

流体面の伸長率に対する Batchelor の仮定の破綻

後藤 晋 (Susumu GOTO)¹ 木田重雄 (Shigeo KIDA)
核融合研 (NIFS)

1 はじめに

常に同一の流体粒子の集合により構成される面（流体面）の乱流中での変形を考える．図 1 は，乱流中の流体面の時間発展の直接数値計算（Appendix A を参照）の結果であるが，流体面の複雑な変形と強い伸長とが観察される．流体面は流体の二つの部分の境界面であるので，仮にそれを二種類の反応物質の接触面であると考えれば，変形は反応物質同士の混合を反映し，また，伸長は反応を起こす面の増大を意味するので，流体面の変形や伸長の理解は流れによる化学反応や燃焼の促進機構の理解につながる．実際，乱流中の流体面（や流体線）の変形の問題は，乱流による混合や燃焼などの基礎的研究として，多くの研究者によって精力的に研究されてきた．

このように流体面の変形や伸長の問題は応用上きわめて重要であるが，同時に数理的にもとても興味深い．以下では数理的側面に重点をおくが，簡単のため，流れ場として統計的に定常かつ一様な乱流を考える．定常一様乱流中での流体線や面の伸長の問題においては，Batchelor [1] によって導入された仮定が大きな役割を果たしてきた．しかし，最近の文献 [2, 3] によって示されたように，この仮定は一般には成立しない．本稿では，定常一様乱流中での流体面の伸長を詳細に調べることにより，この仮定が破綻した原因を理解することを目的とする．

2 流体面の伸長率

図 1 に見られるように，乱流中で流体面は強く伸長される．図 2 には，2 つの異なる Reynolds 数の乱流における流体面の全面積 $A(t)$ の時間発展を示した．時間を Kolmogorov 時間 τ_η で規格化すると，流体面の面積の時間発展は Reynolds 数には依存せず，また， $t > O(5\tau_\eta)$ では，

