

大自由度力学系の有効次元と示量性 ～Lyapunov 解析によるアプローチ～

東京大学・理学系研究科・物理学専攻 竹内 一将*

Kazumasa A. Takeuchi

Department of Physics, The University of Tokyo

概要

本稿では、(共変) Lyapunov ベクトルの定義、実用的な数値計算方法、考えられる使いみちなどについて概説したうえで、Lyapunov ベクトルを併せた Lyapunov 解析によって大自由度力学系の有効次元と示量性を明らかにする最近の取り組みについて紹介する。具体的には、短距離相互作用をもつ散逸系においては Lyapunov ベクトルの双曲性から慣性多様体の次元と局所表現が得られると予想され、また長距離相互作用系においては通常の示量性に加え、準示量的とも言うべき特異なサイズ依存性を示すモードが存在することがわかる。そして、これらの成果から、散逸系と保存系の違い、短距離相互作用系と長距離相互作用系の違いについて議論する。

1 はじめに

力学系、特にカオスを示す系の解析において、その不安定性を調べるのが重要なのは周知のとおりである。その際によく測られるのが Lyapunov 指数、すなわち軌道に与えた無限小摂動が指数関数的に伸長/収縮する速さであり、不安定性の強さを定量化するだけでなく、アトラクター次元や力学系的エントロピーなどの基本的な諸量とも直接結びつくことが知られている [1]。さらに、大自由度系においては 1 自由度あたりの「Lyapunov

* 電子メール: kat@kaztake.org

指数密度」が存在するか否かによってカオス示量性が定義される [2, 3] など、Lyapunov 指数は系の自由度の多寡によらず中心的な役割を果たし、膨大な研究がなされてきた。

その一方で、個々の Lyapunov 指数に対応する摂動の固有の向き、いわゆる Lyapunov ベクトル [1] はこれまで比較的注目されてこなかった。本来、Lyapunov 指数と Lyapunov ベクトルは固有値と固有ベクトルのように不可分の関係にあり、同等の重要性があっても不思議ではない。それでも Lyapunov ベクトルがあまり調べられなかったのは、次節で述べる定義どおりに計算すると数値的コストが非常に高く、特に大自由度系では全く計算できる代物ではなかったからだろう。しかし、この状況はアルゴリズムの効率化によって徐々に改善されていき、2007 年に Ginelli ら [4] が提案した計算方法によって、ついに Lyapunov 指数とほぼ同等の数値的コストにまで下げられた [4–6]^{*1}。これを契機に Lyapunov ベクトルは様々な用途で計算されはじめ、基礎研究や地球科学などの分野を中心に、力学系のこれまで調べられなかった側面の報告が集まりつつある [7]^{*2}。

以上の背景のもと、本稿では、まず第 2 節で Lyapunov ベクトルについて簡潔にまとめよう。うで、応用例として著者が共同研究者らと取り組んだ最近の成果の一部を紹介する。特に、大自由度力学系の有効次元や示量性といった問題に注目し、Lyapunov ベクトルの双曲性から散逸系の有効次元を正確に決定できること [8, 9] (第 3 節) や、Lyapunov ベクトル成分のランダム運動の性質から長距離相互作用系が特異な示量性をもつこと [10, 11] (第 4 節) を述べる。そして、そこから見える散逸系と保存系の違い、また短距離相互作用系と長距離相互作用系の違いについて議論する。

2 Lyapunov 指数と (共変) Lyapunov ベクトル

まずは Lyapunov 指数と Lyapunov ベクトルについて概説する。前節で述べたように、これらは軌道に与えた無限小摂動が指数関数的に伸長/収縮する際の速さと方向を与える。 N 次元力学系において不変測度をとる軌道 $\mathbf{x}^{t+\tau} = \mathbf{F}^\tau(\mathbf{x}^t)$ を考え、それに対する線形摂動 $\delta\mathbf{x}^{t+\tau} = \mathbf{D}\mathbf{F}^\tau(\mathbf{x}^t)\delta\mathbf{x}^t$ を取り扱う ($\mathbf{D}\mathbf{F}^\tau$ は $\mathbf{F}^\tau$ の Jacobian; 以下引数は省略)。このとき、摂動の向きに応じて N 個の Lyapunov 指数 $\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)} \geq \dots \geq \lambda^{(N)}$ が存在し、そのそれぞれに対する固有の向きとして Lyapunov ベクトル $\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}), \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}^{(N)}(\mathbf{x})$ が次のように定義されている：

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\tau} \log \|\mathbf{D}\mathbf{F}^\tau(\mathbf{x}^t)\delta\mathbf{x}^t\| = \lambda^{(j)} \quad \text{if } \delta\mathbf{x}^t // \mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}^t). \quad (1)$$

^{*1} ただし、十分なメモリまたは記憶領域が必要となる [4–6]。

^{*2} 最近の成果や概説を収めた特集号 [7] が Journal of Physics A 誌から刊行予定である。

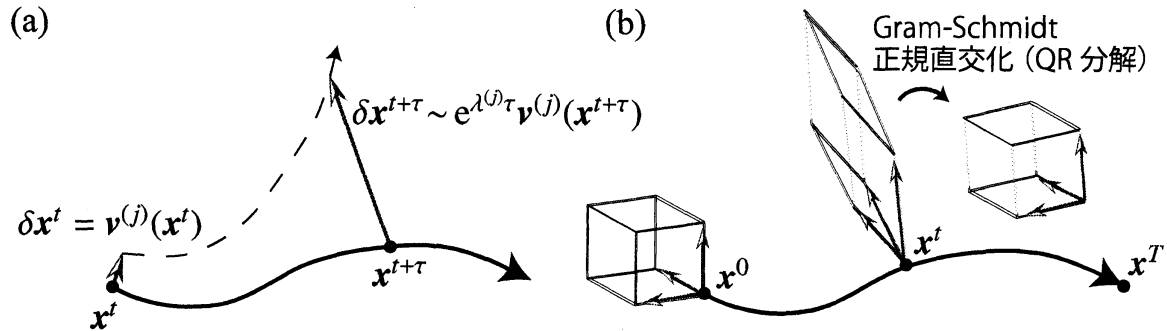


図 1: Lyapunov 指数・ベクトルの式 (1) による直感的定義 (a) と数値的計算方法 (b)。

これを図示したものが図 1(a) である。ここで、式 (1) の極限は正負両方向 $\tau \rightarrow \pm\infty$ で同じ指数に収束することに注意しよう。片側だけ、たとえば $\tau \rightarrow \infty$ だけなら、ほとんど全ての摂動 δx^t に対して式 (1) の右辺は最大 Lyapunov 指数 $\lambda^{(1)}$ に収束するため、ベクトル $v^{(1)}$ の定義には不十分である。

