

# ベキ級数による非線形微分方程式の数値計算

早大 理工 室谷義昭

1. つぎの Thermal ignition problem を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + Q \rho A \exp(-E/(RT)) = 0 & \text{in } V, \\ T = T_a & \text{on } S. \end{cases}$$

この方程式は

$$(2) \quad \theta = (E/(RT_a^2))(T - T_a), \quad \varepsilon = RT_a/E$$

とおくと

$$(3) \quad \exp(-E/(RT)) = \exp(-E/(RT_a)) \exp(\theta/(1+\varepsilon\theta))$$

という関係よりつぎの形に変形される:

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta \theta + \lambda \exp(\theta/(1+\varepsilon\theta)) = 0 & \text{in } V, \\ \theta = 0 & \text{on } S. \end{cases}$$

さらに, 対称性等を加味すると

$$(5) \quad \begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r} u' = \lambda \exp(u/(1+\varepsilon u)), & 0 < r < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

を得る。ただし,  $n$  は  $V$  の属する次元数,  $\lambda$  は正定数。

$u(r)$  は  $r=0$  で最大となるので,  $u(0)=s$  とすると  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  と  $s$  の間に関係式が考えられる。  $\varepsilon$  を固定したとき,  $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$   <sup>$\frac{d\lambda}{ds} \neq 0$</sup>  となる critical parameter  $\varepsilon_0$ ,  $\lambda_0$  と  $s_0$  を求める問題が近年注目されている。気体のはいっている容器の表面の絶対温度が 0 に相当する  $\varepsilon=0$  の場合には, 十分大きい  $\lambda > 0$  に対しては解が存在しないのに,  $\varepsilon > 0$  の場合にはどんな  $\lambda$  に対しても解が存在し, 上の  $\varepsilon_0$  に対しては  $\lambda$  が  $\lambda_0$  に近づくとき容器内の気体の最高温度  $s$  が急激に上昇するという意味でもこの  $\varepsilon_0$  を決定する問題はいわゆる "Thermal ignition problem" として興味を引き付けている。たとえば, 1977 年, Fradkin and Wake <sup>[1]</sup> は  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$  とする十分小さい  $\varepsilon$  に対してのみ  $\frac{d\lambda}{ds} = 0$  かつ  $\frac{d^2\lambda}{ds^2} \neq 0$  とする turning point (limit point という)  $(\lambda, s)$  が存在し, この点は  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき単調に  $\varepsilon=0$  のときの turning point に収束することを示し, Boddington, Gray and Wake <sup>[2]</sup> は  $\varepsilon_0 \leq 0.25$  を, また, Wills, Back and Purdon <sup>[3]</sup> は  $\varepsilon_0 \approx 0.2$  を示した。ついで, 1978 年, Bazley and Wake <sup>[4]</sup> は問題 (5) の代りに, 方程式の右辺を  $\lambda \exp(u/(1+\varepsilon s))$  とおき直したモデルで  $n=1, 2$  の場合は解析的に求めた,  $n=1$  のとき  $\varepsilon_0 \approx 0.2138$ ,  $n=2$  のとき  $\varepsilon_0 \approx 0.17323$  を得て, (5) の問題への接近を試みた。1980 年, J. Sprekels <sup>[5]</sup> は  $n=3$  のとき,  $\varepsilon_0 \geq 0.237$  とする  $\varepsilon$  を 4000 以下の subinterval

等を使って示し,  $\varepsilon = 0.237$  のとき  $s \neq \lambda, \lambda \neq s$  を得たが,  $\varepsilon = 0.238$  のとき round-off error のため正確には失敗したが,  $\varepsilon = 0.240$  のとき turning point が生じることを数値的に観察して  $0.238 < \varepsilon_0 < 0.240$  を予測している。

今回べき級数による方法で計算を実行したところ高精度の数値を得ることができた。この方法について述べる。

2. まず, つぎの問題を考える:

$$(6) \quad \begin{cases} F(\lambda, s) = 0, \text{ ただし, } F(\lambda, s) \text{ は必要に応じて滑らか} \\ \text{であり, } F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \text{ の意味とするとき, } F_\lambda(\lambda, s) \neq 0 \text{ とする.} \end{cases}$$

