

高レベルの対数的大域的 Cartier 変換について (On log global Cartier transform of higher level)

By

大川 幸男 (Sachio OHKAWA)*

Abstract

This is a research announcement of the paper [O] by the author. We explain the construction and an outline of the proof of the log global Cartier transform of higher level, which is a log and higher level version of the global Cartier transform of Ogus-Vologodsky.

§ 1. 序

本稿は論文 [O] の要約である. Simpson は論文 [Si] においてある種の Higgs 束とある種の可積分接続付きのベクトル束との間の圏同値 (Simpson 対応) を確立した. この仕事に触発され, Ogus-Vologodsky は Simpson の理論の正標数における類似を研究した [OV]. 表題に表れている大域的 Cartier 変換 (global Cartier transform) とは Simpson 対応の正標数における類似であり, 彼らの論文の主定理の一つである.

大域的 Cartier 変換について少し詳しく述べる. $X \rightarrow S$ を標数 $p > 0$ の scheme の間の smooth な射とし, $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ を Berthelot の定義したレベル 0 の微分作用素のなす層とする. X' を S の絶対 Frobenius F_S による X の引き戻しとし, また $\mathcal{T}_{X'/S}$ を $X' \rightarrow S$ の接束, $S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})$ をその対称代数とする. このとき X 上の可積分接続付き $\mathcal{O}_X$ -加群とは左 $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ -加群, X' 上の Higgs 加群とは $S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})$ -加群のことに他ならない. 大域的 Cartier 変換は大雑把には圏同値

$$\left(\begin{array}{c} X \text{ 上の} \\ \text{ある種の } \mathcal{D}_{X/S}^{(0)}\text{-加群のなす圏} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} X' \text{ 上の} \\ \text{ある種の Higgs 加群の圏} \end{array} \right)$$

のことである. その構成の鍵は $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ の束屋代数性であり以下のように要約される.

Received March 30, 2014. Revised August 1, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 13N10, 16H05, 16S32.

Key Words: log geometry, log $\mathcal{D}$ -module, Higgs module, Cartier transform.

Supported by the Program for Leading Graduate Schools, MEXT, Japan.

*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.

e-mail: ohkawa@ms.u-tokyo.ac.jp

© 2015 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

1. p -曲率写像 $\mathcal{T}_{X'/S} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ は $S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})$ から $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ の中心への同型を定める.
2. $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ は $S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})$ 上の東屋代数をなす, 即ちある忠実平坦な係数拡大 $S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S}) \rightarrow \mathcal{R}$ と局所自由 $\mathcal{R}$ -加群 $\mathcal{M}$ が存在して, $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)} \otimes_{S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})} \mathcal{R} \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ となる. このとき $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ は $\mathcal{R}$ 上分裂するという.
3. $X' \rightarrow S$ の $\text{mod } p^2$ への持ち上げ, すなわち $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 上平坦な scheme の射 $\tilde{X}' \rightarrow \tilde{S}$ であって, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への底変換が $X' \rightarrow S$ に一致するものの存在を仮定する. このとき $\hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ 上の東屋代数 $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)} \otimes_{S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})} \hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ は $\hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ 上分裂する. ここで $\hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ は $\mathcal{T}_{X'/S}$ の定める PD 代数の完備化を表す.

するとあとは森田同値を利用し左 $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)} \otimes_{S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S})} \hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ -加群の圏と $\hat{\Gamma}.\mathcal{T}_{X'/S}$ -加群の圏を結びつけることで大域的 Cartier 変換を得る [OV, Theorem 2.8]. 古典的に, p -曲率が零の $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ -加群のなす圏と $\mathcal{O}_{X'}$ -加群のなす圏との間の圏同値が Cartier, Katz 等によって知られていた (Cartier 降下 [Ka]). 上記の大域的 Cartier 変換はこの一般化と見なすことができ, 名前の由来もそこにあると思われる.

現在 Ogus-Vologodsky の理論は log scheme の場合 [S] へ, また $\mathcal{D}_{X/S}^{(0)}$ の一般化として高レベルな微分作用素の場合 [GLQ] へと, 2つの方向への一般化が考えられている. 筆者の研究 [O] の動機はこの二つの一般化を含むような一般論の構築であり, 特に筆者は大域的 Cartier 変換を対数的かつ高レベルの微分作用素の場合に一般化した. この要約の目的は対数的かつ高レベルの場合の大域的 Cartier 変換の存在とその証明の流れを解説することである. 本稿の構成は以下の通りである. 2 節, 3 節は本稿を読むために必要な知識の簡単なまとめである. 4 節において上の要約 1, 2 の対数的かつ高レベルな場合を述べる. 5 節において上の要約 3 の対数的かつ高レベルな場合を述べる.

謝辞

この研究を遂行するにあたって筆者を指導して下さった指導教員の志甫淳先生に心から感謝する. また講演の機会を与えて下さったプログラム委員の落合理先生, 辻雄先生, 木村巖先生にも深く感謝する.

