

解析的汎関数の積分表示

岡山大 教養 津野 義道

(Yoshimichi Tsuno)

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の compact set K に対して、 K の近傍で正則な関数の全体を $\mathcal{O}(K)$ とする。 $\mathcal{O}(K)$ には、(DFS) space の位相が入る。 $\mathcal{O}(K)$ 上の連続な線型汎関数全体のなす空間 $\mathcal{O}'(K)$ は Fréchet space になり、その具体的な表現として次の同型定理が知られている。

Silva-Köthe-Grothendieck の双対定理

$$(1) \quad \mathcal{O}'(K) \cong \mathcal{O}(V-K) / \mathcal{O}(V)$$

ただし、 V は K を含む任意の開集合。

さらに、この定理では $\mathcal{O}(K)$ と $\mathcal{O}'(K)$ の具体的な双対公式も与えられている。即ち、 $\forall f(z) \in \mathcal{O}(K)$, $\forall g(z) \in \mathcal{O}(V-K)$ に対して、道 Γ を、 f と g の共通の定義域の中で K を正の向きに 1 周するようにとれば、

$$(2) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} f(z) \varphi(z) dz$$

で与えられる。(註: 積分の前に定数 $(2\pi i)^{-1}$ をつけたり、

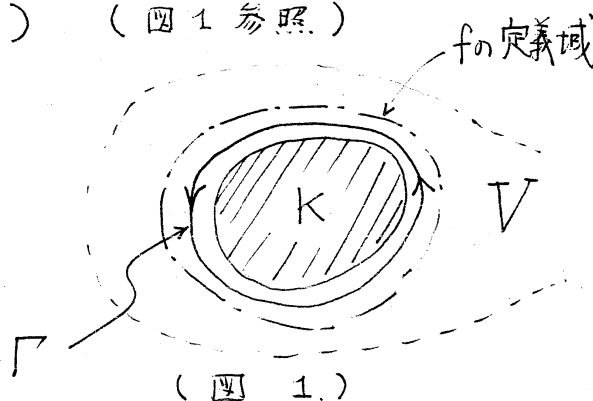
(-1) 倍したりする流儀もある。) (図 1 参照)

この双対定理は、

A. Martineau, R. Harvey

によって、高次元の場合

へ拡張されている。



Martineau - Harvey の双対定理

$\mathbb{C}^n$ 内の compact set K は、条件 $H^p(K, \mathcal{O}) = 0$ ($p \geq 1$) をみたすとする。このとき、次の同型が成り立つ:

$$(3) \quad \mathcal{O}'(K) \cong H^{n-1}(V-K, \mathcal{O})$$

ただし、 V は K を含む任意の正則領域。

A. Martineau, R. Harvey によるこの定理の証明方法は、

Serre の双対定理に基礎を置き、関数解析と cohomology 理論を援用するもので、(2) に相当する具体的な双対公式は得られていない。本稿の目的は、同型定理 (3) を、双対公式 (2) を一般化することによって、直接証明することである。

る。詳細は次の論文を参照して下さい。

Y. Tsuno, Integral representation of an analytic functional
J. Math. Soc. Japan, 34(1982), 379-391.

以下 K は $\mathbb{C}^n$ 内の compact set で次の条件をみたすものとする。

(条件*) K の基本近傍系として、正則領域からなるものがとれるとする。

問題 (条件*) は $H^p(K, \mathcal{O}) = 0$ ($\forall p \geq 1$) と同値になるか? [(条件*) $\Rightarrow H^p(K, \mathcal{O}) = 0$ ($p \geq 1$) は正則領域で方程式が解けることから明らかである。]

主定理 (条件*) をみたす K に対して、双対定理 (3) が成立する。さらに $\mathcal{O}(K)$ と $H^{n-1}(V-K, \mathcal{O})$ の双対公式は次で与えられる。