以上の直感的な定義は、数学的には Oseledec 分割として厳密に定式化されている [1]。式 (1) に現れるノルムを露わに書くと、 L^2 ノルムなら対称行列 $(DF^\tau)^T DF^\tau$ が現れるが、Oseledec の multiplicative ergodic theorem により、極限 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [(DF^\tau)^T DF^\tau]^{1/2\tau}$ の存在が証明されている。そこで、当面の間 Lyapunov 指数の重複はないものと仮定し ($\lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(N)}$)、対称行列 $(DF^\tau)^T DF^\tau$ の固有値問題を τ の正負別々に解くと、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \log [(\delta x^t)^T (DF^\tau)^T DF^\tau \delta x^t] = \lambda^{(j)}, \quad \text{if } \delta x^t \in E^{(j)}(x^t) \setminus E^{(j+1)}(x^t), \quad (2)$$

$$\lim_{\tau' \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau'} \log [(\delta x^t)^T (DF^{-\tau'})^T DF^{-\tau'} \delta x^t] = -\lambda^{(j)}, \quad \text{if } \delta x^t \in \bar{E}^{(j)}(x^t) \setminus \bar{E}^{(j-1)}(x^t) \quad (3)$$

を得る*3。ここで、 $E^{(j)}(x^t)$ は点 x^t における接空間の部分空間であり、 $\tau \rightarrow \infty$ での行列 $(DF^\tau)^T DF^\tau$ の j から N 番目の固有ベクトル（前方直交ベクトルと呼ばれる）によって張られる。同様に、 $\bar{E}^{(j)}(x^t)$ は、 $\tau \rightarrow -\infty$ に対して同じ行列の 1 から j 番目の固有ベクトル（後方直交ベクトル）が張る部分空間である。また、表式の都合上、 $E^{(N+1)}(x^t)$ と $\bar{E}^{(0)}(x^t)$ は空集合と定義している。式 (2),(3) で τ の正負により別々に扱わなくてはならない理由は、摂動 δx^t が複数の Lyapunov ベクトル成分を含む場合、 $\tau \rightarrow \infty$ では最大の Lyapunov 指数を与える成分が最も不安定であり、支配的な成分となるが、 $\tau \rightarrow -\infty$ では最小の

*3 不変測度をもつ軌道を考えているので、時間を反転しても固有値の符号が変わるだけである。なお、式 (2),(3) が数学的に意味をもつためには時間的に可逆な系でなくてはならないが、不可逆な系の場合でも、軌道の座標 x^t さえ記録しておけば、接空間内では DF^τ の逆行列によって初期条件まで時間を遡ることが可能である。つまり、実際上は、transient 後の軌道に対して式 (2),(3) の極限に相当する量が計算可能であり、Lyapunov ベクトルは不可逆な系に対しても計算できる。

Lyapunov 指数が支配的成分を与えるからである。逆に考えると、 j 番目の前方直交ベクトルは j から N 番目までの Lyapunov ベクトルの線形結合であり、 j 番目の後方直交ベクトルは 1 から j 番目までの Lyapunov ベクトルの線形結合である。従って、 j 番目の Lyapunov ベクトル $\mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}')$ を求めるには、前方・後方直交ベクトルの部分空間の共通部分

$$\mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}') \in E^{(j)}(\mathbf{x}') \cap \bar{E}^{(j)}(\mathbf{x}') \quad (4)$$

を計算すれば良い。数学的には、式 (4) が Lyapunov ベクトルの定義である。Lyapunov 指数の重複はないとしたので、式 (4) 右辺はふつう 1 次元部分空間であり、ノルムと向きの任意性を除いて Lyapunov ベクトルは一意に定められる。Lyapunov 指数に重複がある場合も、多重度 n の指数に対して式 (4) 右辺は n 次元空間となり、この部分空間が物理的に意味をもつ量となる。この場合でも、それを張る n 本の任意のベクトルとして Lyapunov ベクトルが定義できる。

Lyapunov 指数や Lyapunov ベクトルを解析的に求めるのは、特にカオス系では特殊な場合を除き不可能である。しかし、Lyapunov 指数に関しては、任意の N 本のベクトルを Jacobian で時間発展させ、Gram-Schmidt 正規直交化 (QR 分解と等価) を繰り返しながら体積膨張率を計算する Shimada-Nagashima のアルゴリズム [12, 13][図 1(b)] が広く知られており、大自由度力学系でも比較的効率よく計算することができる。なお、この際に得られる Gram-Schmidt ベクトルが、先に述べた後方直交ベクトルに他ならない^{*4}。一方、Lyapunov ベクトルに関しては、Shimada-Nagashima 法を時間逆向きにも行って前方・後方直交ベクトルを両方計算する必要があるうえ、式 (4) の共通部分の計算を軌道上の各点 $\mathbf{x}'$ に対して行うのに極めて大きな数値的コストが必要で、少し自由度が増えると全く計算できなくなってしまう。しかし、2007 年、Ginelli らは、Shimada-Nagashima 法で得られる Gram-Schmidt ベクトルを活用することで、同等の計算を非常に効率よく達成することに成功した [4]。この方法で j 番目の Lyapunov ベクトル $\mathbf{v}^{(j)}$ を計算するには、1 から j 番目の Gram-Schmidt ベクトル $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(j)}$ の張る部分空間 $\bar{E}^{(j)}(\mathbf{x}')$ を考え、その中で時間逆向きに最も不安定な方向が $\mathbf{v}^{(j)}$ であることを使う。すなわち、 $\mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}')$ を計算したい時刻 t より十分大きい時刻 T まで Shimada-Nagashima 法を行い [図 1(b)]、部分空間 $\bar{E}^{(j)}(\mathbf{x}^T)$ に任意のベクトル $\mathbf{v}^{(j)}$ を生成して、それを $\bar{E}^{(j)}$ 内で時間逆向きに時間発展させれば、transient ののちに Lyapunov ベクトル $\mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}')$ に収束する。この発想を直接実装することは数値誤差のためできないが、Ginelli らは、時刻 t で $\mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{x}') = \sum_{k=1}^j C_{jk}(\mathbf{x}') \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}')$ と展開したときの係数 $C_{jk}(\mathbf{x}')$ が、Shimada-Nagashima 法の QR 分解で得られる上三角行

^{*4} 前方直交ベクトルと誤解されがちであるが、後方が正しい。時刻 t の Gram-Schmidt ベクトルはそれより前の時刻の情報を使って計算されたものであるから、当然といえば当然である。

列 R によって直接（時間逆向きに）時間発展できることを発見した。これにより部分空間内の時間発展が実装でき、計算コストも、時間軸を往復する分として Shimada-Nagashima 法の 2 倍程度しかかからずに、（初期時刻 0 と最終時刻 T から十分離れた）軌道上の全ての点の Lyapunov ベクトルが計算できる。ただし、QR 分解で得た行列 $Q(x'), R(x')$ のデータ保持に大きなメモリ容量が必要となる。十分なメモリがない場合は、軌道をいくつかの区間に分割して境界の座標 x' をディスクにバイナリ保存し、後ろの区間から順番に、区間毎に時間軸を往復して係数 $C_{jk}(x')$ を発展させていくことで、それほどロスなく計算ができる（十分速いディスクなら Shimada-Nagashima 法の 3 倍程度）。Ginelli らのアルゴリズムの実際的な実装については、原著論文 [4] のほか、最近の概説 [5, 6] に詳しい説明がある。