§ 2. log scheme 上の対数的微分作用素の層

この節では log scheme と, その上に定義されるレベル m の対数的微分作用素の層に関する基本事項について復習する. log scheme についての詳細は [K] を, レベル m の対数的微分作用素の層についての詳細は [M] を参照されたい. 以下本稿において表れる全ての層は特に断らない限り étale 位相の下で考える.

§ 2.1. log scheme

まず log scheme の概念を復習する [K, (1.2)].

定義 2.1. scheme X 上の log structure とは X 上の可換モノイドの層 $\mathcal{M}_X$ とモノイドの準同型 $\alpha_X : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ で, $\alpha_X^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^*$ を満たすものとの組のことである. log structure を単に $\mathcal{M}_X$ と略記する. scheme X とその上の log structure $\mathcal{M}_X$ の組み $(X, \mathcal{M}_X)$ を log scheme とよぶ.

例 2.2. scheme X と自然な埋め込み $\alpha : \mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ の組は log scheme を定める. これを自明な log scheme と呼ぶ. 全ての scheme はこの方法で自然に log scheme と見なすことができ, log scheme は scheme の一つの拡張概念を与えている.

例 2.3. 簡単のため k を正標数の代数閉体とする. アフィン直線 $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[T]$ を考える. 開埋め込み $\text{Spec } k[T^{\pm 1}] \hookrightarrow \text{Spec } k[T]$ を j とおき, $\mathbb{A}_k^1$ 上の可換モノイドの層 $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1}$ を $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1} := j_* \mathcal{O}_{\text{Spec } k[T^{\pm 1}]}^* \cap \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1}$ と定義する. $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1}$ と自然な埋め込み $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1}$ は $\mathbb{A}_k^1$ 上の log structure を定める.

log scheme の射の概念も自然に定義される [K, (1.2)]. 通常は log structure が局所的にある有限生成整モノイドから自然に定まっているという条件を課することが多い. この条件を課した log scheme を fine log scheme といい, 本稿では以下 fine log scheme のみを取り扱う. 上の例は全て fine log scheme である. fine log scheme の正確な定義は [K, (2.3)] を参照されたい. 以下では log scheme を単に一つの記号で略記する.

定義 2.4. fine log scheme の射 $f : X \rightarrow Y$ が exact closed immersion とは, 下部 scheme の間の射として closed immersion でありかつ対応するモノイドの層の準同型 $f^{-1}(\mathcal{M}_Y / \mathcal{O}_Y^*) \rightarrow \mathcal{M}_X / \mathcal{O}_X^*$ が同型となることである.

この exact closed immersion を用いて fine log scheme の圏において infinitesimal lifting property を定式化することで, 通常の scheme 論の場合と同様に log smooth, log étale といった概念が定義される [K, (3.3)].

§ 2.2. レベル m の対数的微分作用素の層

この節では Montagnon [M] によって定義されたレベル m の対数的微分作用素の層について述べる. これは Berthelot [B1] によって定義されたレベル m の微分作用素の層の log scheme への自然な一般化である. [O] の 3.1 節により詳細なレビューがある.

0 以上の整数 m を固定する. まず m -PD structure の定義を復習する [M, Définition 1.2.4].

定義 2.5. X を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の log scheme, I を $\mathcal{O}_X$ の準連接イデアルとする. I 上の m -PD structure とは PD イデアル (J, γ) であって, $I^{(p^m)} + pI \subset J \subset I$ かつ γ は $p\mathbb{Z}_{(p)}$ の標準的な PD structure と両立するという条件を満たすもののことである. ここに $I^{(p^m)}$ は I の全ての切断の p^m -冪で生成されるイデアルを表す.

$m = 0$ の場合, m -PD structure の定義は古典的な PD structure のそれと一致する.

以下しばらく $X \rightarrow S$ を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の fine log scheme の間の log smooth な射とし, 底 log scheme S には適当な m -PD structure が備わっているとす。対角射 $X \hookrightarrow X \times_S X$ に付随して定まる log m -PD envelope を $X \hookrightarrow P_{X/S,(m)}$ とする, 即ち $X \hookrightarrow P_{X/S,(m)}$ は $X \hookrightarrow X \times_S X$ 上の exact closed immersion とその定義イデアル上の m -PD structure の組の中で普遍的な対象である (詳細は [M, Proposition 2.1.1] を参照されたい). $P_{X/S,(m)}$ の構造層を $\mathcal{P}_{X/S,(m)}$ と書き, 第一射影に対応する環準同型によって $\mathcal{O}_X$ -加群とみなす. さらに $P_{X/S,(m)}$ に対応する exact closed immersion $X \hookrightarrow P_{X/S,(m)}$ の定義イデアルを $\bar{I}$ とおき, $\bar{I}$ に付随した m -PD-adic filtration ([B2] Définition A.3) を $\{\bar{I}^{\{n\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す. 自然数 n に対して $\mathcal{P}_{X/S,(m)}^n := \mathcal{P}_{X/S,(m)} / \bar{I}^{\{n+1\}}$ とおく. 以上の記号のもとレベル m の対数的微分作用素の層 $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ を

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(m)} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S,(m)}^n, \mathcal{O}_X)$$

と定義する. $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ は自然な余積 $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$ から誘導される $\mathcal{O}_X$ -準同型 $\mathcal{P}_{X/S,(m)}^{n+n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X/S,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X/S,(m)}^{n'}$ により (非可換) $\mathcal{O}_X$ -代数をなす [M, 2.3.2].