$\forall f(z) \in \mathcal{O}(K), \quad \forall \varphi(z) : V-K \text{ での } C^\infty, \bar{\partial}\text{-closed}$
 $(0, n-1) \text{ form に対して}$

$$(4) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\partial U} f(z) \varphi(z) \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

ただし、 U は $K \subset\subset U \subset\subset V$ かつ f は $\bar{U}$ で正則と

なるようにとる。

証明の方針は、1次元の場合の双対定理(1)と同じである。
 (1)の証明では、Cauchyの積分核 $(w-z)^{-1}$ が本質的に用いられているが、高次元の場合 正則な積分核をもつ積分公式が近年 E. A. Ramirez, G. M. Henkin によって得られた。それによって、双対公式(4)を基にした同型定理(3)の別証が得られたのである。以下その概略を説明してみたい。

$V-K$ 上の C^∞ , $\bar{\partial}$ -closed な $(0, n-1)$ form の全体を $\mathcal{Z}_{(0, n-1)}(V-K)$ と記す。 $\mathcal{Z}_{(0, n-1)}(V-K)$ の任意の元は双対公式(4)によって、 $\mathcal{O}(K)$ 上の連続な線型汎関数とみなせる。即ち、次の写像 Φ が定まる。

$$\Phi : \mathcal{Z}_{(0, n-1)}(V-K) \longrightarrow \mathcal{O}'(K)$$

空間 $\mathcal{Z}_{(0, n-1)}(V-K)$ には、係数毎の C^∞ 位相が入り、それにより $\mathcal{Z}_{(0, n-1)}(V-K)$ は Fréchet 空間になる。さらに Φ は、連続な線型写像になる。

(I) Φ が onto になること。

先ず、G. M. Henkin, E. A. Ramirez による正則関数の積分表示について述べよう。

Theorem 1 (Henkin, Ramirez) Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界な強擬凸領域で、その境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級であるとする。

このとき、 x に関する $(0, n-1)$ form $\Omega_{\bar{x}}(x, y)$ で次の性質をもつものが構成できる。

- (i) $\forall y \in \Omega$ を固定したとき $\Omega_{\bar{x}}(x, y)$ は x が $\partial\Omega$ の近傍にあるとき C^∞ な $\bar{\partial}_x$ -closed form である。
- (ii) $\forall x \in \partial\Omega$ を固定したとき $\Omega_{\bar{x}}(x, y)$ の各係数は $y \in \Omega$ に関して正則である。
- (iii) $\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して

$$(5) \quad f(y) = \int_{\partial\Omega} f(x) \Omega_{\bar{x}}(x, y) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

for $\forall y \in \Omega$

- (注) (i) で y を Ω の compact set K に制限したとき、 $\Omega_{\bar{x}}(x, y)$ が C^∞ であるような $\partial\Omega$ の近傍は K のみ依存して決まる。

さて、 K 上の任意の解析的汎関数 $T \in \mathcal{O}'(K)$ をとる。 K を含む任意の有界強擬凸領域 Ω ($\partial\Omega$ は C^∞ 級) と、 $\bar{\Omega}$ で正則な任意の関数 $f(z)$ をとると、積分表示 (5) が得られるが、面積分を Riemann 和の極限と考えれば、それは $\mathcal{O}(K)$ の位相で収束している。よって次の等式が成り立つ。

$$\langle T(y), f(y) \rangle = \int_{\partial\Omega} f(x) \langle T(y), \Omega_x(x, y) \rangle \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