こうして求めた Lyapunov ベクトルは以下の性質を満たす [1]。

- 力学系に備わる intrinsic な物理量であり、ノルムの定義などにはよらない。
- インデックス j と位相空間の座標 x のみの関数 $v^{(j)}(x)$ である。
- 時間反転 $t \rightarrow -t$ に対して不変。
- ダイナミクスに対して共変、つまり、 $DF^{\tau} v^{(j)}(x') / \|v^{(j)}(x'^{\tau})\|$ 。
- 式 (1) のように、対応する Lyapunov 指数で成長する。

なお、真の Lyapunov 指数が計算できなかった歴史的事情から、Shimada-Nagashima 法の副産物として得られる Gram-Schmidt ベクトル、つまり後方直交ベクトルが代わりに解析され、Lyapunov ベクトルと呼ばれてしまうことも多かった。しかし、上の定義からも明らかなように、これは真の Lyapunov ベクトルとは定性的・定量的に全く異なり、上に挙げた性質を 1 つも満たさない。真のベクトルは一般に直交しないのに対し^{*5}、Gram-Schmidt ベクトルは定義により直交している点も重要な違いである。こうした事情から、Ginelli らが計算したベクトルはしばしば共変 Lyapunov ベクトルと呼ばれている。しかし、これは力学系に本来備わる「唯一の」Lyapunov 基底なので、本来は単に Lyapunov ベクトルと呼ばれるべき量である。

最後に、Lyapunov ベクトルの使い道について簡単に述べる。著者が考える最も大きなご利益は以下の 2 つである。

1. 各 Lyapunov モードの構造がわかる。つまり、系のどの自由度がどれくらいの重みで関わっているかが、ベクトルの各要素にそのまま入っている。

^{*5} 非双曲系では、異なるインデックスの Lyapunov ベクトルが接することがある（厳密に言うと、なす角度がどこまでもゼロに近づける）[4]。

2. (非) 双曲性の程度を測れる。ベクトル間あるいは部分空間間の角度を測ることにより、非双曲性の程度を直接数値的に測ることができる [4] (脚注*5 も参照)。

実際、著者と共同研究者らは、前者の性質を用いて、集団挙動を示す力学系の Lyapunov モードにはミクロなゆらぎを記述する微視的モードと集団的な不安定性を特徴づける集団挙動モードがあることを発見した [14, 15]。後者の性質からは、次節で紹介するように散逸系の有効次元が exact に見積もれる [8, 9] ほか、小林・山田らによって、Navier-Stokes 方程式やシェルモデルの双曲性と、乱流のエネルギー散逸や間欠性との関係が調べられている [16, 17]。力学系において Lyapunov 指数が果たす役割の重要性を考えれば、Lyapunov ベクトルにはほかにも多くの使い道があることが期待され、実際に様々な応用例が提案されてきている [7]。

3 散逸系における接空間分離と有効次元

Lyapunov ベクトルの実用例として、散逸系における接空間分離とそれによる有効次元の同定についての我々の研究成果 [8, 9] を紹介する。本研究は特に、偏微分方程式系について重要な意味をもつ。偏微分方程式は形式的には無限次元の力学系であるが、散逸があれば一般的に、軌道は有限次元の慣性多様体に指数関数的に吸い込まれ、transient 後の解は有限個の自由度で記述できると考えられている [18]。事実、Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式や複素 Ginzburg-Landau (CGL) 方程式などでは有限次元の慣性多様体の存在が数学的に証明されている [18–20] が、形式的な理論なので、慣性多様体の次元や構造は未知のままだった。

一方で、慣性多様体は Lyapunov 解析と相性が良いように思える。上で述べた性質から、軌道を慣性多様体の外に出すような摂動は指数関数的に減衰し、また慣性多様体内部のモードとは常に分離していると考えられるからである。そこで我々は、KS 方程式や CGL 方程式などで Lyapunov 指数とベクトルを計算し、モード毎の双曲性を調べたところ、あるインデックス j_{th} を境に、互いに接点をもつ有限個の「物理 Lyapunov モード」($j \leq j_{th}$) と、いかなる物理モードとも接点をもたず双曲的に孤立した「余剰モード」($j > j_{th}$) に接空間が分離することを発見した [8, 9]。

1 次元 KS 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0, L], \quad (5)$$

の場合の主要な結果を紹介しよう。周期的境界条件 $u(x, t) = u(x + L, t)$ のもと、システムサイズを $L = 96$ に固定し (時空カオス領域)、十分な空間解像度 (ここではスペクト

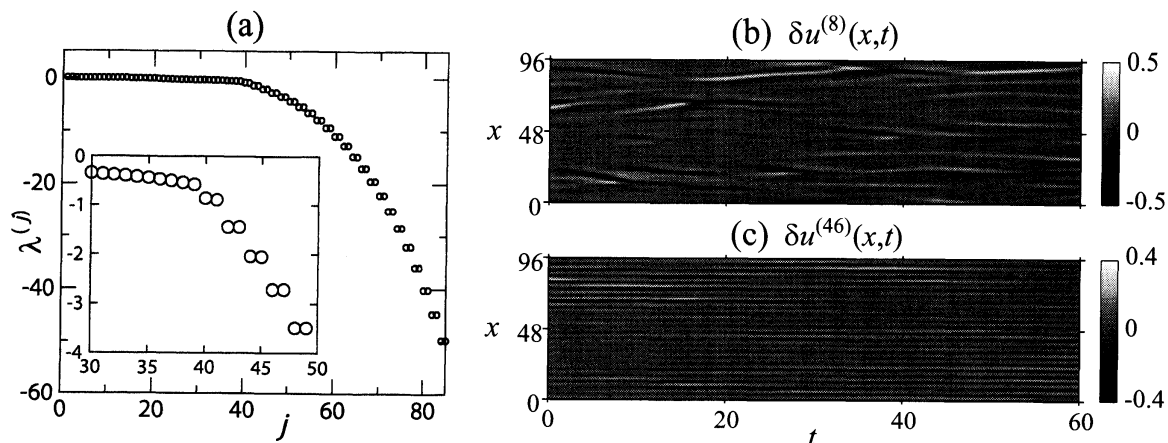


図 2: KS 方程式 (5) における Lyapunov 指数と Lyapunov ベクトル [8, 9]。 (a) 周期境界条件での Lyapunov スペクトル。 (b,c) スペクトルの滑らかな領域 (b)、階段状の領域 (c) にある典型的な Lyapunov ベクトル ($j = 8, 46$) の時空間構造。

ル法のカットオフ波数を十分大きくする) で Lyapunov 指数を計算すると、図 2(a) に示すようにあるインデックスから階段状のスペクトルが現れる。空間解像度を上げても新たな Lyapunov 指数は階段状スペクトルの末尾に加わるだけであり、前半の滑らかなスペクトル構造は影響を受けないことから (図は原著論文 [8, 9] 参照)、この階段状領域の Lyapunov モードは解の記述に不必要な自由度に対応するのではないかと想像できる。事実、滑らかな領域、階段状領域の Lyapunov ベクトルの時空間構造を見ると、前者のモードは解軌道 $u(x, t)$ の時空カオスを反映した構造をもつのに対し、後者のモードは軌道とほぼ無関係な定常正弦波に近い [図 2(b,c)]。周期的境界条件では、波数が同じでも $\sin$ と $\cos$ の 2 つの定在波が存在できるので、各波数ごとに多重度 2 で Lyapunov モードが出現して階段状のスペクトル構造をなすのである。