注. log smooth 性の仮定から $X \rightarrow S$ の log 余接束 $\Omega_{X/S}^1$ (定義は [K, (1.7)] を参照されたい) の $\mathcal{O}_X$ -局所基底をとることができる. それに付随して $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{X/S,(m)}^n, \mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{O}_X$ -局所基底 $\{\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}\}$ が定まり,

$$\mathcal{D}_{X/S}^{(m)} = \left\{ \sum_{\text{有限和}} f_{\underline{k}} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \mid f_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X \right\}$$

と書くことが出来る. ここに $\underline{k}$ は多重指数を表す. X, S の log structure が自明な場合には $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ は直感的にはレベル 0 の微分作用素環の元 $\underline{\partial}^{\underline{k}}$ の $\frac{q!}{k!}$ 倍に相当する元である. ただしここに $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, $0 \leq \underline{r} < p^m$ である. $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ の演算や $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ の $\mathcal{O}_X$ への作用の明示的な記述については [M, 2.3] を参照されたい.

§ 3. log structure に付随して定まる indexed 代数

この節では indexed 加群に関する基本事項 [L], [S] を復習した後に, Lorenzon [L] および Montagnon [M] による二つの indexed 代数 $\mathcal{A}_X^{gp}$, $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ を導入する. indexed 加群の基本事項については [O] の 2 節に, 二つの indexed 代数 $\mathcal{A}_X^{gp}$, $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ については [O] の 4.1 節により詳細なレビューがある.

§ 3.1. indexed 加群

X を scheme, $\mathcal{I}$ を X 上のアーベル群の層とする. $\mathcal{I}$ の加法 $\mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ を a とおく.

定義 3.1. (1) $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -加群とは $\mathcal{I}$ 上の層 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ 上の加法 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{I}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{I}$ 上の単位元射 $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{I}$ 上の逆元射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{I}$ 上の $\mathcal{O}_X$ -作用 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ の組で, 通常の $\mathcal{O}_X$ -加群の公理をみたすものである.

(2) $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数とは, $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -加群 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{O}_X$ -双線形な乗法 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, 零切断 $0: e \rightarrow \mathcal{I}$ 上の大域切断 $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ の組で通常の非可換環の公理をみたすものである. $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数が可換であるという概念も自然に定義される.

$\mathcal{A}$ を $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数とする. $\mathcal{J}$ を X 上の $\mathcal{I}$ -集合の層とし, $\mathcal{I}$ の $\mathcal{J}$ への作用 $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ を ρ とおく.

定義 3.2. $\mathcal{J}$ -indexed $\mathcal{A}$ -加群とは, $\mathcal{J}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -加群 $\mathcal{E}$ と ρ 上の $\mathcal{O}_X$ -線形な $\mathcal{A}$ -作用 $\mathcal{A} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ の組で, 通常の環上の加群の公理をみたすもののことである.

通常の環上の加群の場合と同様に, 然るべき状況において indexed 加群としてのテンソル積, 内部 Hom, 局所自由性といった対象, 概念が自然に定義, 構成される. また Schepler は森田同値が indexed 加群の枠組みでも成立することを証明した [S, Theorem 2.2].

命題 3.3. $\mathcal{A}$ を可換 $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数とする. $\mathcal{J}$ を $\mathcal{I}$ -集合の層, M を階数有限の局所自由 $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{A}$ -加群とする. $\mathcal{E}nd_{\mathcal{A}}(M) =: \mathcal{E}$ (これは自然に $\mathcal{I}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数の構造を持つ) とおく. この時, 関手 $E \mapsto M \otimes_{\mathcal{A}} E$ は $\mathcal{J}$ -indexed $\mathcal{A}$ -加群のなす圏から $\mathcal{J}$ -indexed 左 $\mathcal{E}$ -加群のなす圏への圏同値を与える.