¹goto@toki.theory.nifs.ac.jp

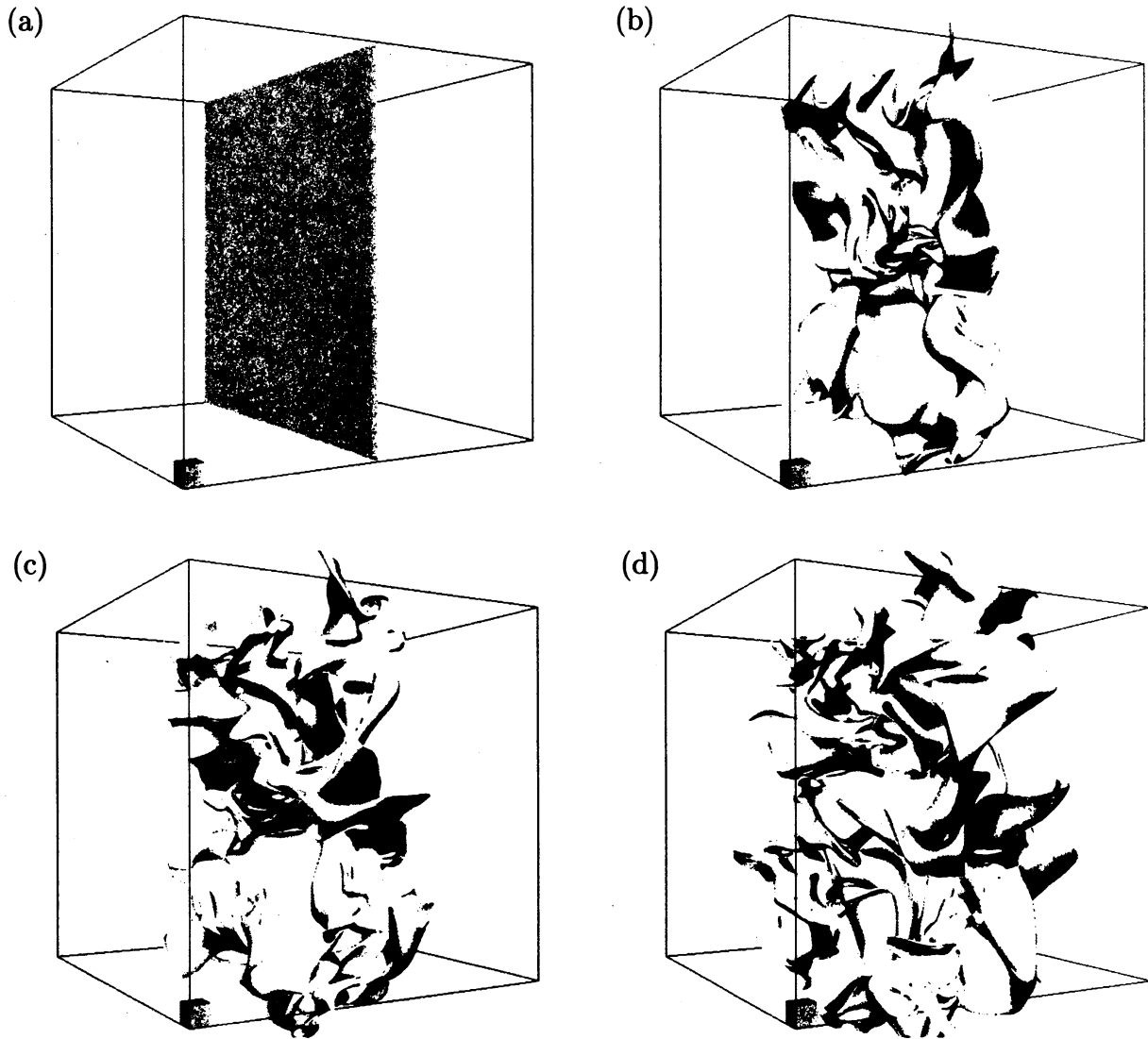


図 1: 流体面の時間発展. 時刻 $t = 0, 3.3, 6.7, 10\tau_\eta$. 大きな箱は速度場の周期境界を表し, 手前下の小さい箱の大きさは Kolmogorov 長さ η の 10 倍を示す. $R_\lambda = 57$.

全面積は,

$$A(t) = A(0) \exp [0.3 t / \tau_\eta] \quad (1)$$

と指数関数的に増大する. したがって, 伸長率 ζ を

$$\zeta(t) \equiv \frac{d}{dt} \log A(t) \quad (2)$$

により定義すると, 図2の傾きより, ζ は $0.3\tau_\eta^{-1}$ 程度であることが分かる². 流体面の伸長率はこの系を特徴づけるもっとも基本的な量であるので, これを理論的あるいは数値的に求める

²図2は流体面の全面積 $A(t)$ のアンサンブル平均 $\langle A(t) \rangle$ であるので, この図の傾きより評価される伸長率は, 正確には $\tilde{\zeta} \equiv d/dt \log \langle A(t) \rangle$ である. ただし, 初期の面積 $A(0)$ を十分大きくとった場合には $A(t)$ の揺らぎが

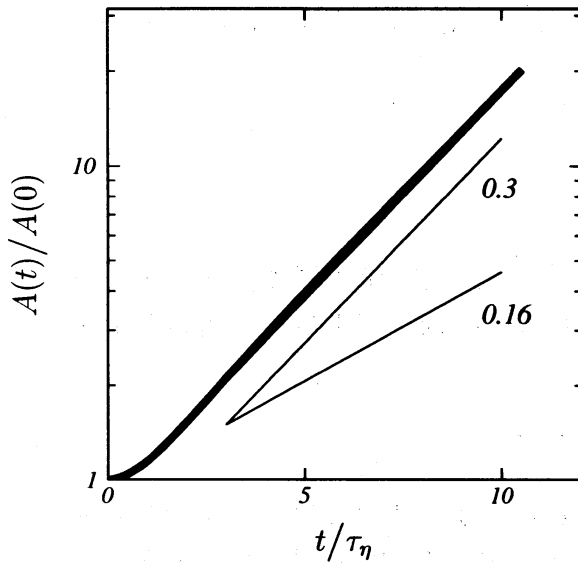


図 2: 流体面の全面積の時間発展. 太線 $R_\lambda = 57$, 細線 $R_\lambda = 84$. 20 通りの初期条件に対するアンサンブル平均.