階段状領域のベクトルの正弦波構造は、異なる波数の Lyapunov ベクトルが互いにほぼ直交することを示唆している。そこで、Lyapunov ベクトルのペア $\delta u^{(j_1)}(x, t), \delta u^{(j_2)}(x, t)$ を適当なインデックスから選び、その間のなす角度 $\theta^{(j_1, j_2)}(t)$ を、内積を用いて

$$\cos \theta^{(j_1, j_2)}(t) = \int_0^L \delta u^{(j_1)}(x, t) \delta u^{(j_2)}(x, t) dx, \quad (6)$$

と定義^{*6}して、確率密度 $\rho_v^{(j_1, j_2)}(\theta)$ を調べたのが図 3(a) である。これを見ると、インデックスのペア (39, 40) や (40, 41) では角度 θ が 0 から π まであらゆる値を取り、特に接することができる ($\rho_v^{(j_1, j_2)}(\theta)$ が $\theta = 0, \pi$ でも有限の値をもつ) のに対し、ペア (41, 42) から

^{*6} ただし、Lyapunov ベクトル $\delta u^{(j)}(x, t)$ は L^2 ノルムで規格化 $\int_0^L \delta u^{(j)}(x, t) dx = 1$ してある。

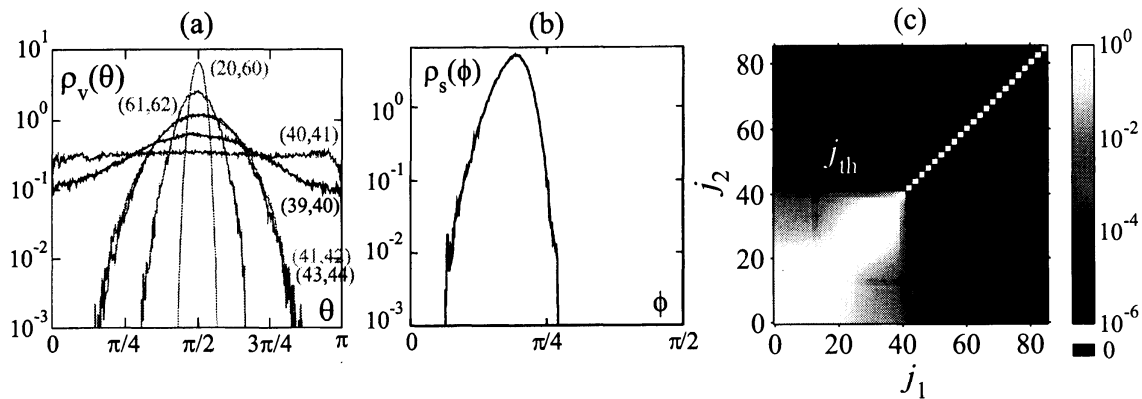


図 3: KS 方程式 (5) における物理モードと余剰モードの分離 [9]。 (a) Lyapunov ベクトルがなす角度 $\theta^{(j_1, j_2)}$ の分布。括弧内の数字はインデックスを表す。 (b) 物理モードが張る部分空間 ($1 \leq j \leq j_{th}$) と余剰モードが張る部分空間 ($j > j_{th}$) のなす角度の分布。 (c) モード j_1, j_2 間で DOS が破れる時間の割合。これがゼロ（黒）なら接点はない（双曲的）。破線は物理モードと余剰モードの境界 $j_{th} = 43$ を示す。

は分布が突然変化し、 $\pi/2$ 付近に確率密度が集中して、接点をもたないように見える。もちろん、有限の長さのシミュレーションから接点がないことを直接示すことはできないが、インデックスを固定し、接点をもつ頻度 $\rho_v^{(j_1, j_2)}(0)$ がシステムサイズ L にどう依存するかを測れば、ある L に対して接点をもつペアともたないペアを見分けることができる。すると、実はペア (41, 42) は非常に稀に接点をもつものに対し、ペア (43, 44) 以降は全く接点をもたないことがわかる [9]。このことは隣接インデックスに限らず、 $j \leq j_{th} \equiv 43$ から 2 つ Lyapunov モードを選ぶと一般にベクトル間には接点があるのに対し、2 つのモードのうち少なくとも一方が $j > j_{th}$ ならベクトル間には接点が全く存在しない^{*7}。そこで、ここでは $j \leq j_{th}$ のモードを物理モード、 $j > j_{th}$ のモードを余剰モードと呼ぶことにする（理由は後で述べる）。物理モードの数は、 $L = 96$ の KS 方程式 (5) では $j_{th} = 43$ 個であり、この数は数値計算で用いる空間解像度に依存しない。これは、もとの偏微分方程式系においても物理モードの数は 43 個で有限であることを意味する。

もっとも、ベクトル間の角度を測っただけでは、余剰モードの線形結合が物理モードの線形結合と接する可能性を否定できない。こうした接点の有無を調べるには、全ての物理モード $1 \leq j \leq j_{th}$ の Lyapunov ベクトルが張る部分空間と、余剰モード $j > j_{th}$ に対し

^{*7} より正確に（KS 以外の系でも成り立つように）言い換えると、 $j \leq j_{th}$ のモード（物理モード）は接点をたどることで全てのモードが互いに繋がっている（モード j_1, j_2 の間に直接の接点がなくても、他の物理モードとの接点を辿れば到達できる）のに対し、 $j > j_{th}$ のモード（余剰モード）は全ての物理モードと全く接点を持たない。

て同様に定義した部分空間がなす角度^{*8}の分布を測れば良い。その測定結果が図 3(b) であり、確かに接点での確率密度はゼロで、従って線形結合を含めても余剰モードは物理モードと接点をもたないことがわかる。すなわち、余剰モードは物理モードから双曲的に完全に分離しているのである。

また、物理モードと余剰モードの双曲的分離は domination of Oseledec splitting (DOS) [22, 23] と呼ばれる指標によっても判定可能である。 $\lambda_\tau^{(j)}(t)$ を時刻 t 周辺の有限時間 τ で積算した有限時間 Lyapunov 指数とし^{*9}、ある $j_1 < j_2$ に対して、指数の大小関係 $\lambda_\tau^{(j_1)}(t) > \lambda_\tau^{(j_2)}(t)$ が全ての t で成り立つような有限の τ が存在するとき、モード j_1, j_2 は DOS を満たすという。そして、DOS を満たすペアはベクトル間に接点を持たないことが数学的に証明されている [22, 23]。従って、任意のペア (j_1, j_2) 間で DOS が破れる時間の割合を測れば、接点の有無を判定することができる。それをプロットしたものが図 3(c) であり、角度分布から求めた閾値 j_{th} を境に DOS の破れの有無が明確に切り替わっていることが確認できる。