§ 3.2. $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数 $\mathcal{A}_X^{gp}$

X を fine log scheme, $\mathcal{M}_X$ を X の log structure とする. アーベル群の層 $\mathcal{M}_X^{gp}/\mathcal{O}_X^*$ を $\mathcal{I}_X^{gp}$ とおく. ここに $\mathcal{M}_X^{gp}$ は $\mathcal{M}_X$ の群化を表す. 以下で, ある意味では log scheme X に対する構造層の一般化と思える $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数 $\mathcal{A}_X^{gp}$ を導入する. まず $\mathcal{A}_X^{gp} := (\mathcal{M}_X^{gp} \times \mathcal{O}_X)/\sim$ と定義する, ここに $\sim$ は, $a \in \mathcal{O}_X^*$, $x \in \mathcal{M}_X^{gp}$, $y \in \mathcal{O}_X$ に対し $(ax, y) \sim (x, ay)$ で定義される同値関係である. $\mathcal{A}_X^{gp}$ は自然な射影の合成 $\mathcal{M}_X^{gp} \times \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{M}_X^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp}$ が誘導する射によって $\mathcal{I}_X^{gp}$ 上の層と見なせる. また第二成分から定まる $\mathcal{O}_X$ -作用, $\mathcal{M}_X^{gp}$ の和から誘導される乗法によって $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_X$ -代数をなす. $\mathcal{A}_X^{gp}$ には $\mathcal{O}_X$ の $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ -作用が自然に延長され, この作用は Leibniz 型の公式をみたすことが知られている. 従って係数拡大

$$\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)} := \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$$

には自然な非可換 $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{A}_X^{gp}$ -代数の構造が入る. 4 節ではこの $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ の構造, 特に東屋代数性について述べることになる.

§ 3.3. $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_{X'}$ -代数 $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$

$X \rightarrow S$ を標数 p の fine log scheme の間の log smooth な射とし, さらに S には零イデアル上の標準的な m -PD structure を与える. また簡単のため $r := \text{rank}_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1$ は定

数であると仮定する. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & F_X & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & X' & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & X \\
 & \searrow & & & \downarrow & \square & \downarrow \\
 & & & & S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

ここに F_X 及び F_S はそれぞれ X および S の絶対 Frobenius の $(m+1)$ 回合成であり, 右の四角形はカルテシアンである. また上の図式 $X \rightarrow X' \rightarrow X'' \rightarrow X$ は purely inseparable な射と log étale な射への一意的な分解を表す. ここに表れた $X \rightarrow X'$ を $F_{X/S}$ と書き, これを $X \rightarrow S$ の相対 Frobenius と呼ぶ. 合成 $X' \rightarrow X'' \rightarrow X$ を π とおく. まず $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed アーベル群の層 $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ を

$$\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} := \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X/S}^{(m+1)}} \left(F_{X/S}^* \mathcal{D}_{X'/S}^{(0)}, \mathcal{A}_X^{gp} \right)$$

と定義する. $F_{X/S}^* \mathcal{D}_{X'/S}^{(0)}$ に入る左 $\mathcal{D}_{X/S}^{(m+1)}$ -作用については復習しない. 詳しくは [M, Chapitre 3] あるいは [O] の 4.1.2 節を参照されたい. 写像 $i: \mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ を $g \mapsto g(1 \otimes 1)$ で定めると, これは単射であり $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ は indexed 部分代数をなすことが確かめられる. さらに $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ に $\mathcal{O}_{X'}$ -作用を $\mathcal{O}_{X'}$ の $F^* \mathcal{D}_{X'/S}^{(0)}$ への右からの積によって定めることで, これは $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_{X'}$ -代数をなす. 以上により我々は次の図式を得た.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} & \xrightarrow{i} & \mathcal{A}_X^{gp} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{O}_{X'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X
 \end{array}$$

例 3.4. $X \rightarrow S$ を正標数の (通常の) scheme の smooth な射とし (したがって $X \rightarrow S$ の相対 Frobenius $X \rightarrow X'$ は有限平坦であることに注意せよ), 自明な log structure を考えることで log scheme の射とみなす (例 2.2 を参照せよ). この時 $X \rightarrow S$ が log smooth であることと下部 scheme の射として smooth であることは同値である. また $\mathcal{A}_X^{gp} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} = \mathcal{O}_{X'}$ であり, したがって $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ は $\mathcal{A}_X^{gp}$ 上局所自由で階数は $p^{r(m+1)}$ である.

より一般に Montagnon によって次が示されている [M, Corollaire 4.2.1].

定理 3.5. $\mathcal{A}_X^{gp}$ は階数 $p^{r(m+1)}$ の局所自由 $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ -加群である.

注. 一般に正標数の fine log scheme の射 $X \rightarrow S$ に対してその相対 Frobenius $F_{X/S}$ は, たとえ X が S 上 log smooth であっても, 有限平坦とは限らない. このことは正標数の log scheme 上の微分加群の研究においてしばしば障害となってきた (以下の注も参照していただきたい). 定理 3.5 はこのような困難をある意味で解消していると言える.

