

p -進整数環上の Honda group

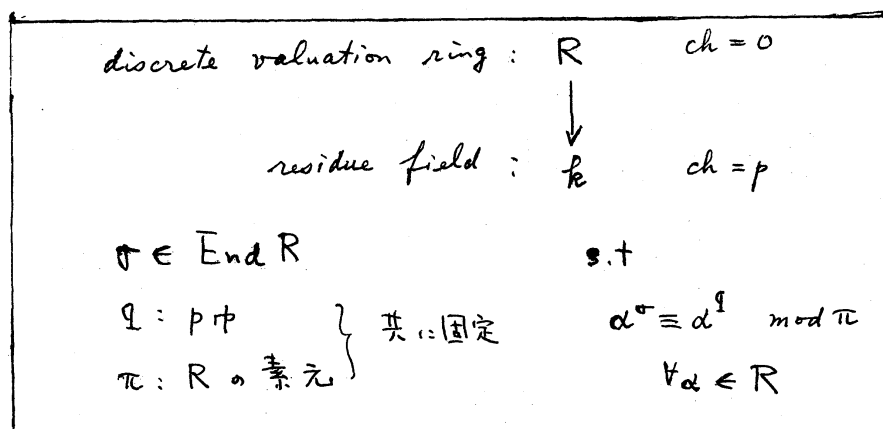
$H_{n,m}$ の自己準同形環について

阪大理 大学院 山崎 洋平

§ 0. 序

“formal group” は J. Dieudonné によ、て導入された概念で、Abel 多様体との関連も深い。彼は [1] ~ [8] に於て、標数 $p > 0$ の代数的曲線（本質的には完全体）上の commutative formal group の理論を展開し、これらの曲線の準同形群を、 k の Witt 環を用いて表わした。また、単純群 $G_{n,0,m}$ を発見し、isogenie による分解定理を得た。

この $k \leftarrow W(k)$ の構図は T. Honda により



と、とらえ直された。

Honda は、この構図により、"special element" が R 上の commutative formal group を与えること、及び、 $q = p$ 、 $v_{\pi}(p) = 1$ のとき、それらが R 上のすべての commutative formal group を、また、その reduction がすべての k 上の commutative formal group を表し尽くすことを示し、 R 上の準同形についていくつかの結果を得た。

本稿では $G_{n,0,m}$ を R 上に持ち上げた群 $H_{n,m}$ の自己準同形環の決定を紹介する。詳しくは、Yamasaki [10] を見られたい。

§ 1. 定義

R を、1 をもつ可換環。 X, Y, Z を長さ n の変数縦ベクトル、 $R[[X, Y, Z]]$ を与えられた変数 (vector) に関する R 上の中級数環、 $I = R[[X, Y, Z]]_0$ を定数項が 0 なる元からなる ideal、また $R[[X, Y, Z]]_0^n$ を、 I の元を成分とする長さ n の縦ベクトルの全体とする。

Definition. R 上の n 次元 formal group law とは、

$R[[X, Y, Z]]_0^n$ の元 F であ、 F が次の (1), (2) をみたすものをいう。

$$(1) \quad F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{\deg 2} \quad \text{即ち} \pmod{I^2}$$

$$(2) \quad F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$$

更に $(3) \quad F(X, Y) = F(Y, X)$

であるとき F は commutative であるという。

Ω を長さ n の変数縦ベクトルの、十分大きな集合とするとき、 F は $R[\Omega]_0^n$ に群構造を与える。これを formal group というが、以下簡単に、 F を formal group と呼ぶ。本稿では特に commutative なものを扱う。従って、以下使用する

“formal group” は “commutative formal group law” を表わす。(略称 f.g. を用いることも断、しておく)

Definition. $\varphi \in R[\mathbb{X}]_0^{n'}$ が n 次元 f.g. F から n' 次元 f.g. G への homomorphism であるとは

$$\varphi \circ F(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = G(\varphi(\mathbb{X}), \varphi(\mathbb{Y}))$$

をみたすことをいう。

Definition. $n' = n$ で、 φ が可逆なとき isomorphism という。特に

$$\varphi(\mathbb{X}) \equiv \mathbb{X} \pmod{\deg 2}$$

のとき strong isomorphism という。

Example 1. $F_i(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = X_i + Y_i - a_i X_i Y_i \quad a_i \in R$

特に、 $\forall a_i = 0$ のとき additive

$\forall a_i = 1$ のとき multiplicative

という。

Example 2. $F \in f.g$

$$f \in R[X]_0^m \text{ とき } f(X) \equiv P X \pmod{\deg 2}$$

とする。(但し $P \in GL(n, R)$)

$$G(X, Y) = f^{-1}(F(f(X), f(Y)))$$

は F は isomorphic (特に $P = I_n$ のときは strongly isomorphic) to $f.g$ を与える。

Theorem (Honda). R が $\mathbb{Q}$ -algebra のとき、すべての $f.g$ は additive group に同形である。