このとき, 陰関数の存在定理により,  $\lambda = \lambda(s)$  と表わされ,

$$(7) \quad F_\lambda(\lambda, s) \lambda_s + F_s(\lambda, s) = 0$$

であるから,

$$(8) \quad \lambda_s = 0 \iff F_s(\lambda, s) = 0, \quad \text{ここに, } \lambda = \lambda(s).$$

一方, (7) の両辺を  $s$  で微分すると

$$(9) \quad F_{\lambda\lambda}(\lambda, s) \lambda_s^2 + 2F_{\lambda s}(\lambda, s) \lambda_s + F_{\lambda ss}(\lambda, s) \lambda_{ss} + F_{ss}(\lambda, s) = 0$$

であるから,

$$(10) \quad \lambda_s = 0 \text{ とすると } F_{\lambda ss}(\lambda, s) \lambda_{ss} + F_{ss}(\lambda, s) = 0.$$

したがって,

$$(11) \quad \lambda_s = 0 \text{ のとき, } \lambda_{ss} \neq 0 \iff F_{ss}(\lambda, s) \neq 0, \quad \frac{F_{ss}}{F_{\lambda ss}} \lambda = \lambda(s).$$

となる。 $\lambda_s = 0$  かつ  $\lambda_{ss} \neq 0$  とある点  $(\lambda, s)$  を求めるには上記の事から反復法が適用可能となる。

つぎに,

$$(12) \quad \begin{cases} F(\lambda, \varepsilon, s) = 0, \text{ 正定値}, F(\lambda, \varepsilon, s) \text{ は必要なら滑り} \\ \text{可微分}, F_{\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0 \text{ とする,} \end{cases}$$

を考へよう。陰関数の存在定理により,  $\lambda = \lambda(\varepsilon, s)$  と表わされ,  $\varepsilon$  を固定したとき,

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda_s = 0 \iff F_s(\lambda, \varepsilon, s) = 0 \\ \lambda_s = 0 \text{ のとき, } \lambda_{ss} = 0 \iff F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s) = 0, \end{cases}$$

を得る。次に, 更に,

$$(14) \quad F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \lambda_{\varepsilon} + F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0, \quad \text{すなわち, } \lambda = \lambda(\varepsilon, s), \\ F_{\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \lambda_{\varepsilon} + F_{\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s) = 0,$$

を仮定すると, 再び陰関数の存在定理により,  $\varepsilon = \varepsilon(s)$  と表わされ,

$$(15) \quad \lambda_s = 0 \text{ のとき, } \{F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \lambda_{\varepsilon} + F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s)\} \varepsilon_s + F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s) = 0,$$

と成るので,

$$(16) \quad \lambda_s = 0 \text{ のとき, } \lambda_{ss} = 0 \iff F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s) = 0 \iff \varepsilon_s = 0, \quad \begin{matrix} \text{正定値}, \\ \lambda = \lambda(\varepsilon, s), \\ \varepsilon = \varepsilon(s), \end{matrix}$$

を得る。更に,

$$(17) \quad \lambda_s = \lambda_{ss} = 0 \text{ のとき, } F_{\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \lambda_{sss} + F_{sss}(\lambda, \varepsilon, s) = 0,$$

で成るか?

$$(18) \quad \lambda_s = \lambda_{ss} = 0 \text{ のとき, } \lambda_{sss} \neq 0 \iff F_{sss}(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0,$$

と成る。  $\lambda_s = \lambda_{ss} = 0$  のとき  $\lambda_{sss} \neq 0$  と成る  $(\lambda, \varepsilon, s)$  を求めるには上記の事から反復法が適用可能と成る。実際,

$F(\lambda, \varepsilon, s) = 0$  と成る  $\lambda = \lambda(\varepsilon, s)$  の計算:

$$(19) \begin{cases} \lambda^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ \lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F_{\lambda}(\lambda^{(m)}, \varepsilon, s)]^{-1} F(\lambda^{(m)}, \varepsilon, s), \quad m=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