注. 導入に述べた Cartier 降下は log scheme の場合に素朴な形では一般化できないことが知られていた. 元々 indexed 加群の概念および log structure に付随して定まる indexed 代数 $\mathcal{A}_X^{gp}, \mathcal{B}_{X/S}^{(0)}$ は Cartier 降下を log scheme の場合に一般化する目的で Lorenzon によって導入された [L]. Montagnon は Lorenzon による $\mathcal{A}_X^{gp}, \mathcal{B}_{X/S}^{(0)}$ を高レベルの微分作用素の場合に一般化し, Berthelot による Frobenius 降下 [B2] を log scheme の場合へ拡張した [M]. また Schepler は [S] において, indexed 代数 $\mathcal{A}_X^{gp}, \mathcal{B}_{X/S}^{(0)}$ を用いることで, 導入に述べた大域的 Cartier 変換を log scheme の場合へ拡張した. 以下本稿では Lorenzon-Montagnon による indexed 代数 $\mathcal{A}_X^{gp}, \mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ を用いて Schepler の結果を高レベルの微分作用素の場合に拡張することについて解説する.

例 3.6. k を正標数の代数閉体とし, アファイン直線 $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[T]$ を例 2.3 で述べた方法により log scheme と考える. これは $S = \text{Spec } k$ (に自明な log structure を与えて log scheme と考えたもの) 上 log smooth である. $\bar{0}$ を原点の上の幾何的点とする. X の log structure の定義から $\bar{0}$ における $\mathcal{M}_X^{gp}$ の茎は $\mathcal{M}_{X,\bar{0}}^{gp} = \mathcal{O}_{X,\bar{0}}^* T^{\mathbb{Z}}$ で与えられる. したがって $\mathcal{I}_{X,\bar{0}}^{gp}$ は $\mathbb{Z}$ に同型である. また $\theta := (T, 1) \in \mathcal{A}_{X,\bar{0}}^{gp}$ とおくと,

$$\mathcal{A}_{X,\bar{0}}^{gp} = \{ f\theta^n \mid f \in \mathcal{O}_X, n \in \mathbb{Z} \}$$

であり, $\mathcal{A}_{X,\bar{0}}^{gp}$ は $\mathcal{A}_{X,\bar{0}}^{gp} \rightarrow \mathbb{Z} : f\theta^n \mapsto n$ によって $\mathbb{Z}$ 上の対象と考えている. 次に $\mathcal{O}_{X',\bar{0}}[\theta, \theta^{-1}]$ に, $\mathcal{O}_{X',\bar{0}}$ の任意の元の次数を 0, θ の次数を 1, θ^{-1} の次数を -1 と定めることで次数付き代数の構造を与える. この時

$$\mathcal{B}_{X/S,\bar{0}}^{(m+1)} = \left\{ \mathcal{O}_{X',\bar{0}}[\theta^{p^{m+1}}, \theta^{-p^{m+1}}, \frac{T}{\theta}] \text{ の斉次元の集合} \right\}$$

であり, $\{1, \theta, \dots, \theta^{p^{m+1}-1}\}$ が $\mathcal{A}_{X,\bar{0}}^{gp}$ の $\mathcal{B}_{X/S,\bar{0}}^{(m+1)}$ 上の基底を与える. 詳しくは [M, Proposition 5.2.1] を参照されたい.

§ 4. 東屋代数性

この節では $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ の東屋代数性について述べる. 詳細は [O] の 3 節および 4 節を参照されたい. 以下この節では $X \rightarrow S$ を 3.3 節の通りとし, また 2 節, 3 節に導入した記号を自由に用いる.

まず古典的な p -曲率写像の高レベルの微分作用素への一般化である p^{m+1} -曲率写像の構成について述べる. $\bar{I}$ を対角射 $X \hookrightarrow X \times_S X$ に付随して定まる log m -PD envelope $X \hookrightarrow P_{X/S,(m)}$ の定義イデアルとする. また I を対角射 $X \rightarrow X \times_S X$ に付随して定まる log formal neighborhood $X \hookrightarrow Y$ の定義イデアルとし, $\Omega_{X'/S}^1$ で $X' \rightarrow S$ の log 余接束を表す. 構成の鍵は次の同型である [O, Theorem 3.9].

定理 4.1. $\mathcal{O}_X$ -加群の同型 $\alpha : F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1 \xrightarrow{\cong} \bar{I} / \left(\bar{I}^{\{p^{m+1}+1\}} + IP_{X/S,(m)} \right)$ であつて, 任意の $\xi \in I$ に対してその像を $\omega \in I/I^2 \cong \Omega_{X/S}^1$ とする時, $\alpha(1 \otimes \pi^* \omega) = \xi^{\{p^{m+1}\}}$ をみたすものが存在する.