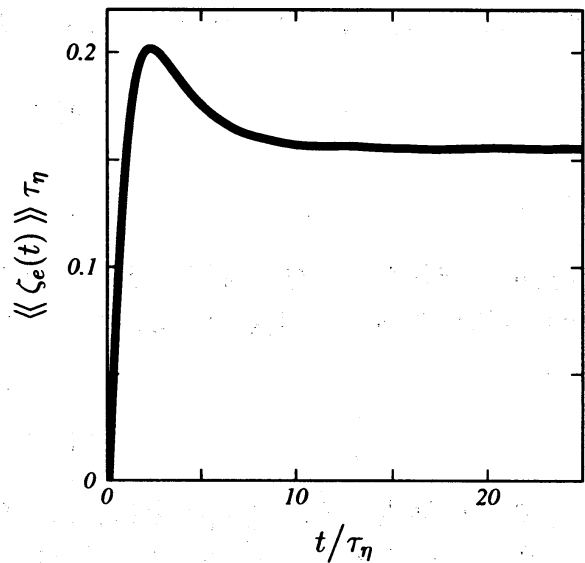


図 3: 流体面素の伸長率のアンサンブル平均. $R_\lambda = 57$.

ことはこれまでも多くの研究の目的となってきた。従来の直接数値計算 [4] によるもっとも信頼できる流体面の定常な一様乱流中での伸長率は $0.16\tau_\eta^{-1}$ 程度であるとされていた。ところが、この値は我々の数値計算による評価と比べてずいぶん小さい。この理由は、従来の計算が次章で述べる Batchelor の仮定に基づいた評価であるためである。Batchelor の仮定は直感的には受け入れやすいのでこれまで広く使われてきたが、実は一般には成り立たないことが示される。

3 Batchelor の仮定

流体面を十分に小さい面積をもつ I 個の流体面素の集合であると考え。ここで十分に小さい面素とは、各面素の広がり l が、変形した流体面の特徴長さ（乱流中では Kolmogorov 長さ η 程度と考えられる）と比べて十分に小さいことを意味する。任意の時刻で全ての面素がこの条件を満たすためには、各面素は初期には十分に小さくしておく必要がある。各流体面素の

無視できるので、 $\tilde{\zeta}$ と $\langle\langle\zeta\rangle\rangle$ とは一致すると期待される。実際、同一のデータから $t \geq 5\tau_\eta$ での $\langle\langle\zeta\rangle\rangle$ を評価すると、 $R_\lambda = 57$ の乱流場において 0.29 ± 0.04 , $R_\lambda = 84$ において 0.29 ± 0.05 を得る。ただし、本稿を通じて、アンサンブル平均とは異なる乱流場の初期条件を用いたいくつかの計算に対する平均を意味する。

時刻 t における面積を $A_e^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, I$) で表すと、考えている流体面の全面積は、

$$A(t) = \sum_{i=1}^I A_e^{(i)}(t) \quad (3)$$

となる。

統計的に定常かつ一様な乱流中で、この流体面素群が十分に長い時間を経たとする。各面素は統計的には等価な伸長を受ける。すなわち、たとえば、時刻 t における i 番目の面素の伸長率、

$$\zeta_e^{(i)}(t) \equiv \frac{d}{dt} \log A_e^{(i)}(t) \quad (4)$$

と、 j 番目の面素のそれ $\zeta_e^{(j)}(t)$ とは、統計的には等しい。より正確には、アンサンブル平均 $\langle\langle \zeta_e^{(i)}(t) \rangle\rangle$ は i に依らない。さらに統計的一様性の定義より、初期の流体面の面積を十分に大きくとれば ($A(0)/\eta^2 \rightarrow \infty$)、流体面素群 i ($= 1, 2, \dots, I$) に対する算術平均 ($\langle \cdot \rangle$ で表す) とアンサンブル平均とは一致する。したがって、一様乱流中では、

$$\langle\langle \zeta_e^{(i)}(t) \rangle\rangle = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \zeta_e^{(i)}(t) \equiv \langle \zeta_e(t) \rangle \quad \text{as } A(0)/\eta^2 \rightarrow \infty \quad (5)$$