とす

$$(20) \quad \lambda^{(m)} \rightarrow \lambda = \lambda(\varepsilon, s) \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

$F_{\varepsilon}(\lambda(\varepsilon, s), \varepsilon, s) = 0$  とする  $\varepsilon = \varepsilon(s)$  の計算:

$$(21) \begin{cases} \varepsilon^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ \varepsilon^{(m+1)} = \varepsilon^{(m)} - \left[ -F_{s\lambda}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s) \cdot \frac{F_{\varepsilon}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s)}{F_{\lambda}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s)} + F_{s\varepsilon}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s) \right]^{-1} \\ \quad \times F_{\varepsilon}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s), \quad m=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

とす

$$(22) \quad \varepsilon^{(m)} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon(s) \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

$F_{ss}(\lambda(\varepsilon(s), s), \varepsilon(s), s) = 0$  とする  $s$  の計算:

$$(23) \begin{cases} s^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ s^{(m+1)} = s^{(m)} - [F_{ss}(\lambda(\varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)})]^{-1} F_{ss}(\lambda(\varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \\ \quad m=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

とす

$$(24) \quad s^{(m)} \rightarrow s \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

[注意] (12) 式の条件  $F_{\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0$  と (14) 式の条件は,

$$(25) \quad F_{\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s) - F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) F_{\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0$$

と置き直し, 直接,  $\lambda = \lambda(s)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(s)$  と考えても同様の議論が成る。

3. つぎに, Thermal ignition problem (5) の critical

parameter  $(\lambda, \varepsilon, s)$  をベキ級数による手法に適用して求めるための若干の準備をしよう。まず, (5) 式を下記のよう変形しておく:

$$(26) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{s} u' = \exp[(s-u)/\{1+\varepsilon(s-u)\}], & 0 < r < \sqrt{\lambda}, \\ u(0) = u'(0) = 0, & u(\sqrt{\lambda}) = s. \end{cases}$$

いま,

$$(27) \quad f(s-u) = \exp[(s-u)/\{1+\varepsilon(s-u)\}], \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(1+\varepsilon s),$$

とおくと,

$$(28) \quad \frac{s-u}{1+\varepsilon(s-u)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)} \frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}u}$$

となるので

$$(29) \quad |u| < \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} = s + \frac{1}{\varepsilon}$$

のとき,

$$(30) \quad \frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}u} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k$$

と収束するベキ級数に展開できるので,

$$(31) \quad \frac{s-u}{1+\varepsilon(s-u)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k = \frac{s}{1+\varepsilon s} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k,$$

となる。一方,

$$(32) \quad \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k = \frac{1+\varepsilon s}{\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\}}$$

より,

$$(33) \quad \tilde{f}(s-u) = \exp[(1+\varepsilon s)/(\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\})]$$

とおくと,  $\tilde{f}(s-u)$  は  $u$  が  $[0, s + \frac{1}{\varepsilon})$  に属するとき収束するベキ級数で表わされ, しかも,

$$(34) \quad |f_n| \leq \tilde{f}_n, \quad z = r, \quad f(s-u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n u^k, \quad \tilde{f}(s-u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_n u^k,$$

が導かれる。よって、

$$(35) \quad u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+2}$$

とある (26) より、

$$(36) \quad r^2 u'' + (n-1) r u' = r^2 f(s-u)$$

となるので、両辺の  $r^{j+2}$  の係数を比較することにより、

$$(37) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2n} f_0, & a_1 = 0, \\ a_j = \frac{1}{(j+2)(j+n)} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} f_k \sum_{l_1+\dots+l_k=j-2k} a_{l_1} \dots a_{l_k}, & j \geq 2, \end{cases}$$

を得る。一方、

$$(38) \quad \begin{cases} \tilde{F}(r, \tilde{u}) \equiv \tilde{u} - |a_0| - r^2 \tilde{f}(s-r^2 \tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}(0) = |a_0| \end{cases}$$

を考えると、

$$(39) \quad \tilde{F}(0, |a_0|) = 0, \quad \tilde{F}_{\tilde{u}}(0, |a_0|) = 1 \neq 0$$