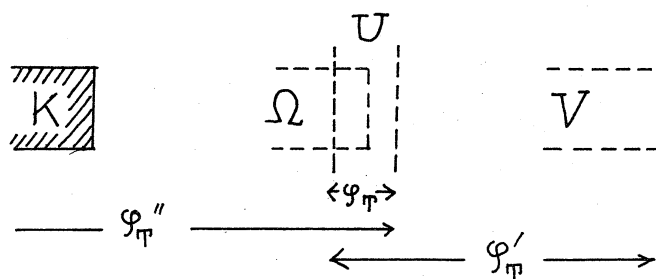
そこで $\mathcal{G}_T(x) = \langle T(y), \Omega_x(x, y) \rangle$ とおけば、 $\mathcal{G}_T(x)$ は $\partial\Omega$ の近傍 U で定義された C^∞ , $\bar{\partial}$ -closed form で、 $\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して

$$(6) \quad \langle T, f \rangle = \int_{\partial\Omega} f(x) \mathcal{G}_T(x) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

が成り立つ。この $\mathcal{G}_T(x)$ を Cousin I 分布の分解に倣って、次の様に分解する。

$$\mathcal{G}_T(x) = \mathcal{G}'_T(x) - \mathcal{G}''_T(x)$$

ただし $\mathcal{G}'_T, \mathcal{G}''_T$ は共に $\bar{\partial}$ -closed で、 $\mathcal{G}'_T$ は $(V-\Omega) \cup U$ で定義され、 $\mathcal{G}''_T$ は $U \cup \Omega$ で定義されている。(図2)



(図 2)

このとき、 $\mathcal{G}''_T$ は $U \cup \Omega$ で $\bar{\partial}$ -closed だから Stokes の定理より、 $\forall f(z) \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ に対して $\langle f, \mathcal{G}''_T \rangle = 0$ となる。

$\mathcal{G}'_T$ を改めて $\mathcal{G}_T$ と書けば、以上の事により、任意の $T \in \mathcal{O}(K)$ に対して (6) が成り立つ様な $\mathcal{G}_T(x)$ が $(V-\Omega) \cup U$ で存在した事になる。そこで Ω を順次取り直して K に近づけて

いくことにより、この φ_π を $V-K$ 全体に接続していく事を考える。その為、正則関数に“直交”する C^∞ form を調べる事が必要になる。次の定理である。

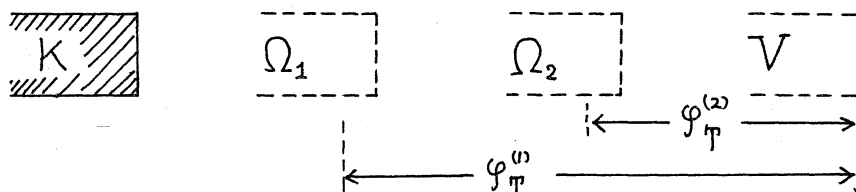
Theorem 2 (S. A. Dautov) Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界な強擬凸領域で、その境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級であるとする。

$\varphi(z)$ は $\partial\Omega$ の近傍で定義された C^∞ , $\bar{\partial}$ -closed $(0, n-1)$ form とする。このとき、次は同値である。

$$(i) \quad \int_{\partial\Omega} f(z) \varphi(z) \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0 \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$$

(ii) $\exists \tilde{\varphi}(z)$; $\bar{\Omega}$ の近傍で定義された C^∞ , $\bar{\partial}$ -closed $(0, n-1)$ form で、 $\partial\Omega$ の近傍では $\varphi(z)$ に一致する。

さて、 $K \subset \Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset V$ となる様な2つの強擬凸領域 Ω_1, Ω_2 をとる。これらの境界は滑らかとする。これらの Ω_i ($i=1, 2$) に対して (6) が成り立つ様な $\varphi_\pi^{(i)}$ が構成された。(図 3)



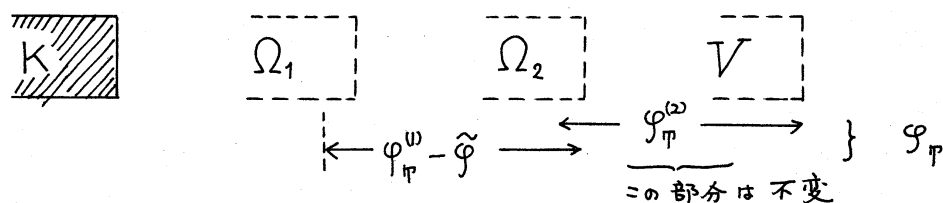
(図 3)