この定理の証明はまず $\xi \mapsto \xi^{\{p^{m+1}\}}$ で定まる写像 $\alpha' : I \rightarrow \bar{I}/IP_{X/S,(m)}$ が上記の $\mathcal{O}_X$ -準同型 α を定義することを確認め、次にそれぞれの局所基底を比較することでなされる。

$\mathcal{T}_{X'/S} := \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X'}}(\Omega_{X'/S}^1, \mathcal{O}_{X'})$ を log 接束とする。また a を合成 $\mathcal{P}_{X/S,(m)}^n \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}_{X/S,(m)}^n$ で定義する。 $D \in \mathcal{T}_{X'/S}$ に対して合成

$$\mathcal{P}_{X/S,(m)}^{p^{m+1}} \xrightarrow{y \mapsto y - a(y)} \bar{I}/\bar{I}^{\{p^{m+1}\}} \rightarrow \bar{I}/\left(\bar{I}^{\{p^{m+1}+1\}} + IP_{X,m}\right) \xleftarrow{\cong} F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1 \xrightarrow{F_{X/S}^* D} \mathcal{O}_X,$$

を対応させることで p^{m+1} -曲率写像 $\beta : \mathcal{T}_{X'/S} \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ を定義する。ここに上の同型は定理 4.1 による。この写像は log structure が自明でかつ $m = 0$ の場合、古典的な p -曲率写像と一致する。

β を局所的に計算することで、その像は $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ の中心に含まれることが示せる [O, Lemma 4.1.5]。従って対称代数の普遍性から $\mathcal{O}_X$ -代数の準同型 $\beta : S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S}) \rightarrow \mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ を得る。1 節に述べた要約 1 の対数的かつ高レベルな場合として次が成り立つ [O, Theorem 4.16]。

定理 4.2. $\tilde{\mathfrak{z}}$ を $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ の中心とする。準同型 $i \otimes \beta : \mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S}) \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ は $\tilde{\mathfrak{z}}$ への indexed 代数としての同型を定める。

定理 4.2 の証明は、局所的に、 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ の任意の元と $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ の $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)}$ -代数としての生成元との交換子を計算し、任意の元が中心に含まれるための必要十分条件を求めることでなされる。同様の方針で、 $\mathcal{C}_X$ を $\mathcal{A}_X^{gp}$ の $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ における中心化とする時、

$$\text{id} \otimes \beta : \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_X$$

が示される。従って補題 3.5 に注意すると、 $\mathcal{C}_X$ は $\tilde{\mathfrak{z}}$ 上忠実平坦とわかる。今 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ を右からの積によって $\mathcal{C}_X$ -加群と考えると、これが階数 $p^{r(m+1)}$ の局所自由 $\mathcal{C}_X$ -加群であり、1 節に述べた 2 の対数的かつ高レベルな場合として次が成り立つことが確かめられる [O, Theorem 4.18]。

定理 4.3. 写像 $\phi \otimes c \mapsto \{x \mapsto \varphi \cdot x \cdot c\}$ は $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{C}_X$ -代数の同型

$$\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathfrak{z}}} \mathcal{C}_X \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathcal{C}_X} \left(\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)} \right)$$

を定める。特に $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed 代数 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)}$ は $\mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} S^\bullet(\mathcal{T}_{X'/S}) = \tilde{\mathfrak{z}}$ 上 階数 $p^{2(m+1)r}$ の東屋代数をなす。

§ 5. 大域的 Cartier 変換

この節では定理 4.3 の応用として大域的 Cartier 変換の対数かつ高レベル版（以下単に大域的 Cartier 変換と呼ぶ）を構成する。

まずいくつか記号の準備をする. $X \rightarrow S$ を integral かつ log smooth な fine log scheme の射とし (integral の定義は [K, Definition (4.3)] を参照されたい), S は標数 p の体上定義されていると仮定する (S には零イデアル上の標準的な m -PD structure を与える). $\mathcal{J}$ を $\mathcal{I}_X^{gp}$ -集合の層とする. $\mathcal{O}_G$ を $\mathcal{T}_{X'/S}$ が定める PD-代数の完備化, 即ち $\mathcal{O}_G := \hat{\Gamma} \cdot \mathcal{T}_{X'/S}$ とし, $\mathcal{O}_G^B := \mathcal{B}_{X/S}^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_G$, $\mathcal{O}_G^A := \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_G$, $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma} := \tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathfrak{z}}} \mathcal{O}_G^B$ とおく. $\mathrm{HIG}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{B}, \mathcal{J}}(X'/S)$ を $\mathcal{J}$ -indexed $\mathcal{O}_G^B$ -加群のなす圏, $\mathrm{MIC}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{A}, \mathcal{J}}(X/S)$ を $\mathcal{J}$ -indexed $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma}$ -加群のなす圏とする. 以上の記号の準備のもと, 大域的 Cartier 変換は $\mathrm{MIC}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{A}, \mathcal{J}}(X/S)$ と $\mathrm{HIG}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{B}, \mathcal{J}}(X'/S)$ の間の圏同値をして定式化される. そしてその構成は東屋代数 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathfrak{z}}} \mathcal{O}_G^B$ の $\mathcal{O}_G^B$ 上の分裂加群, 即ち以下の性質をもつ局所自由 $\mathcal{O}_G^B$ -加群を構成することにより達成される. 詳しくは [O] の 5.2 節を参照されたい.