が成立する。

さて、Batchelor [1] は上の状況より、『定常一様乱流中では全ての面素が統計的に等価であるのであるから、有限の大きさの面の統計と無限小面素の統計とは一致する』とした。本稿ではこれを Batchelor の仮定とよぶことにする。この主張は、一見もっともらしいのでこれまで広く受け入れられ、また、議論を簡単化するので非常によく使われてきた。とくに、有限の大きさの流体面の追跡 (Appendix A) に比べて無限小の面素の追跡は非常に簡便なので、従来の直接数値計算のほとんどはこの仮定に基づく。この仮定の意味するところは、流体面に付随する物理量 g のアンサンブル平均 $\langle\langle g \rangle\rangle$ は、流体面素に付随する同一の物理量 g_e のアンサンブル平均 $\langle\langle g_e \rangle\rangle$ と等しいとするものである。たとえば、伸長率については、(2) および (4) で定義される 2 つの伸長率に対して、

$$\langle\langle \zeta \rangle\rangle = \langle\langle \zeta_e \rangle\rangle \quad (\text{Batchelor's assumption}) \quad (6)$$

が成り立つことを主張する。

3.1 Batchelor の仮定の限界

以下では (6) が現実の乱流においては成り立たないことを具体的に示す。このことは、(3) を時間微分した式、

$$\zeta(t) = \frac{\sum_{i=1}^I A_e^{(i)} \zeta_e^{(i)}(t)}{\sum_{i=1}^I A_e^{(i)}(t)} = \frac{\langle A_e(t) \zeta_e(t) \rangle}{\langle A_e(t) \rangle} \quad (7)$$

からも容易に想像される。ここで、(4) および流体面素群に対する算術平均の定義を用いた、(7) は、一様乱流中であっても、

$$\langle\langle \zeta(t) \rangle\rangle = \frac{\langle\langle A_e(t) \zeta_e(t) \rangle\rangle}{\langle\langle A_e(t) \rangle\rangle} \quad \text{as } A(0)/\eta^2 \rightarrow \infty \quad (8)$$

と書き直されるだけで、Batchelor の仮定より示唆される関係 (6) は得られない。実際、§2 で見たように、

$$\langle\langle \zeta \rangle\rangle = 0.3\tau_\eta^{-1} \quad (9)$$

であるのに対して、図 3 に示された流体面素の伸長率のアンサンブル平均の $t \geq 10\tau_\eta$ での値は、

$$\langle\langle \zeta_e \rangle\rangle = (0.16 \pm 0.01)\tau_\eta^{-1} \quad (10)$$

となる。後者は、同じく面素の伸長率のアンサンブル平均を評価した文献 [4] に示されている値 $0.16\tau_\eta^{-1}$ に対応している。いずれにしても、直接数値計算の結果によれば、(6) は成立しない。

3.2 数学的根拠

ここでは、流体面の伸長率に対する Batchelor の仮定 (6) が破綻した数学的根拠を示す。議論の鍵は、流体面の伸長過程が積過程とみなせることにある。厳密な関係式 (7) より、仮に $t/\tau_\eta \rightarrow \infty$ において $A_e^{(i)}(t)$ と $\zeta_e^{(i)}(t)$ との相関が無くなれば、 ζ と $\langle\zeta_e\rangle$ とは一致することが分かる。しかし、 $A_e^{(i)}(t)$ と $\zeta_e^{(i)}(t)$ との間には、

$$A_e(t) = A_e(0) \exp \left[\int_0^t \zeta_e(t') dt' \right] \quad (11)$$

という関係式があるために、これらの間の相関は十分な時間が経過しても減衰しない。

このことを示すために、面素の伸長率 $\zeta_e(t)$ の自己相関時間を τ_c で表す。直接数値計算によれば、 τ_c は $O(\tau_\eta)$ であることが分かっている [5]。 (11) の指数関数の中の時間積分を τ_c 毎に分割すると、

$$A_e(t) = A_e(0) \exp \left[\int_0^{\tau_c} \zeta_e(t') dt' \right] \exp \left[\int_{\tau_c}^{2\tau_c} \zeta_e(t') dt' \right] \cdots \exp \left[\int_{t-\tau_c}^t \zeta_e(t') dt' \right] \quad (12)$$