以上で、1 次元 KS 方程式の接空間では、有限個の物理モードとその他全ての余剰モードが双曲的に分離していることを見た。我々は 1 次元 CGL 方程式、1 次元結合写像格子、2 次元 KS 方程式においても同様の結果を見出しており [9]、接空間の双曲的分離は散逸を伴う様々な時空力オス系に共通する特徴であることがわかる。接点の有無が何を意味するかを考えるため、軌道に対し、 j 番目の Lyapunov ベクトルの方向に摂動を与える思考実験をしてみよう。それが物理モードなら、このモードは他の物理モードと接点を持ち、考えていた摂動は接した 2 つのモード双方の摂動として伝搬していくため、やがて全ての物理モードに摂動が伝わって充満することになる。特に、最初に摂動を与えたモードの Lyapunov 指数が負でも、やがて正の指数をもつモードに摂動が伝搬するため、物理モード全体としては摂動が消えずに残り続けることに注意しよう。一方、はじめに余剰モードに摂動を与えた場合は、接点がなく、また Lyapunov 指数が負であるため、摂動は他のどのモードにも影響を与えることなく、指数関数的に減衰してしまう。すなわち解軌道に一切影響を及ぼさない。以上の考察から、解軌道の特徴づけるのは有限個の

^{*8} 部分空間どうしのなす角度は、各々の部分空間を張る基底ベクトルの任意の線形結合どうしがなす最小の角度と定義される。すなわち、部分空間 A, B 間の角度がゼロにならないなら、各々の部分空間内にあるベクトルのあらゆる線形結合が A, B 間で接点をもたないことを意味する。なお、部分空間 A, B がなす角度 ϕ の計算は、特異値分解を用いて簡単に実装できる [21]。具体的には、各部分空間を張る直交基底ベクトルを並べた行列を Q_A, Q_B として、行列 $Q_A^T Q_B$ の特異値分解をし、その最大特異値が $\cos \phi$ である。

^{*9} あまり意識されていないように思われるが、有限時間 Lyapunov 指数の数値計算には（共変）Lyapunov ベクトルの伸び率を測らなくてはならない。Shimada-Nagashima 法で得られる伸び率は後方直交ベクトルの伸び率であり、それは 1 から j 番目の Lyapunov モードの伸び率が混合したものである。

物理モードだけだと考えられ、特に物理モードは慣性多様体の局所表現を与えていて、その個数は慣性多様体の次元になると予想している [8, 9]。この予想が数学的に証明されれば、初めて完成多様体の実体にアクセスできたことになる。また、完成多様体の次元 D_{IM} は数学的には上限を抑えることしかできていない。さらに、その上限は 1 次元 KS 方程式では $D_{\text{IM}} < \text{const.} \times L^{12/5}$ [20] となり、KS 方程式の力学的諸量が示量性を示すこと [3] を考えれば、物理的に理解しがたい冪である。一方、Lyapunov ベクトルを用いた方法では、角度分布や DOS から物理モードの数を exact に決めることができ、1 次元 KS では $j_{\text{th}} \approx 0.43 \times L$ となる [9]。特に、システムサイズ L に比例し、示量的な量になっていることから、物理モードの数は完成多様体の次元に期待される性質を備えていることがわかる。

なお、保存系においても図 2(a) のような階段状の Lyapunov スペクトルが中立モード付近 ($\lambda = 0$ 付近) に現れるという報告があり、hydrodynamic Lyapunov mode (HLM) と呼ばれている ([24] やその参考文献を参照)。HLM は正弦波的なベクトル構造をもつことが知られており [24]、Lyapunov 指数の値も小さい、すなわち特徴的な時間スケールが長いことから、輸送現象などのマクロな性質を担うモードではないかと議論されている。正弦波的なベクトル構造や階段状の Lyapunov スペクトルは、我々が散逸系で発見した余剰モードとよく似ていることに注意しよう。しかし、我々はその双曲性やサイズ依存性を注意深く調べ、HLM とその他のモードに明確な境い目を見出すことはできず、また Lyapunov スペクトル中で HLM が占める割合はシステムサイズとともに減少していくため、マクロ極限で HLM の存在自体に疑義があるという結果を得ている。いずれにしても、慣性多様体は散逸系で存在が期待される概念であり、従って保存系で物理モード・余剰モードの分離が起こる根拠はないことに留意すべきである。

4 長距離相互作用系における示量性と「準」示量性

前節で考察した散逸付きの偏微分方程式系は物理的には短距離相互作用をする系であり、その場合は一般に有限次元の慣性多様体の存在が期待されること、そして、物理モードの数から推察される慣性多様体次元はシステムサイズに比例し、示量性をもつことを見た。ただし、相互作用が短距離的であっても長距離的な相関が生じることもある。発達乱流などはその代表的な例であるが、こうした場合でも、例えば 2 次元 Navier-Stokes 方程式でも有限次元の慣性多様体が存在するかは大変関心の持たれている問題であり、著

者の知る限り未解決問題として残されている [18, 25]*¹⁰。

一方、重力多体系やプラズマなど、系の相互作用そのものが長距離的な場合は、有効自由度の問題を超えて様々な異常性が現れることが知られており、近年活発に研究がなされている [26, 27]。そうした系で特に調べられているのは熱統計力学的諸性質であり、負の比熱やアンサンブル不一致、準定常状態の存在などが明らかになって大変関心がもたれている [26, 27]。力学系としても、集団カオスの出現 [28] などの特徴を示し、カオスの示量性などの基本的性質も成否が明らかではない。カオス示量性の判定は、通常 Lyapunov 指数 $\lambda^{(j)}$ を大きい順に並べ、それをシステムサイズ N でリスケールしたインデックス $(j - 0.5)/N$ に対してプロット*¹¹したときに、大きな N で連続的なスペクトルに収束するか否かで判定される [3] が、長距離相互作用の系では N 依存性が強く残り続け、その最終的な様相が判然としないのが現状である。そこで我々は、長距離相互作用系の中でも最も単純な大域結合系に注目し、Lyapunov ベクトルの時間発展をある種のランダム乗算過程とみなすことで、Lyapunov 指数のシステムサイズ N への依存性を解析した。その結果、散逸のある大域結合系では $O(N)$ 個の示量的 Lyapunov モードに加え、 $O(\log N)$ 個の「準示量的モード」が存在することを示した [10]。以下、この成果の概要を紹介し、最後に保存系への拡張 [11] を議論する。

まず、 N 個の同一素子が大域的に結合した系、すなわち各素子とその平均場とのみ相互作用する系では、示量性を予言するナイーブな議論ができることを紹介する：こうした系では、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ をとると個々の素子の平均場への寄与がなくなるため、単一素子が平均場という名の外場によって駆動される系に帰着する。すると、全ての素子が自明に同じ Lyapunov 指数 (λ_0 とする) をもつので、 $N \rightarrow \infty$ で Lyapunov スペクトルは平坦 $\lambda^{(j)} \rightarrow \lambda_0$ で、示量性は自明な意味で成立する。この考え方を、ここでは「外場駆動近似」と呼ぶこととする。実際の大量結合系の数値計算（例えば [14, 15]）を見ると、確かにサイズの増大とともにスペクトルの傾きは緩やかにはなるが、その傾向は遅く、特にスペクトル両端のサイズ依存性は外場駆動近似の予言に従わないように見える。