であるので、陰関数の存在定理により (38) は  $r=0$  の近傍で正則な解  $\tilde{u}(r)$  をただ1つ持つ。よって

$$(40) \quad \tilde{u}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k r^k$$

と収束するべき級数に展開し、これを方程式 (38) に代入すると、

$$(41) \quad \begin{cases} \tilde{a}_0 = |a_0|, & \tilde{a}_1 = 0, \\ \tilde{a}_j = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \tilde{f}_k \sum_{l_1+\dots+l_k=j-2k} \tilde{a}_{l_1} \dots \tilde{a}_{l_k}, & j \geq 2, \end{cases}$$

なる関係を得るので、(36)、(37) より、

$$(42) \quad |a_j| \leq \tilde{a}_j, \quad j \geq 0,$$

つまり、ベキ級数 (35) は収束する優級数  $\tilde{u}$  もついで、 $x=0$  の近傍で収束する。(上記証明法は竜高 [6] を参照した。)

もし、 $x=\sqrt{\lambda}$  における  $y$  の和が有限、つまり、

$$(43) \quad u(\sqrt{\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sqrt{\lambda})^{k+2} = s < +\infty$$

とすれば、ベキ級数 (35) は  $[0, \sqrt{\lambda}]$  で収束することになる。

ところで、(26) により  $u(x)$  は偶関数であるので、

$$(44) \quad z = \frac{x^2}{4n}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{4n}$$

と変換すると、 $u(x)$  は  $z$  の関数となる。これを  $\tilde{u}(z)$  とおくと、

$$(45) \quad \tilde{u}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k z^k$$

は  $[0, \tilde{\lambda}]$  で収束する  $z$  のベキ級数となる。

つまり、

$$(46) \quad u(\sqrt{\lambda}) = s \quad \text{と} \quad \lambda = \lambda(s)$$

に対し、

$$(47) \quad \begin{cases} u_s'' + \frac{n-1}{x} u_s' = f_u(s-u)(1-u_s) \\ u_s(0) = u_s'(0) = 0, \quad u_s(\sqrt{\lambda}) = 1 \end{cases}$$

となる解  $u_s(x)$  を考える。ここでは  $u_s(x) = \frac{\partial u}{\partial s}(x)$  とはまず考えない。 $f_u(s-u)$  は  $[0, \sqrt{\lambda}]$  でベキ級数に展開されるので、前と同様の議論より、(47) の解  $u_s(x)$  は  $x=0$  の近傍で収束するベキ級数に展開される。

もし、 $x=\sqrt{\lambda}$  における  $y$  の和が有限、つまり、

$$(48) \quad u_s(\sqrt{\lambda}) = 1$$

とすれば,  $u_s(r)$  は  $[0, \sqrt{\lambda}]$  で収束するベキ級数で表わされ,

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial s} u(r) = u_s(r), \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\lambda}$$

の関係が成り立つ。これから  $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$  は  $[0, \sqrt{\lambda}]$  で収束する  $s$  のベキ級数で表わされる。

以下, 全く同様にして,  $u_{\varepsilon}(r) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u(r)$ ,  $u_{ss} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(r)$ ,  $u_{s\varepsilon}(r) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial \varepsilon} u(r)$ ,  $u_{sss}(r) = \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(r)$  等に対し, 各  $r$  のベキ級数を考えることができる, したがって, 各  $s$  のベキ級数も考えることができる,

[注意] ベキ級数の収束半径が不足している場合には原点を移動してベキ級数を考える。

4. 以上の準備のもとで,

$$(50) \quad F(\bar{\lambda}, \varepsilon, s) \equiv \tilde{u}(\bar{\lambda}) - s = 0,$$

とおくと  $\tilde{u}(\bar{\lambda})$  のベキ級数 (45) の係数  $\{\tilde{u}_n\}$  は  $\bar{\lambda}$  に関係しているので,

$$(51) \quad F_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}'(\bar{\lambda}),$$