を得る。右辺の各指数関数は、同一の確率分布にしたがう互いに独立な確率変数の積であるので、この意味で流体面の伸長過程は積過程である。右辺の最後の指数関数を除いく全ての部分は $\zeta_e(t)$ とは統計的に独立であることに注意して、(12) を (7) に代入すると、

$$\zeta(t) = \frac{\langle\zeta_e(t) \exp \left[\int_{t-\tau_c}^t \zeta_e(t') dt' \right]\rangle}{\langle\exp \left[\int_{t-\tau_c}^t \zeta_e(t') dt' \right]\rangle} \quad (13)$$



図 4: 流体面と乱流中の秩序渦構造. 黒い曲線群は, 流体面の近くにある低圧力渦 [6,7] の中心軸を表す. $R_\lambda = 57$. $t = 5\tau_\eta$.

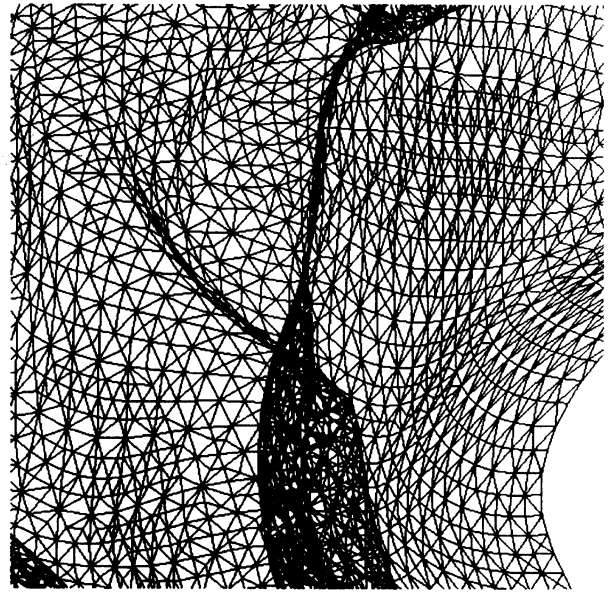


図 5: 直接数値計算においては, 流体面は小さい三角形の集合で表現される.

を得る. この式より, t が十分に大きくなっても, $\zeta_e(t)$ と相関をもつ (12) の最後の指数関数の影響が減衰することではなく, $\zeta_e(t)$ と $A_e(t)$ との相関も減衰しないことが分かる³. 結果として, $\zeta(t)$ と $\langle \zeta_e(t) \rangle$ とは一致せず, (6) も成立しない.

3.3 物理的意味

最後に Batchelor の仮定が破綻したことの物理的な意味を議論する. そのために (13) において時間積分を $\zeta_e(t)\tau_c$ で近似し, さらに指数関数を Taylor 展開することにより,

$$\zeta(t) - \langle \zeta_e(t) \rangle \approx (\langle \zeta_e(t)^2 \rangle - \langle \zeta_e(t) \rangle^2) \tau_c \quad (14)$$

を得る. この式から分かるように, 仮に ζ_e の自己相関時間 τ_c が 0 であるか, もしくは, ζ_e の空間揺らぎが無視できる場合には, 伸長率に対する Batchelor の仮定 (6) は, よい近似を与えていたはずである. しかし, 現実の乱流中での流体面の伸長過程は有限の相関時間 $O(\tau_\eta)$ と, 有限の空間揺らぎ (伸長率の分散は $O(0.1\tau_\eta^{-2})$ となる) をもっている. このために, Batchelor の仮定に基づく伸長率の評価 (10) と, 実際の伸長率 (9) との間には有意な差が現れる.