そこで、Lyapunov モードの時間発展を理論的に取り扱ってみよう。念頭に置く力学系は、単一素子 $f(x)$ が大域結合した写像系

$$x_i^{t+1} = f(y_i^t), \quad y_i^t = (1 - \varepsilon)x_i^t + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{i'=1}^N x_{i'}^t, \quad (7)$$

*¹⁰ ただし、2 次元 Navier-Stokes 方程式のアトラクター上の解をある種の反応拡散方程式系で厳密に表現し、それに対して慣性多様体の存在を証明することはできている [25]。

*¹¹ j/N に対してプロットしても十分大きな N に対しては同じであるが、収束は、より中立的な $(j - 0.5)/N$ というリスケーリングの方が早い場合が多いようである。

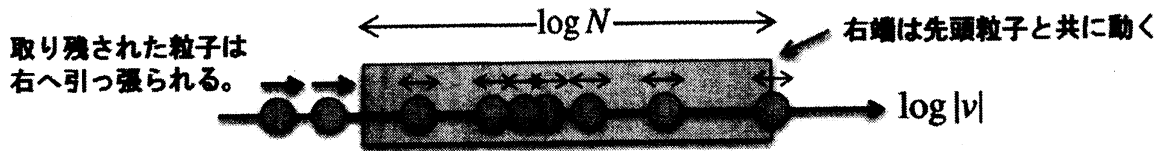


図 4: ランダム乗算近似 (8) における Lyapunov ベクトルのダイナミクス

である。以下、簡単のため、 $f(x)$ は 1 次元写像だと考える。この接空間ダイナミクスは、Lyapunov ベクトルの成分を v_i^t とすると

$$v_i^{t+1} = \mu_i^t \left[(1 - \varepsilon) v_i^t + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{i'=1}^N v_{i'}^t \right], \quad (8)$$

と書ける。ここで、 μ_i^t は Jacobian $f'(y_i^t)$ であるが、写像 f が十分強いカオス的混合を示すときは μ_i^t はランダム乗数で近似することができる。そこで以下、 $f'(y_i^t)$ が各 i 毎に独立と思える程度に結合定数 ε が小さいと仮定して、 μ_i^t を i, t に関して独立な乱数と扱うことにする。さて、式 (8) において、外場駆動近似は大域結合項 (第 2 項) を無視することに相当する。このとき、両辺の対数をとれば、接空間ダイナミクスは座標 $\log |v_i^t|$ の粒子が示すバイアス付きブラウン運動に帰着し、平均速度は $\lambda_0 \equiv \langle \log |(1 - \varepsilon) \mu_i^t| \rangle$ 、拡散係数は $D \equiv \langle (\log |(1 - \varepsilon) \mu_i^t| - \lambda_0)^2 \rangle$ で与えられる。ここで、 λ_0 は外場駆動近似において現れる Lyapunov 指数になっている。

こうして見ると、もとの系 (8) に対応するのは N 個の相互作用するブラウン運動粒子である。いま、Lyapunov ベクトル $[v_1^t, \dots, v_N^t]$ が少数個の自由度上に十分局在しており、式 (8) の大域結合項 $\sum_{i'=1}^N v_{i'}^t$ は絶対値最大の要素 v_M^t の値とほぼ等しいと仮定する。この仮定は後で検証するが、集団挙動などが起こらなければ成り立つことが経験的に知られている [14, 15]。この仮定の下では、式 (8) の括弧内第 2 項は $(\varepsilon/N) v_M^t$ であり、 N が大きければ通常第 2 項は十分小さく、粒子 $\log |v_i^t|$ は先に考えたブラウン運動を示す。しかし、ブラウン運動の結果 $|(1 - \varepsilon) v_i^t| \gg |(\varepsilon/N) v_M^t|$ が成り立たなくなるくらい小さな $|v_i^t|$ が現れると、第 2 項が効果を発揮し、どの $|v_i^t|$ も $|(\varepsilon/N) v_M^t|$ より大きくなるようにする。言い換えれば、この問題は、 N 個のブラウン運動粒子 $\log |v_i^t|$ が大きさ $\log[N(1 - \varepsilon)/\varepsilon]$ の箱の中に閉じ込められており、箱の右端は先頭粒子と共に移動して、箱の左端はそれより後ろに取り残された粒子を引っ張る、図 4 の状況に対応する。そして、この時の箱の平均速度が最大 Lyapunov 指数 $\lambda^{(1)}$ に他ならない^{*12}。この運動を記述するには、以下の

^{*12} ベクトル v_i^t の初期条件として任意のものを考えているので、現れる Lyapunov 指数は最大のものとなる。2 番目以降の Lyapunov モードは特殊な初期条件の場合に相当するが、それを理論的にどう扱うべきかは明らかではない。

Fokker-Planck 方程式を箱の平均速度 $\lambda^{(1)}$ で移動する座標系において書き下すのが便利である：

$$\frac{\partial}{\partial t} P(u, t) = -\frac{\partial}{\partial u} [(\lambda_0 - \lambda^{(1)})P] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}. \quad (9)$$

ここで、 u はこの座標系における座標であり、粒子分布 $P(u, t)$ はおよそ $0 \leq u \leq u_{\max} \equiv \log[N(1 - \varepsilon)/\varepsilon]$ の範囲内に閉じ込められているとする。 N が大きければ、この定常解は $u_{\max} \rightarrow \infty$ における解 $P_s(u) = (2\Delta\lambda^{(1)}/D) \exp(-2\Delta\lambda^{(1)}u/D)$, $\Delta\lambda^{(1)} \equiv \lambda^{(1)} - \lambda_0$ で近似され、さらに箱の定義により、その右端 $u = u_{\max}$ にいる粒子数は $O(1)$ 個、すなわち $\int_{u_{\max}}^{\infty} P_s(u)du = c_1/N$ である (c_1 は $O(1)$ の定数)。以上により、最大 Lyapunov 指数の N 依存性を表す式

$$\Delta\lambda^{(1)} = \lambda^{(1)} - \lambda_0 = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{c_2}{\log N} \right) + O\left(\frac{1}{\log^2 N} \right) \quad (10)$$

が導出される [10]。ここで、 $c_2 \equiv \log[\varepsilon/((1 - \varepsilon)c_1)]$ である。また、ベクトル成分 v_i の確率密度は $\mathcal{P}(v) = P_s(\log v)(du/dv) \sim v^{-2-c_2/\log N}$ であり、冪が -1 より小さいことから、先に用いた局在の仮定とも consistent になっていることがわかる。さらに、式 (8) を時間に対し逆向きに書き換えて同様の議論を展開することにより、最小の Lyapunov 指数 $\lambda^{(N)}$ に対しても、式 (10) と同様の式が (符号を全て反転させたうえで) 成り立つことが示せる。