とある。一方,  $s \tilde{u}'(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} r u'(r)$  より  $\tilde{u}'(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2\bar{\lambda}} \sqrt{\lambda} u'(\sqrt{\lambda})$  となるが,

(26) より,

$$(52) \quad (\sqrt{\lambda})^{n-1} u'(\sqrt{\lambda}) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} r^{n-1} f(s-u) dr$$

とあるので,

$$(53) \quad u'(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^{n-1}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} r^{n-1} f(s-u) dr > 0$$

からなる。よって,

$$(54) \quad F_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}'(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{2\tilde{\lambda}} \sqrt{\tilde{\lambda}} u'(\sqrt{\tilde{\lambda}}) > 0$$

となる。また, (50) より,

$$(55) \quad \begin{cases} F_s(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}_s(\tilde{\lambda}) - 1, & F_\varepsilon(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}_\varepsilon(\tilde{\lambda}), & F_{s\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}'_s(\tilde{\lambda}), \\ F_{ss}(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}_{ss}(\tilde{\lambda}), & F_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda}), & F_{ss\varepsilon}(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s) = \tilde{u}_{ss\varepsilon}(\tilde{\lambda}). \end{cases}$$

したがって

$$(56) \quad \tilde{u}'(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{u}_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda}) - \tilde{u}'_s(\tilde{\lambda}) \tilde{u}_\varepsilon \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \tilde{u}_{ss\varepsilon}(\tilde{\lambda}) \neq 0$$

のとき,  $\tilde{\lambda}_s = \tilde{\lambda}_{ss} = 0$  かつ  $\tilde{\lambda}_{ss\varepsilon} \neq 0$  となる点  $(\tilde{\lambda}, \varepsilon, s)$  は反復法で計算できる。

5. つぎに, ベキ級数 (44) の係数  $\{\tilde{u}_n\}$  等の計算を導く。まず,

$$(57) \quad z = \frac{r^2}{4n}, \quad \alpha = \frac{1}{4} r u'(r), \quad \beta = \frac{1}{8} r^2 f(s-u)$$

とおくと  $ru'(r)$ ,  $r^2 f(s-u)$  はそれぞれ偶関数であるから,  $\alpha$ ,  $\beta$  は偶関数となるので  $z$  の関数と表わすことができる。しかも  $z$  の関数と表わすことができるので,  $u = u(z)$ ,  $\alpha = \alpha(z)$ ,  $\beta = \beta(z)$  と改めよう。おくと (26) 式より  $z$  の関係を得る。

$$(58) \quad \begin{cases} z\alpha' = \beta - \frac{n-2}{2}\alpha, & \alpha(0) = \beta(0) = 0, \\ z\beta' = \beta - \sigma\beta, & \beta'(0) = \frac{n}{2}f(s), \\ \sigma = \frac{2\alpha}{\{1+\varepsilon(s-u)\}^2}, & (v = \{1+\varepsilon(s-u)\}^2 \text{ とおくと } \sigma v = 2\alpha), \\ zu' = 2\alpha. \end{cases}$$

$z = z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $v$ ,  $u$  は  $z$  のベキ級数

$$(59) \begin{cases} \alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k, & \sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k z^k \\ \beta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k, & \nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k z^k \\ u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k, & \beta_1 = \frac{n}{2} f(s) \end{cases}$$

とおくと (58) より

$$(60) \begin{cases} k\alpha_k = \beta_k - \frac{n-2}{2}\alpha_k, & \beta_1 = \frac{n}{2}f(s), \quad \sum_{l=0}^{k-1} \sigma_{k-l}\nu_l = 2\alpha_k \\ k\beta_k = \beta_k - \sum_{l=1}^{k-1} \sigma_{k-l}\beta_l, & \nu_k = \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{k-1} u_{k-l}u_l - 2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_k, \quad k \geq 2, \\ k u_k = 2\alpha_k, & \nu_0 = (1+\varepsilon s)^2, \quad \nu_1 = -2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_1, \end{cases}$$