そこで Ω_2 と $\varphi_\pi^{(1)} - \varphi_\pi^{(2)}$ に対して Theorem 2 を適用する。

従って $\bar{\Omega}_2$ の近傍で定義された $C^\infty, \bar{\partial}$ -closed form $\tilde{\varphi}$ が存在して、 $\partial\Omega_2$ の近傍では $\varphi_\pi^{(1)} - \varphi_\pi^{(2)}$ に一致する。そこで新たに φ_π を

$$\varphi_\pi(z) = \begin{cases} \varphi_\pi^{(2)}(z) & \text{for } z \in V - \Omega_2 \\ \varphi_\pi^{(1)}(z) - \tilde{\varphi}(z) & \text{for } z \in (\Omega_2 - \Omega_1) \text{ の } \Omega_2 \text{ 内の近傍} \end{cases}$$

と定義すれば、(図4参照)



(図 4)

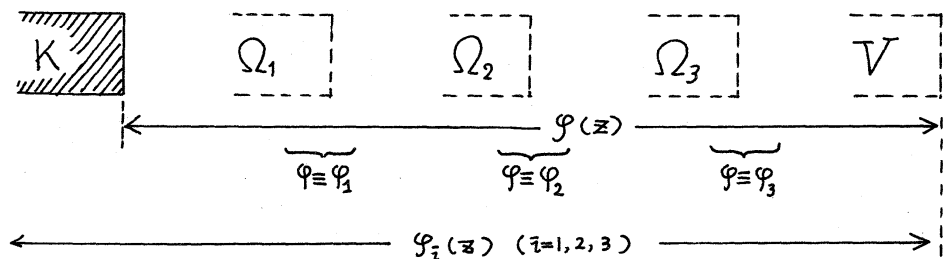
$\varphi_\pi^{(2)}$ は $V - \Omega_2$ での値を変えず、関係式 (6) を保ちつつ $V - \Omega_1$ の V 内の近傍にまで接続されていく事がわかった。主定理の (条件*) より K は強擬凸領域で近似できるから、この接続をくり返し続けていけば、 φ_π は $V - K$ 全体に接続が可能になる。即ち、 $\forall \pi \in \mathcal{G}(K)$ に対して、双対公式 (4) によって π を表現するような $\varphi_\pi(z)$ が $\mathcal{Z}_{(0,n-1)}(V-K)$ の中に存在する。従って、写像 Φ は onto である。

(II) Φ の kernel を決定する事

$\varphi(z) \in \mathcal{Z}_{(0,n-1)}(V-K)$ が $V-K$ で $\bar{\partial}$ -exact form に

なっていれば、Stokes の定理より φ は K 上の解析的汎関数として 0 になる。ここでは、この逆が成り立つ事を示す。

解析的汎関数としては 0 になる様な任意の $\varphi(z) \in \mathcal{Z}_{(0,n-1)}(V - K)$ をとる。さらに $K \subset \Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \Omega_3 \subset \subset V$ となる様な、境界が滑らかな強擬凸領域 Ω_i ($i=1, 2, 3$) をまず考える。ここで、各 Ω_i に Theorem 2 を適用すれば、 V における C^∞ , $\bar{\partial}$ -closed な $(0, n-1)$ form $\varphi_i(z)$ がとれて、 $\varphi_i(z)$ は $\partial\Omega_i$ の近傍で φ に一致するようにできる。(図 5)

