つぎの公式が有用である。

$$\partial_{x_j} \mapsto z_j^{-1} \xi_j, x_j \mapsto z_j, \quad z_j = e^{i\theta_j},$$

ここで ξ_j は θ_j の共役変数である。

Toeplitz symbol の定義

Toeplitz symbol $\sigma(z, \xi)$ をつぎで定義する。

$$\sigma(z, \xi) = (z_1 \cdots z_n)^{-2} \det \left(\xi_j \xi_k + z_j z_k u_{x_j x_k}^0(z) \right) - f_0(z).$$

以下では $n = 2$ と仮定する。制限された作用素の可逆性を示すためつぎの 2 つの条件を仮定する。

$$(A.1) \quad \sigma(z, \xi) \neq 0 \quad \forall z \in T^2, \forall \xi \in \mathbb{R}_+^2, |\xi| = 1.$$

$$(A.2) \quad \text{ind}_1 \sigma = \text{ind}_2 \sigma = 0,$$

ここで

$$\text{ind}_1 \sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} d_{z_1} \log \sigma(\zeta, z_2, \xi).$$

ここで積分は z_2 と ξ に関して集合 $T^2 \times \{|\xi| = 1\}$ のうえで整数値の連続関数であるので連結性より、定数である。

形式級数 f に対して f の order $\text{ord } f$ をそれを構成する単項式の最小の次数とする。すなわち $\partial_x^\alpha f_0(0) \neq 0$ for some $|\alpha| = k$ かつ $\partial_x^\beta f_0(0) = 0$ for all $|\beta| \leq k-1$ をみたすような最小の k とする。

この時、次が成り立つ。

定理 1. $n = 2$ と仮定する。さらに (A.1) と (A.2) を仮定する。この時、 $r > 0$ と整数 $N \geq 2$ で u^0 でできるものが存在して、すべての $g \in W_R$ で $\|g\|_R < r$ $\text{ord } g \geq N$ を満たすものにたいし、方程式 (MA) は $\text{ord } g \geq N$ となるような一意解 w を持つ。

注意 この定理は complete Reinhardt domain においてなりたつ。ただし、その場合には g のノルムは十分に小さく取る必要がある。これについては一般次元への拡張で述べる。

すべての形式解の収束 - A theorem of Kashiwara-Kawai-Sjöstrand

非線型の方程式のあるクラスにたいしてすべての形式解が収束するための十分条件を与えよう。

定理 2. (A.1) と (A.2) を仮定する。その時、原点で収束するような任意の g で $\text{ord } g \geq 2$ となるものにたいし、すべての (MA) の形式解は原点の近傍で収束する。

n 独立変数の場合

今までの結果を $n \geq 2$ の場合に拡張することを考える。 Ω を $\mathbb{C}^n$ での complete Reinhardt domain であって $0 \in \Omega$ とする。 Ω は convex であるとは仮定しない。ここで Ω が complete Reinhardt domain であるとは次の条件が成立することである。

- 1) もし $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ ならば $(a_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n e^{i\theta_n}) \in \Omega$ for all $0 \leq \theta_j \leq 2\pi$ が成立する。
- 2) もし $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ ならば $D_R \subset \Omega$ が成立する。ここで D_R は半径 $R = (|a_1|, \dots, |a_n|)$ の多重円板である。

Ω の実表現を

$$\tilde{\Omega} := \{(|z_1|, \dots, |z_n|) \in \mathbb{R}_+^n; z \in \Omega\}$$

で定義する。

$$P := M_{u_0} = \sum_{\alpha} (\partial M / \partial z_{\alpha})(x, u_0) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha}$$

を $u = u_0$ での $M(u)$ の線形化作用素とする。ここで $m \in \mathbb{N}$ 、関数 $a_{\alpha}(x)$ は Ω の閉包で正則であるとする。対応する Toeplitz symbol $\sigma(z, \xi)$ を

$$\sigma(z, \xi) := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) z^{-\alpha} p_{\alpha}(\xi) \langle \xi \rangle^{-m},$$

で定義する。ここで $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ であり

$$p_{\alpha}(\xi) = \prod_{j=1}^n \xi_j (\xi_j - 1) \cdots (\xi_j - \alpha_j + 1)$$

である。

$$\sigma(z, \xi) = \sigma'(\xi) + \sigma''(z, \xi),$$

$$\sigma'(\xi) = \int_{T^n} \sigma(e^{i\theta}, \xi) d\theta$$

と分解する。

local sectoriality 条件を仮定する。

$$(A.3) \quad \exists c \in \mathbb{C}, |c| = 1, \exists d > 0 \quad \operatorname{Re}(c\sigma'(\xi)) \geq d \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

このとき、次が成り立つ。

定理 3. 任意の領域 $\Omega'' \subset \subset \Omega$ を与える。(A.3) を仮定する。この時、 $d_0 > 0$ が存在して、もし (A.3) での d が $d \geq d_0$ をみたせば方程式 (MA) は 任意の Ω で正則で $\sup_{\Omega} |g(z)| \leq \varepsilon$ となるような g にたいし Ω' において一意解 v を持つ。

注意. *Good operator* と *Condition (H) in Gérard-Tahara*.