式 (10) はいくつかの興味深い性質を示している。まず、システムサイズ N には対数的に依存し、 $N \rightarrow \infty$ 極限でも外場駆動近似の値 λ_0 には一致しない。この漸近的なずれの大きさは $D/2$ 、つまり純粋に拡散係数で与えられ、少なくともランダム乗算近似のもとでは結合定数 ε にはよらないという、いくぶん直感に反する結果となる。これらの結果は、ランダム乗算過程 (8) の直接数値計算のほか、本物の力学系 (ここでは大域結合 skewed-tent 写像) でも確かめられている [図 5(a,b)]。以上の解析によって、少なくとも最大・最小の Lyapunov 指数は外場駆動近似に従わないことがわかった。では外場駆動近似は全く正しくないかという、実はそうではない。 N 個の Lyapunov 指数を全て数値的に計算すると、そのほとんどは外場駆動近似の値 λ_0 に向かって近づいていく。特にランダム乗算過程 (8) では、リスケールしたインデックス $h \equiv (j - 0.5)/N$ を固定すると $(\lambda - \lambda_0) \sim N^{-1/2}$ のように漸近すること、このスケーリング則に従わないスペクトル両端の指数は全体から見た割合にして $O(1/N)$ 程度しか存在しないことが数値的に見出された [10]。さらに、そうした非示量的な指数のスペクトル $\lambda^{(j)}$ は、Lyapunov インデックス j を $\log N$ によってスケールすると collapse することができ、そこにある指数全てが式 (10) の関数形に従って、単一の値 $\lambda_0 + D/2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^{(1)}$ に漸近していくことが、ランダム乗算過程 (8) と skewed-tent 写像で示されている [10]。以上をまとめると、散逸系の Lyapunov スペクトルは、(i) 漸近的に外場駆動近似に従う $O(N)$ 個のバルク指数と (ii) ス

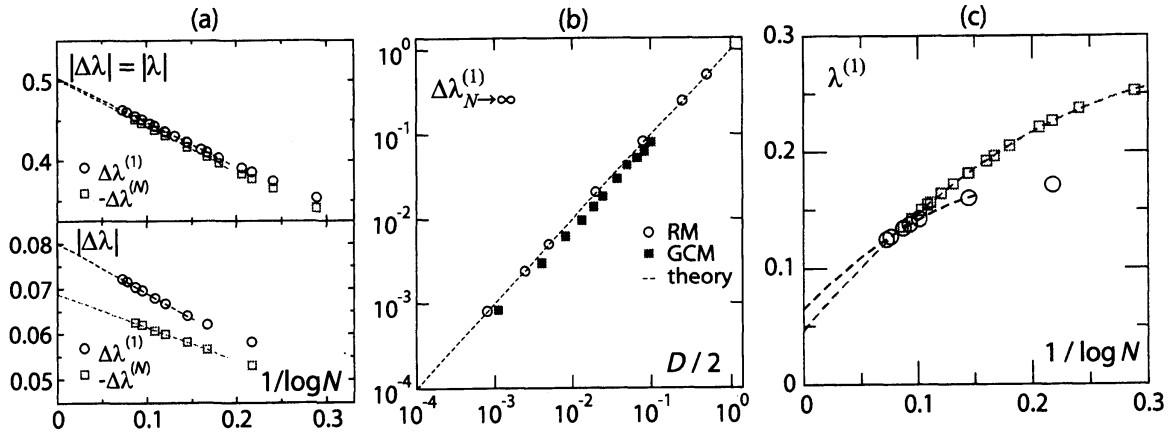


図 5: 大域結合の散逸系 (a,b) および HMF モデル (c) における最大・最小 Lyapunov 指数 $\lambda^{(1)}, \lambda^{(N)}$ のシステムサイズ依存性 [10, 11]。(a) ランダム乗算過程 (8) (上) および大域結合 skewed-tent 写像 (下) の結果。パラメータの設定などは原著論文 [10] を参照。(b) 無限サイズ極限 $N \rightarrow \infty$ における、外場駆動近似の指数からのずれ $\Delta\lambda^{(1)} \equiv \lambda^{(1)} - \lambda_0$ と拡散係数 D との関係 (ランダム乗算過程: ○、skewed-tent 写像: ■)。破線は理論式 (10) の予言 $\Delta\lambda_{N \rightarrow \infty}^{(1)} = D/2$ 。(c) HMF モデルの秩序相 $U = 0.5$ (○)、 $U = 0.7$ (□) の場合。破線は放物線によるフィッティング。

ペクトル両端にある $O(\log N)$ 個の「準示量的」な指数からなり、準示量的指数は有限時間 Lyapunov 指数のゆらぎの効果で、式 (10) のように特異な漸近挙動を示すことが判明した。以上の成果は主にランダム乗算近似によって得られたわけだが、Lyapunov 指数のように長時間極限の性質に関しては、ブラウン運動の普遍性により、(混合性の十分強い) 多くのカオス系が本稿で述べた描像に従うものと期待される。

最後に、本節で述べた結果が保存系にどこまで当てはまるかを考察しよう [11]。この場合、全系のエネルギーが保存することに注意しなくてはならない。 $N \rightarrow \infty$ 極限で平均場がカオス的にふるまう場合は、平均場との相互作用によって局所的なエネルギーは増減できるので、散逸系の議論をほぼそのまま適用することができる。一方、平均場が定常または規則的にふるまう場合は局所的なエネルギーも保存するので、散逸系で考えたように自由なブラウン運動で置き換えるのは危険である。具体例で議論するため、長距離相互作用をする保存系の標準モデルとして非常に詳しく研究されている Hamiltonian mean field (HMF) モデル [26, 27]

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] \quad (11)$$

を考えよう。このモデルは、1 自由度あたりの内部エネルギー U が $U_c = 3/4$ のとき相転

移を起こし、秩序相 $U < U_c$ では平均場 $Me^{\Theta} \equiv \frac{1}{N} \sum_j e^{i\theta_j}$ が非ゼロの値をとる [26, 27]。そして、運動方程式はこの平均場を用いて

$$\dot{\theta}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = \frac{1}{N} \sum_j \sin(\theta_j - \theta_i) = M \sin(\Theta - \theta_i) \quad (12)$$

のように簡便に表わすことができる。ここで、 $N \rightarrow \infty$ 極限を先にとれば、局所的ダイナミクス (12) は 2 自由度しかもたないため、カオスは存在できないことに注意しよう。事実、無秩序相 $U > U_c$ では、接空間ダイナミクスをシンプレクティック性を満たしたランダム行列による時間発展とみなすことで、最大 Lyapunov 指数が $\lambda^{(1)} \sim N^{-1/3}$ のように減衰することが示されている [26]。一方、秩序相 $U < U_c$ の無限サイズ極限に関しては、カオスの存続について相反する数値計算結果が報告されており、状況は不透明であった [11]。