となるので、

$$(61) \begin{cases} \alpha_k = \frac{2}{2k+(n-2)}\beta_k, \quad k \geq 1, & \beta_1 = \frac{n}{2}f(s), \\ u_k = \frac{2}{k}\alpha_k = \frac{\varepsilon}{k\{2k+(n-2)\}}\beta_k, \quad k \geq 1, & \beta_k = \frac{-1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{k-l}\sigma_l, \quad k \geq 2, \\ \sigma_k = \frac{1}{\nu_0} \left( 2\alpha_k - \sum_{l=1}^{k-1} \sigma_{k-l}\nu_l \right), \quad k \geq 2, & \sigma_1 = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon s)^2 n} \beta_1, \\ \nu_k = \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{k-1} u_{k-l}u_l - 2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_k, \quad k \geq 2, \\ \nu_0 = (1+\varepsilon s)^2, & \nu_1 = -\frac{\varepsilon}{n} \varepsilon(1+\varepsilon s)\beta_1, \end{cases}$$

を得る。こゝの各係数は  $\varepsilon$  と  $s$  が定まれば漸化式 (61) により簡単に計算できる。また (55) 式に表わす各関数の値は上式の各項毎に微分を行つて得られた漸化式により計算できる。

実際の計算を行う上では細心の注意が要求される。展開係数の計算は適当な尺度変換を用いることにより精度を保つことが可能であり、べき級数の値の計算はこの尺度変換を利用して計算する。たとえば、適当に選んだ  $\alpha$  に対し、

$$(62) \quad \alpha_k = \alpha^{k-1} \tilde{\alpha}_k, \quad \beta_k = \alpha^{k-1} \tilde{\beta}_k, \quad u_k = \alpha^{k-1} \tilde{u}_k, \quad \sigma_k = \alpha^{k-1} \tilde{\sigma}_k, \quad \nu_k = \alpha^{k-1} \tilde{\nu}_k$$

とおく (61) より,

$$(63) \quad \begin{cases} \tilde{\beta}_1 = \frac{n}{2} f(1), & \tilde{\gamma}_1 = \frac{\epsilon}{n(1+\epsilon)^2} \tilde{\beta}_1, & \tilde{\nu}_1 = \frac{8\epsilon(1+\epsilon)}{n(1-\epsilon)} \tilde{\beta}_1, \\ \tilde{\beta}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\beta}_{k-l} \tilde{\gamma}_l, & \tilde{\gamma}_k = \frac{1}{(1+\epsilon)^2} \left\{ \frac{\epsilon}{2k+(n-2)} \tilde{\beta}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\gamma}_{k-l} \tilde{\nu}_l \right\}, \\ \tilde{\nu}_k = 16\epsilon^2 \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\beta}_{k-l} \tilde{\beta}_l / [(k-1)\{2(k-1)+(n-2)\}l\{2l+(n-2)\}] / (1-\epsilon)^2 \\ \quad + 8\epsilon(1+\epsilon) \tilde{\beta}_k / [k\{2k+(n-2)\}(1-\epsilon)] \end{cases}$$

を得る。  $k=-2$  にとると上式の  $\tilde{\beta}_k$  および  $\tilde{\gamma}_k$  の誤差の絶対値は拡大したイタリヤスギに存しているため、(63) 式によりベキ級数の係数が得られ、各偏導関数の係数も (63) より導かれる漸化式により計算できる。

$$(64) \quad |\bar{\lambda} \cdot \epsilon| < 1, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{kn}$$

すなわち、 $\{\tilde{\beta}_k\}$  の係数として得たベキ級数は公比が  $|\bar{\lambda} \cdot \epsilon| < 1$  の等比級数の収束とほぼ同程度と推定される。

6. 計算結果はつぎのようになっている。

|            | $n=1$                | $n=2$                | $n=3$                |
|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\lambda$  | 1.30737 35636 73209  | 3.00630 14788 69473  | 5.04111 24626 05090  |
| $\epsilon$ | 0.24578 04272 323656 | 0.24210 61655 952377 | 0.23899 70901 251162 |
| $\delta$   | 4.89654 78998 74779  | 5.94324 34064 85355  | 7.18494 36495 24520  |