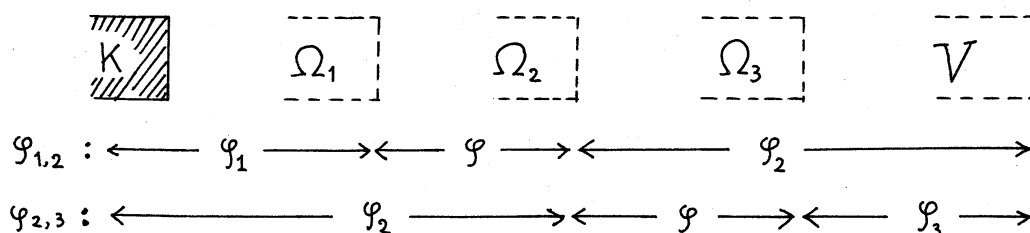


(図 5)

ここで、 $\varphi_{1,2}$ 及び $\varphi_{2,3}$ を次の様に定義する。(図 6)

$$\varphi_{1,2}(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) & \text{for } z \in \Omega_1 \\ \varphi(z) & \text{for } z \in \Omega_2 - \Omega_1 \\ \varphi_2(z) & \text{for } z \in V - \Omega_2 \end{cases}$$

$$\varphi_{2,3}(z) = \begin{cases} \varphi_2(z) & \text{for } z \in \Omega_2 \\ \varphi(z) & \text{for } z \in \Omega_3 - \Omega_2 \\ \varphi_3(z) & \text{for } z \in V - \Omega_3 \end{cases}$$



ここで φ 及び各 φ_i は $\bar{\partial}$ -closed であるから、 $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,3}$ も V で $\bar{\partial}$ -closed になる。 V は正則領域であるから、これは $\bar{\partial}$ -exact form になる。即ち V 上の C^∞ , $(0, n-2)$ form $\psi_{1,2}$, $\psi_{2,3}$ が存在して、

$$\varphi_{1,2}(z) = \bar{\partial}\psi_{1,2}(z), \quad \varphi_{2,3}(z) = \bar{\partial}\psi_{2,3}(z)$$

となる。 $\partial\Omega_2$ の近傍では $\varphi_{1,2} \equiv \varphi \equiv \varphi_{2,3}$ であるから、

$$\bar{\partial}(\psi_{1,2} - \psi_{2,3}) \equiv 0 \quad \text{となる。}$$

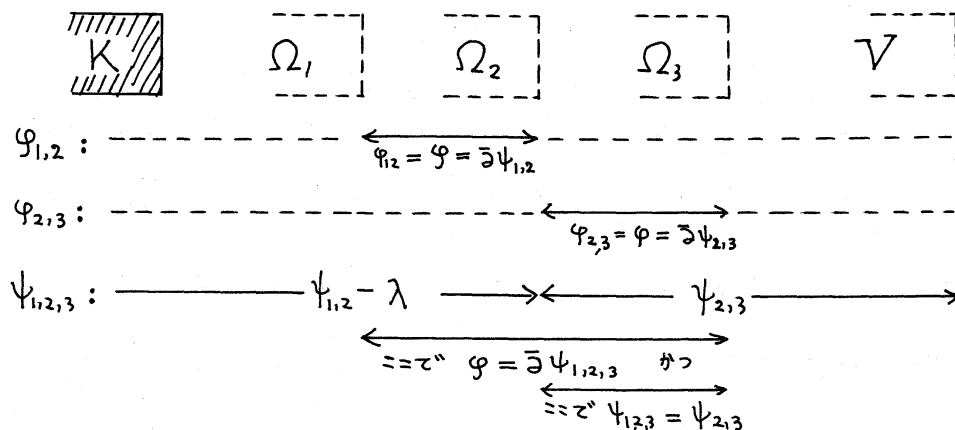
$n=2$ の場合

$\psi_{1,2} - \psi_{2,3}$ は $\partial\Omega_2$ の近傍で正則関数になる。従って Hartogs の定理より、 $\bar{\Omega}_2$ で正則な関数 $\lambda(z)$ が存在して、

$$\psi_{1,2}(z) - \psi_{2,3}(z) = \lambda(z) \quad \text{near } \partial\Omega_2$$