Gérard-Tahara [?] は good operator と Condition (H) の概念を導入した。(A.3) をみたす作用素は "good operator" であり、表象 $\sigma'(\xi)$ に対応する作用素がその dominant part である。Condition (H) も成立する。従って、上の定理は "good operator" のひとつの criterion を与えている。

外部領域での解

Monge-Ampère 方程式を $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ で考える。簡単のため、最初に 2 変数の場合に新しい現象を述べ、一般化はその後で述べる。

$$M(u) = f(x)$$

を考える。 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対し、

$$X_j := \{v; v = x_j^{-\alpha_j} \sum_{k=0}^{\infty} v_k x_j^{-k}\}, \quad j = 1, 2.$$

と定義する。次が成立する。

定理 4. $f = 0$ および $\alpha_1 + \alpha_2 \neq -1$ を仮定する。その時、 $M(u) = 0$ の特異解で

$$u = x^{-\alpha} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}_+^2} u_{\eta} x^{-\eta}$$

となるものはすべて X_1 あるいは X_2 に含まれる。

(MA) で変数 $x_j = z_j^{-1}$ ($j = 1, 2$) を用いて

$$(MA)' \quad M(u)$$

$$:= (\delta_1^2 u + \delta_1 u)(\delta_2^2 u + \delta_2 u) - (\delta_1 \delta_2 u)^2 = g(z),$$

$$\delta_j = z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

とあらわせる。ここで $g(z) = (z_1 z_2)^{-2} f(z_1^{-1}, z_2^{-1})$. (MA)' の解でつぎの形と成るものを考える。

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j, \quad u_1 = az_1 + bz_2, ab \neq 0, u_j; \text{homog. deg. } j.$$

すなわち、 u_1 から展開がはじまるようなものを考える。この時、次が成り立つ。

定理 5. $M(v) = 0$ のすべての形式解で上の形のものであって $\text{ord } v \geq 2$ となるものにたいし、一意的な ϕ で $\text{ord } \phi \geq 2$ となるものが存在して、 $u = u_1 + v + \phi =: u_1 + v + Sv$ は (MA)' の解である。すなわち、 v は kernel の様なものである。 $\phi := Sv$ と書く。

逆に y , (MA)' のすべての解 $u = u_1 + w$, $\text{ord } w \geq 2$ にたいし、一意的な解 $v = v(x_1)$ (resp. $v(x_2)$) が存在して、 $M(v) = 0$, $\text{ord } v \geq 2$ $u = u_1 + w = u_1 + v + Sv$ が成立する。すなわち、"kernel" v によって解は parametrize される。

外部領域での Toeplitz 表象

変数変換 $x_j = y_j^{-1}$ をおこなうとある場合には外部領域での問題を有界領域での問題に帰着できる。この変換により、Toeplitz 表象はつぎで与えられる。

$$\sigma(z, \xi) := (z_1 \cdots z_n)^{-1} \det \left(\xi_i \xi_j + z_i z_j u_{x_i x_j}^0(z) \right) - f_0(z),$$

ここで

$$f_0(z) = (z_1 \cdots z_n)^{-1} \det \left(z_i z_j u_{x_i x_j}^0(z) \right).$$

これを用いることにより、外部領域の問題のある問題は有界領域の結果を用いて解くことができる。詳しくは省略する。

References

- [1] Bengel, G. and Gérard, R. Formal and convergent solutions of singular partial differential equations, Manuscripta Math. **38**, 343–373 (1982).
- [2] Boutet de Monvel, L. and Guillemin V. The spectral theory of Toeplitz operators, Annals of Mathematics Studies, **99**, Princeton University Press 1981
- [3] Böttcher, A. and Silbermann, B., Analysis of Toeplitz operators, Springer Verlag Berlin, 1990.
- [4] Gérard, R. and Tahara, H. Singular Nonlinear Partial Differential Equations. Vieweg Verlag, Wiesbaden 1996.
- [5] Kashiwara, M., Kawai, T. and Sjöstrand J. On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge, Ark. für Math. **17**, 83–91 (1979).
- [6] Komatsu, H. Linear ordinary differential equations with Gevrey coefficients, J. Differential Eqs. **45**, 272–306 (1982).

- [7] Malgrange, B. Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires Enseign. Math. **20**, 146–176 (1970).
- [8] Miyake, M. and Yoshino, M. Toeplitz operators and an index theorem for differential operators on Gevrey spaces, Funkcialaj Ekvacioj **38**, 329–342 (1995).
- [9] Miyake, M. and Yoshino, M. Riemann-Hilbert factorization and Fredholm property of differential operators of irregular singular type, Ark. für Math. **33**, 323–341 (1995).
- [10] Ramis, J.P. Théorèmes d’indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires Mem. Amer. Math. Soc. **48**, (1984).