近似多項式の次数  $N$  とその精度の関係はつぎのようになっている:

i)  $n=1$  の場合

|                | $N=20$                 | $N=40$                  | $N=60$                  | $N=80$ |
|----------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--------|
| $\lambda$ の誤差  | $0.619 \times 10^{-9}$ | $0.264 \times 10^{-14}$ | $0.249 \times 10^{-14}$ | 左に同じ   |
| $\epsilon$ の誤差 | $0.124 \times 10^{-9}$ | $0.312 \times 10^{-16}$ | $0.285 \times 10^{-16}$ | 左に同じ   |
| $\delta$ の誤差   | $0.428 \times 10^{-7}$ | $0.256 \times 10^{-14}$ | $0.282 \times 10^{-14}$ | 左に同じ   |

ii)  $n=2$  の場合

|                   | $N=20$                        | $N=40$                         | $N=60$                         | $N=80$                         |
|-------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$ の誤差     | $0.880 \cdots \times 10^{-6}$ | $0.331 \cdots \times 10^{-12}$ | $0.193 \cdots \times 10^{-15}$ | 左に同じ                           |
| $\varepsilon$ の誤差 | $0.681 \cdots \times 10^{-7}$ | $0.238 \cdots \times 10^{-13}$ | $0.112 \cdots \times 10^{-16}$ | 左に同じ                           |
| $S$ の誤差           | $0.284 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.844 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.116 \cdots \times 10^{-14}$ | $0.204 \cdots \times 10^{-15}$ |

iii)  $n=3$  の場合

|                   | $N=20$                        | $N=40$                         | $N=60$                         | $N=80$                         | $N=100$                        |
|-------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$ の誤差     | $0.427 \cdots \times 10^{-3}$ | $0.396 \cdots \times 10^{-8}$  | $0.151 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.420 \cdots \times 10^{-14}$ | $0.374 \cdots \times 10^{-15}$ |
| $\varepsilon$ の誤差 | $0.186 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.438 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.682 \cdots \times 10^{-12}$ | $0.189 \cdots \times 10^{-15}$ | $0.232 \cdots \times 10^{-15}$ |
| $S$ の誤差           | $0.109 \cdots \times 10^{-1}$ | $0.628 \cdots \times 10^{-5}$  | $0.554 \cdots \times 10^{-9}$  | $0.431 \cdots \times 10^{-12}$ | $0.209 \cdots \times 10^{-16}$ |

なお, (64) 式の  $\chi$  について行くと一重のようになる:

|       | $ \chi \cdot \lambda $ の値 |
|-------|---------------------------|
| $n=1$ | $0.65368 \cdots$          |
| $n=2$ | $0.75157 \cdots$          |
| $n=3$ | $0.84018 \cdots$          |

7. その他の数値例 (turning point  $(\lambda, S)$  の計算).

## 例 1. (5), (7).

$$\begin{cases} -u'' = \lambda(1+3u^2) \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

|           | 計算値 ( $N=60$ )       |               | $N=20$                         | $N=40$                         |
|-----------|----------------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$ | $0.6863200257125068$ | $\lambda$ の誤差 | $0.969 \cdots \times 10^{-13}$ | $0.698 \cdots \times 10^{-15}$ |
| $S$       | $0.6999265001214508$ | $S$ の誤差       | $0.144 \cdots \times 10^{-11}$ | $0.255 \cdots \times 10^{-16}$ |

## 例 2. (5), (7).

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

|           | 計算値 ( $N=100$ )     |
|-----------|---------------------|
| $\lambda$ | $3.513830719125161$ |
| $S$       | $1.186842168634389$ |

(5) 式で  $\varepsilon=0$ ,  $n=1$  の場合に相当する. 右に  $\lambda$  の値に気づく.

|               | $N=20$                        | $N=40$                         | $N=60$                         | $N=80$                         |
|---------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$ の誤差 | $0.260 \cdots \times 10^{-5}$ | $0.275 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.592 \cdots \times 10^{-15}$ | $0.207 \cdots \times 10^{-15}$ |
| $S$ の誤差       | $0.205 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.434 \cdots \times 10^{-9}$  | $0.918 \cdots \times 10^{-14}$ | $0.975 \cdots \times 10^{-16}$ |