伸長過程の空間的な非一様性と有限の相関時間とは, 流体面の変形が乱流の小スケールの秩

³伸長過程が積過程ではなく和過程あったならば, すなわち, $A_e(t)$ が $t' \leq t$ の $\zeta_e(t')$ の和で表されているならば, $A_e(t)$ と $\zeta_e(t)$ との間の相関は時間とともに減衰する. (11) において ζ_e の時間積分が指数関数の中に存在することが本質的である.

序構造によって行われていることを反映していると考えられることもできる。図4に、変形した流体面を秩序構造渦とともに示す。図中の黒い曲線群は低圧力渦 [6,7] の中心軸であり、流体粒子はこの軸のまわりを旋回運動している。流体粒子の集合より成る流体面の変形や伸長が、この渦構造の影響を強く受けることは当然である。よく知られているように、乱流の秩序構造渦は空間的に強く局在しているので、伸長の空間的な揺らぎもまた無視することはできない。Batchelor の時代には秩序構造渦という概念は存在しなかったので、一様乱流中での非一様な伸長の効果を Batchelor が無視したのは仕方がないことかも知れない。逆に言えば、乱流中の秩序構造の存在は、乱流混合、拡散、輸送などの問題に対する新しい理解を与えてくれる可能性がある。

本研究は文部科学省科学研究費特定領域研究（B）の部分的支援を受けた。

参考文献

- [1] G. K. Batchelor, "The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces," *Proc. Roy. Soc. London A*, **213** (1952) pp.349–366.
- [2] S. Goto and S. Kida, "Multiplicative process of material line stretching by turbulence," *J. Turbulence*, **3** (2002) 017.
- [3] S. Kida and S. Goto, "Line statistics: Stretching rate of passive lines in turbulence," *Phys. Fluids*, **14** (2002) 352–361.
- [4] S. S. Girimaji and S. B. Pope, "Material-element deformation in isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, **220** (1990) pp.427–458.
- [5] S. Goto and S. Kida, "Stretching Rate of Material Surfaces in Isotropic Turbulence," In *Advances in Turbulence IX*, (eds. Castro, I. P., Hancock, I. P. and Thomas, T. G. 2002) pp.125–128.
- [6] Miura, H. and Kida, S., "Identification of tubular vortices in turbulence," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66** (1997) pp.1331–1334.
- [7] Kida, S., "Vortical structure of turbulence," In *Mechanics for a New Millennium*, (eds. Aref, H. and Phillips, J. W. 2001) pp.445–456.

A 数値計算手法

最後に本稿で用いた数値計算法を簡単にまとめる。まず、流体面は微小な三角形の集合として表現する。図5を参照。流体面を精度よく近似するために、各三角形の辺の長さは常に計算

格子点幅よりも短くなるように調節する。すなわち、流体面の面積は指数関数的に増大するので、時間刻み毎に三角形の全ての辺の長さを確認し、閾値を超えていればその中点に頂点を追加することにより精度を保つ。

さて流体面の定義により、各三角形の頂点の位置ベクトル $\mathbf{x}_p(t)$ は移流方程式、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) \quad (15)$$

に支配される。ここで、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は流れ場であり、Navier-Stokes 方程式および連続の式、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (17)$$

に支配される。ここで、 $\rho (= 1)$ は流体の密度、 $p(\mathbf{x}, t)$ は圧力、 ν は動粘性係数を表す。また、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ は乱流を維持するための外力である。速度場の境界条件は空間3方向ともに周期境界条件を課す。

流体面を表現する三角形の頂点の集合 $\{\mathbf{x}_p\}$ と速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の時間発展を、(15) と (16) を同時に4次精度の Runge-Kutta 法により時間積分することによって解く。ただし、前者の時間積分の刻みは、後者のその2倍とする。また、(16) の空間微分項は Fourier スペクトル法によって評価し、また、(15) の右辺は、格子点上の速度場を64点の Lagrange 補間することによって評価する。また、速度場の時間発展において、速度場の Fourier 成分のうち低波数領域にあるモードの振幅を時間的に固定（位相は自由に時間発展させる）する。これより統計的に定常な乱流場が維持される。