定理 5.1. $X' \rightarrow S$ の mod p^2 への平坦な持ち上げ $\tilde{X}' \rightarrow \tilde{S}$, すなわち $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 上平坦な fine log scheme の射 $\tilde{X}' \rightarrow \tilde{S}$ であって, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への底変換が $X' \rightarrow S$ に一致するものが存在すると仮定する. この時, 組 $\mathcal{X}/S = (X \rightarrow S, \tilde{X}' \rightarrow \tilde{S})$ に対して $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed 局所自由 $\mathcal{O}_G^B$ -加群 $\check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m), \mathcal{A}} = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m)}$ でその階数が $p^{r(m+1)}$ であるものと自然な $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed $\mathcal{O}_G^B$ -代数の射 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_G^B}(\check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m), \mathcal{A}})$ の組が存在する.

注. $X' \rightarrow S$ の mod p^2 への平坦な持ち上げ $\tilde{X}' \rightarrow \tilde{S}$ が存在する時, $\tilde{X}' \rightarrow \tilde{S}$ は自動的に integral かつ log smooth となることが示される.

定理 5.1 と [S, Corollary 2.5] を使うと $\mathcal{O}_G^B$ -代数の同型

$$\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_G^B}(\check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m), \mathcal{A}})$$

が得られ, 森田同値 (命題 3.3) によって次の大域的 Cartier 変換を得る [O, Theorem 5.19].

定理 5.2. 定理 5.1 の仮定の下で, 関手

$$C_{\mathcal{X}/S} : \mathrm{MIC}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{A}, \mathcal{J}}(X/S) \rightarrow \mathrm{HIG}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{B}, \mathcal{J}}(X'/S), \quad E \mapsto \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma}}(\check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m), \mathcal{A}}, E)$$

は圏同値であり, その準逆 $C_{\mathcal{X}/S}^{-1}$ は

$$C_{\mathcal{X}/S}^{-1} : \mathrm{HIG}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{B}, \mathcal{J}}(X'/S) \rightarrow \mathrm{MIC}_{\mathrm{PD}}^{\mathcal{A}, \mathcal{J}}(X/S), \quad E' \mapsto \check{\mathcal{K}}_{\mathcal{X}/S}^{(m), \mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_G^B} E'$$

で与えられる.

最後に定理 5.1 の証明について説明する. $\mathcal{X}/S = (X \rightarrow S, \tilde{X}' \rightarrow \tilde{S})$ を定理 5.1 の通りとし, 簡単のため X の mod p^2 への持ち上げ $\tilde{X}$ が存在すると仮定する. 相対 Frobenius $F_{X/S}$ の mod p^2 への局所的な持ち上げのなす層 $\mathcal{L}_{X/S}^{(m)}$ を考える. この層は変形理論により $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1, \mathcal{O}_X) \cong F_{X/S}^* \mathcal{T}_{X'/S}$ -torsor をなすことがわかる. $a \in \mathcal{L}_{X/S}^{(m)}$ 及び $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathcal{L}_{X/S}^{(m)}, \mathcal{O}_X)$ に対して, 層の射 $\varphi_a : F_{X/S}^* \mathcal{T}_{X'/S} \rightarrow \mathcal{O}_X$ を $D \mapsto \varphi(a + D) - \varphi(a)$

と定める. 層の射 $\varphi: \mathcal{L}_{X/S, \tilde{X}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{O}_X$ であつて任意の $a \in \mathcal{L}_{X/S}^{(m)}$ に対して φ_a が $\mathcal{O}_X$ -準同型となるもの全体のなす $\text{Hom}(\mathcal{L}_{X/S}^{(m)}, \mathcal{O}_X)$ の部分層を $\mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ とおく. この時 φ_a は a の取り方によらないことが確かめられるので, $\omega_\varphi := \varphi_a$ と書くことにする. 次の $\mathcal{O}_X$ -加群の図式を得る,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}_{X/S}^{(m)} \xrightarrow[\varphi \mapsto \omega_\varphi]{} F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1 \longrightarrow 0,$$

ここに $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ は元 $b \in \mathcal{O}_X$ を定数関数に対応させることで定める. 実はこれは $\mathcal{O}_X$ -加群の局所分裂完全列である. 実際, $\mathcal{O}_X$ 及び $\mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ における完全性は定義から確かめられ, また局所切断 $a \in \mathcal{L}_{X/S, \tilde{X}}^{(m)}$ に対して (このような a は局所的には必ず取れることに注意せよ), $\mathcal{O}_X$ -準同型 $\sigma_a: F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1 \rightarrow \mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ を $\omega \mapsto [b \mapsto \langle \omega, b - a \rangle]$ と定めると, これが $\mathcal{E}_{X/S}^{(m)} \rightarrow F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1$ の切断を与えることが確かめられる. 各自然数 n に対して $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ が誘導する $\mathcal{O}_X$ -準同型 $S^n(\mathcal{E}_{X/S}^{(m)}) \hookrightarrow S^{n+1}(\mathcal{E}_{X/S}^{(m)})$ を考え, n に関する順極限を取ることで $\mathcal{O}_X$ -代数 $\mathcal{K}_{X/S}^{(m)}$ を定義する. 局所分裂完全列の存在から, 局所的には同型 $\mathcal{E}_{X/S}^{(m)} \simeq \mathcal{O}_X \times F_{X/S}^* \Omega_{X'/S}^1$ が存在する. よつて局所的には

$$\check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m)} := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{K}_{X/S}^{(m)}, \mathcal{O}_X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(S \cdot \Omega_{X'/S}^1, \mathcal{O}_X) \simeq \hat{\Gamma} \cdot (F_{X/S}^* \mathcal{T}_{X'/S})$$