## 例 3 ([6]).

$$\begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{x} u' = \lambda e^u \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{(5) 式で } \varepsilon = 0 \text{ の場合に相当する。右乗半径の} \\ \text{関係で原点を } z_0 \text{ に移動したベキ級数で計算} \\ \text{する。 } n=3 \text{ のとき turning point は無限にある。} \end{array} \right)$$

i)  $n = 2$  の場合 ( $z_0 = 0.5$ )

|           | 計算値 ( $N=80$ )    |               | $N=20$                        | $N=40$                         | $N=60$                         |
|-----------|-------------------|---------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$ | 2.0               | $\lambda$ の誤差 | $0.677 \cdots \times 10^{-5}$ | $0.125 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.390 \cdots \times 10^{-16}$ |
| $S$       | 1.386294361119891 | $S$ の誤差       | $0.106 \cdots \times 10^{-8}$ | $0.198 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.581 \cdots \times 10^{-16}$ |

ii)  $n = 3$  の場合 ( $z_0 = 11/16$ )  $S$  の最小の turning point を求める:

|           | 計算値 ( $N=180$ )   |               | $N=20$                        | $N=60$                        | $N=100$                       | $N=140$                       |
|-----------|-------------------|---------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\lambda$ | 3.321992118339824 | $\lambda$ の誤差 | $0.672 \cdots \times 10^{-1}$ | $0.439 \cdots \times 10^{-5}$ | $0.192 \cdots \times 10^{-9}$ | $0.675 \cdots \times 10^{-1}$ |
| $S$       | 1.607456795083842 | $S$ の誤差       | $0.600 \cdots \times 10^{-1}$ | $0.176 \cdots \times 10^{-3}$ | $0.163 \cdots \times 10^{-7}$ | $0.113 \cdots \times 10^{-1}$ |

例 4 ([7]).  $\begin{cases} -u'' = \lambda \exp(u^2 + \lambda x u), 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u'' = \frac{1}{\lambda} \exp\{(S-u)^2 + (E-x)(S-u)\} \\ u(0) = u'(0), u(E) = S, u(E-\lambda) = S \end{cases}$

|               | 計算値 ( $N=50$ )     |                   | $N=10$                        | $N=20$                        | $N=30$                         | $N=40$                         |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\lambda$     | 2.115667540519243  | $\lambda$ の誤差     | $0.168 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.200 \cdots \times 10^{-7}$ | $0.937 \cdots \times 10^{-11}$ | $0.384 \cdots \times 10^{-16}$ |
| $\varepsilon$ | 1.125378833257938  | $\varepsilon$ の誤差 | $0.471 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.261 \cdots \times 10^{-7}$ | $0.114 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.729 \cdots \times 10^{-16}$ |
| $S$           | 0.5565262768480663 | $S$ の誤差           | $0.255 \cdots \times 10^{-4}$ | $0.785 \cdots \times 10^{-7}$ | $0.379 \cdots \times 10^{-10}$ | $0.300 \cdots \times 10^{-13}$ |

## 参考文献

- [1] L. Fradkin, Ju and G. C. Wake, The critical explosion parameter in the theory of thermal ignition, J. Inst. Math. Appl. 20, p471 (1977).
- [2] T. Boddington, P. Gray and G. C. Wake, Criteria for thermal explosions with and without reactant consumption, Proc. Royal Soc., Series A, 357, p403 (1977).
- [3] C. Willis, R. A. Back and T. G. Purdon, National Research Council of Canada Report (1977).
- [4] M. W. Bazley and G. C. Wake, The disappearance of criticality in the theory of thermal ignition, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 29, p971-976 (1978).
- [5] J. Sprekels, Exact bounds for the solution branches of nonlinear eigenvalue problems, Numer. Math. 34, p29-40 (1980).
- [6] 亀高惟倫, 「非線形偏微分方程式」 産業図書 (1977).
- [7] J. W. Mooney, H. Voss and B. Werner The dependence of critical parameter bounds on the monotonicity of a Newton sequence, Numer. Math. 33, p291-301 (1979).