とできる。さて、領域 $\Omega_3 - \Omega_2$ に注目すれば、ここでは $\varphi = \varphi_{2,3} = \bar{\partial}\psi_{2,3}$ となっている。今の目的は、 φ を $V-K$ 上の $\bar{\partial}$ -exact form で表わすことであるから、この $\psi_{2,3}$ を $V-K$ に接続して、そこで $\varphi = \bar{\partial}\psi$ となるようにせよう。まず、内部への接続を考える。 $\psi_{1,2,3}(z)$ を次の様に定める。(図7)

$$\psi_{1,2,3}(z) = \begin{cases} \psi_{2,3}(z) & \text{for } z \in V - \Omega_2 \\ \psi_{1,2}(z) - \lambda(z) & \text{for } z \in \Omega_2 \end{cases}$$



(図 7)

$\psi_{1,2,3}(z)$ の決め方より、 $\Omega_3 - \Omega_1$ では $\varphi = \bar{\partial}\psi_{1,2,3}$ が成り立ち、しかも、 $\psi_{1,2,3}(z)$ は $\Omega_3 - \Omega_2$ では $\psi_{2,3}(z)$ に一致している。即ち $\psi_{2,3}(z)$ は $\Omega_3 - \Omega_2$ での値を変えることなく、方程式 $\varphi = \bar{\partial}\psi$ をみたしつつ $\Omega_3 - \Omega_1$ にまで接続が可能になった。この操作を順次くり返していけば、(条件*)より、 $\psi_{2,3}(z)$ は $\Omega_3 - K$ にまで接続される。又逆に V の方への接続も同様である。従って次が得られた。(n=2)

$$(7) \quad \text{Ker } \Phi = \{ \bar{\partial}\psi(z) \mid \psi \in C^\infty(V - K) \}$$

$n \geq 3$ の場合

この場合、Hartogs の定理に代わるものとして、ある正則領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ の近傍で $\bar{\partial}$ -closed になる微分形式を

調べる必要がある。 次の定理がある。

Theorem 3 (G. Scheja, A. Friedman, M. Morimoto)

X を $\mathbb{C}^n$ 内の正則領域とし、 K を X 内の正則凸な compact set とすれば、 次が成り立つ。

$$H^p(X-K, \mathcal{O}) = 0 \quad p=1, 2, \dots, n-2.$$

さて、この定理を Ω_2 の近くで用いれば、 $\partial\Omega_2$ の近傍で

$$\bar{\partial}(\psi_{1,2} - \psi_{2,3}) = 0$$

となることより、 $\partial\Omega_2$ の近傍で ある $(0, n-3)$ form α が存在して、そこで $\psi_{1,2} - \psi_{2,3} = \bar{\partial}\alpha$ とできる。 α は適当に修正して V 全体で定義されているものとしてよい。

このとき、 $n=2$ の場合の $\lambda(z)$ をこの $\bar{\partial}\alpha$ におきかえて同様の手続きを行えば、 $\Omega_3 - \Omega_2$ での $\varphi = \bar{\partial}\psi$ の解 $\psi_{2,3}$ を $V-K$ にまで接続ができる。従って次が得られた。 ($n \geq 3$)

$$(8) \quad \text{Ker } \Phi = \left\{ \bar{\partial}\psi(z) \mid \begin{array}{l} \psi \text{ は } V-K \text{ 上の } C^\infty(0, n-2) \\ \text{form} \end{array} \right\}$$

これで (II) を終る。

(I), (II) より 代数的に同型定理 (3) が成り立つことが

わかったが、 $\mathcal{O}'(K)$, $H^{n-1}(V-K, \mathcal{O})$ は共に Fréchet 空間であり、 Φ は連続な線型写像であるから、Open mapping theorem により、同型定理 (3) は位相的にも成り立っていることがわかる。

< 終 >