である. 従つて $\check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m), \mathcal{A}} = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m)}$ は階数 1 の $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed 局所自由 $\mathcal{O}_G^{\mathcal{A}}$ -加群であることがわかり, 命題 3.5 を合わせると, $\check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m), \mathcal{A}}$ は階数 $p^{r(m+1)}$ の $\mathcal{I}_X^{gp}$ -indexed 局所自由 $\mathcal{O}_G^{\mathcal{B}}$ -加群であることが従う. あと問題となるのは $\mathcal{O}_G^{\mathcal{B}}$ -代数の射 $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_G^{\mathcal{B}}}(\check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m), \mathcal{A}})$ の存在である. $\tilde{\mathcal{D}}_{X/S}^{(m), \gamma} := \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{S \cdot (\mathcal{T}_{X'/S})} \hat{\Gamma} \cdot \mathcal{T}_{X'/S}$ であることを思い出すと, $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \otimes_{S \cdot (\mathcal{T}_{X'/S})} \hat{\Gamma} \cdot \mathcal{T}_{X'/S}$ -作用を $\check{\mathcal{K}}_{X/S}^{(m)}$ に与えることが重要となる. まず $\hat{\Gamma} \cdot \mathcal{T}_{X'/S}$ の $\mathcal{K}_{X/S, \tilde{T}}^{(m)}$ への作用は log 導分 $D \in F_{X/S}^* \mathcal{T}_{X'/S}$ が合成

$$\mathcal{K}_{X/S}^{(m)} \simeq S \cdot (F_{T/S}^* \Omega_{X'/S}^1) \xrightarrow{D} S \cdot (f_{T/S}^* \Omega_{X'/S}^1) \simeq \mathcal{K}_{X/S}^{(m)},$$

によつて作用することから定める. これは一見完全列の分裂に依っているが, X 上大域的に well-defined であることが示せる. 一方 $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ の $\mathcal{K}_{X/S}^{(m)}$ への作用についてであるが, これは $\mathcal{K}_{X/S}^{(m)}$ の log m -crystal の構造から誘導されるものを考える. 実際, 上記の構成の際に表れた層 $\mathcal{L}_{X/S}^{(m)}$, $\mathcal{E}_{X/S}^{(m)}$ 及び $\mathcal{K}_{X/S}^{(m)}$ は全てレベル m の log crystalline site $\text{Cris}^{(m)}(X/S)$ 上の層に自然に延長され, さらにこれらは $\text{Cris}^{(m)}(X/S)$ 上の crystal (これを log m -crystal と呼ぶ) をなすことが示される. 従つて我々はこの log m -crystal に付随した $\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ の作用を得る. あとはこの二つの作用が $S \cdot (\mathcal{T}_{X'/S})$ 上で一致することを局所的な計算によつて示すことで証明が終わる.

References

- [B1] Pierre Berthelot, $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **29**(2) (1996), 185-272.
- [B2] Pierre Berthelot, $\mathcal{D}$ -module arithmétiques II. Descente par Frobenius, *Mém. Soc. Math. France* **81** (2000).
- [GLQ] Michel Gros, Bernard Le Stum and Adolfo Quirós, A Simpson correspondance in positive characteristic, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), 1-35.
- [K] Kazuya Kato, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, *Algebraic analysis, geometry, and number theory* (Baltimore, MD, 1988), 191-224, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD (1989).
- [Ka] Nicholas M. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem: applications of a result of Turrittin. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1970), 175-232.
- [L] Pierre Lorenzon, Indexed algebras associated to a log structure and a theorem of p -descent on log schemes, *Manuscripta Mathematica* **101** (2000), 271-299.
- [M] Claude Montagnon, Généralisation de la théorie arithmétique des D -modules à la géométrie logarithmique, *Ph.D. thesis, L'université de Rennes I* (2002); see <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/52/24/PDF/tel-00002545.pdf>.
- [OV] Arthur Ogus and Vladimir Vologodsky, Nonabelian Hodge theory in characteristic p . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **106** (2007), 1-138.
- [O] Sachio Ohkawa, On logarithmic nonabelian Hodge theory of higher level in characteristic p , to appear in *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*.
- [S] Daniel Schepler, Logarithmic nonabelian Hodge theory in characteristic p , *Ph.D. thesis* (2005); see <http://arxiv.org/pdf/0802.1977v1.pdf>
- [Si] Carlos T. Simpson, Higgs bundles and local systems. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **75** (1992), 5-95.