そこで我々は、HMF モデルの秩序相に対し、本節で紹介した議論を拡張して解析したところ、無限サイズ極限でもカオスが残ることを発見した [11]。散逸系において $N \rightarrow \infty$ 極限を先にとる外場駆動近似が（最大 Lyapunov 指数に関しては）正しくなかったのと同様、HMF モデルにおいても、まず N は有限にとどめ、Lyapunov 指数における無限時間極限を先にとるのが自然である。このとき、局所エネルギー $h_i \equiv p_i^2/2 + 1 - M \cos(\theta_i - \Theta)$ はゆっくり、ランダムに値を変えていき、それが separatrix エネルギー $h_s = 1 + M$ に到達したときに接空間ダイナミクスは大きなゆらぎを受ける。そこで、HMF モデルの振動子を、separatrix から $O(N^{-1/2})$ 程度の近傍にいて接空間がゆらぐグループと、separatrix から遠く接空間のゆらぎが無視できるグループの 2 つに分け、前者のグループに属する自由度のみ本節前半で考察したようなブラウン運動モデルに従うと仮定すると、最大 Lyapunov 指数は散逸系とほとんど同じ式

$$\lambda^{(1)} = \lambda_\infty + \frac{c}{\log N} + O\left(\frac{1}{\log^2 N}\right), \quad (13)$$

$\lambda_\infty = D/4$ に従うことが導出できる [11]。数値計算結果と比較すると、 λ_∞ の定量的な値には 2 倍ほどのずれが認められたものの、サイズ N への依存性は式 (13) の形に従うことが確認された [図 5(c)]。特に、 $N \rightarrow \infty$ 極限で $\lambda^{(1)} > 0$ なので、カオスが生き残る。原著論文では、最大 Lyapunov 指数のカオス性に対応する Lyapunov ベクトルの主要成分が separatrix 近傍に局在するために生じること [10]、過去の数値計算が一見矛盾する結果を出していた理由は HMF モデルの間欠性にあること [11]、HMF モデルでも非示量的な Lyapunov 指数は $O(\log N)$ 個存在しそうだということ [11] などを示している。また、ここで考察した局所エネルギーの変動とそれに伴う接空間のゆらぎは HMF モデル以外で

も期待されるメカニズムであり、従って準示量的 Lyapunov モードの出現は、散逸系・保存系を問わず、大域結合の力学系に広く期待される現象ではないかと考察している。

5 むすびに

本稿では、Lyapunov 解析、特に Lyapunov ベクトルをキーワードに、大自由度力学系の有効次元や示量性を調べる最近の取り組みを紹介した。他にも多方面で応用の機運が高まっていること [7, 17] は既に述べたとおりである。しかし、Lyapunov ベクトルが実用計算できるようになってからまだ数年しか経っていないことを考えれば、まだまだ知られていない応用例があったとしても不思議ではない。第 2 節でまとめたように、Lyapunov ベクトルは系に内在する様々な不安定性がどの自由度によって担われているかを指し示し、また双曲性という力学系にとって最も基本的な性質の 1 つを測る手段にもなる。前者の特長は例えばカオス制御などで直接役立てられそうに思われるし、後者の特長からは、「大自由度カオスが実効的に双曲的な系のようにふるまう」という Gallavotti のカオス仮説 [29] の定量的検証が可能なのにも思われる。Lyapunov ベクトルを組み入れた Lyapunov 解析の新展開に本稿で予想だにできなかった方向性が現れることを楽しみにして筆を置くこととする。

謝辞：本稿の第 3,4 節で紹介した成果は Hugues Chaté, Francesco Ginelli, Hong-liu Yang, Günter Radons, Antonio Politi, Alessandro Torcini の諸氏との共同研究により得たものです。ここに謝辞を申し上げます。最後に、京都大学 数理解析研究所 研究集会「力学系の作る集団ダイナミクスー保存系・散逸系の枠組みを越えてー」にご招待下さり、本講究録の執筆の機会を与えて下さった京都大学の山口義幸氏に厚くお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] J. P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [2] D. Ruelle, *Commun. Math. Phys.* **87**, 287 (1982).
- [3] P. Manneville, *Lecture Notes in Physics* **230**, 319 (1985).
- [4] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chaté, R. Livi, and A. Politi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 130601 (2007).
- [5] F. Ginelli, H. Chaté, R. Livi, and A. Politi, *J. Phys. A* (to be published in Special issue [7]).
- [6] P. V. Kuptsov and U. Parlitz, *Journal of Nonlinear Science*, *J. Nonlinear Sci.* **22**, 727

- (2012).
- [7] J. Phys. A, Special issue on Lyapunov analysis (in press).
 - [8] H.-I. Yang, K. A. Takeuchi, F. Ginelli, H. Chaté, and G. Radons, Phys. Rev. Lett. **102**, 074102 (2009).
 - [9] K. A. Takeuchi, H.-I. Yang, F. Ginelli, G. Radons, and H. Chaté, Phys. Rev. E **84**, 046214 (2011).
 - [10] K. A. Takeuchi, H. Chaté, F. Ginelli, A. Politi, and A. Torcini, Phys. Rev. Lett. **107**, 124101 (2011).
 - [11] F. Ginelli, K. A. Takeuchi, H. Chaté, A. Politi, and A. Torcini, Phys. Rev. E **84**, 066211 (2011).
 - [12] I. Shimada and T. Nagashima, Prog. Theor. Phys. **61**, 1605 (1979).
 - [13] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, Meccanica **15**, 21 (1980).
 - [14] K. A. Takeuchi, F. Ginelli, and H. Chaté, Phys. Rev. Lett. **103**, 154103 (2009).
 - [15] K. A. Takeuchi and H. Chaté, arXiv , 1207.5571 (2012).
 - [16] M. Inubushi, M. U. Kobayashi, S.-i. Takehiro, and M. Yamada, Phys. Rev. E **85**, 016331 (2012).
 - [17] 小林幹, 数理解析研究所講究録 本巻.
 - [18] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam, *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations* (Springer, Berlin, 1988).
 - [19] M. S. Jolly, R. Rosa, and R. Temam, Adv. Differ. Eqs. **5**, 31 (2000).
 - [20] L. Giacomelli and F. Otto, Commun. Pure Appl. Math. **58**, 297 (2005).
 - [21] A. Björck and G. H. Golub, Math. Comput. **27**, 579 (1973).
 - [22] C. Pugh, M. Shub, and A. Starkov, Bull. Am. Math. Soc. **41**, 1 (2004).
 - [23] J. Bochi and M. Viana, Ann. Math. **161**, 1423 (2005).
 - [24] J.-P. Eckmann, C. Forster, H. A. Posch, and E. Zabey, J. Stat. Phys. **118**, 813 (2005).
 - [25] M. Kwak, Indiana Univ. Math. J. **41**, 927 (1992).
 - [26] T. Dauxois, V. Latora, A. Rapisarda, S. Ruffo, and A. Torcini, Lecture Notes in Physics **602**, 458 (2002).
 - [27] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo, Phys. Rep. **480**, 57 (2009).
 - [28] K. Kaneko, Physica D **86**, 158 (1995).
 - [29] G. Gallavotti, J. Stat. Phys. **84**, 899 (1996).