以下、 R は $ch=0$ の discrete valuation ring、 k は k の剰余体で $ch=p>0$ とし、ある p かつ $q(\neq 1)$ に対し、 R の endomorphism σ で次のようなものが与えられているとする。

$$\alpha^\sigma \equiv \alpha^q \pmod{\pi} \quad \forall \alpha \in R$$

ここに、 π は固定された素元とする。

R の商体を K とおき、 $\mathcal{O}_n = M_n(K)_\sigma[[T]]$ は $M_n(K)$ の行列を係数とする T の中級数全体に $TA = A^\sigma T$ ($A \in M_n(K)$) によって、かけ算を入れた環とし、 $\mathcal{O}_n$ を

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i T^i \quad A_i \in M_n(R)$$

なる元からなる部分環とする。

Definition . $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ に對し

$$X^a = {}^t(x_1^a, \dots, x_n^a)$$

Definition . $f \in K[X]^n$, $u = \sum A_i T^i \in B_n$

に對し

$$u * f = \sum A_i f^{(i)}(X^{q^i})$$

Definition . $u \in \mathcal{O}_n$ が special element であるとは

$$u \equiv \pi I_n \pmod{\deg 1} \quad (\text{in } T)$$

なることをいふ。

Theorem (Honda). u が special element ならば

$$f = u^{-1} \pi * \text{id} \quad \text{とある } u \neq 0 \quad (\text{id} : \text{identity})$$

$$F(X, Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$$

は R 上の f, g と与える。

$$\begin{array}{ccc} \text{今. } R & \hookrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & & \text{End}_k(F^{\text{red}}) \end{array} \quad \text{と } \text{End}_R(F) \hookrightarrow \text{End}_K(F)$$

となるが $F \cong_k \text{Additive}$ とし $\text{End}_K(F) \cong M_n(K)$ である。

Lemma 1. (Honda).

$$\text{End}_R(F) \cong \mathcal{O}_n \cap u M_n(R) u^{-1} \cong \{A \in M_n(R) \mid u A u^{-1} \in \mathcal{O}_n\}$$

Definition, $u = \pi(I_n - P^{-1}N_+T - P^{-1}N_-^{-1}T^{m+1})$ から
 $f = u^{-1}\pi * id$, $H = f^{-1}(f(\cdot) + f(\cdot))$ とし得られた f, g は
 (n, m) 型の Honda group とし, $H_{n, m}$ と書く。

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し} \quad P = \begin{bmatrix} \pi^{\sigma^{n-1}} & 0 \\ 0 & \pi^{\sigma} \\ & \pi \end{bmatrix} \quad N_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \\ \\ N_- = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{と置き} \quad m \geq 1 \text{ とする。} \\ \\ \text{また便宜上, } n=1 \text{ のとき } N_+ = 0 \quad N_-^{-1} = I_1 \text{ とする。} \end{array} \right.$$

§ 2. $\text{End}_R(H_{n, m})$

$\text{End}_R(\quad)$ を調べることは, Lemma 1. により $uAu^{-1} \in \mathcal{O}_n$
 なる性質を調べることに帰するが, これは $\pi^{-1}uA u^{-1}\pi \in \mathcal{O}_n$ と
 同値である。従って, まず, $u^{-1}\pi$ を知る必要がある。
 今, $U = P^{-1}N_+T$, $V = P^{-1}N_-^{-1}T^{m+1}$, $\sigma^{m+n} = \tau$ とおくと

$$\begin{aligned} u^{-1}\pi &= (\pi^{-1}u)^{-1} = (I_n - (U+V))^{-1} \\ &= I_n + (U+V) + (U^2+UV+VU+V^2) + \cdots \end{aligned}$$

であるが, $\beta \in K$ に対し $B = \begin{bmatrix} \beta^{\sigma^{n-1}} & 0 \\ 0 & \beta^{\sigma} \\ & \beta \end{bmatrix}$ とおくと

$$(N_+ T) B = B (N_+ T)$$

$$(N_-^{-1} T^{m+1}) B = B^T (N_-^{-1} T^{m+1})$$

また、
$$(N_-^{-1}) N_+^k (N_-^{-1}) = \delta_{n-1, k} N_-^{-1}$$

なることに注目すれば次の式が得られる。

Theorem.
$$u^{-1} \pi = \sum_{\substack{\lambda \geq 0 \\ |k| < n \\ \lambda(m+n)+k \geq 0}} W_k^{(\lambda)}$$

ここに、 $W_k^{(0)} = U^k$ であり、 $\lambda \geq 1$ では、

$$W_k^{(\lambda)} = \sum_{i+j=n-1+k} U^i V (U^{n-1} V)^{\lambda-1} U^j$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \begin{bmatrix} & & \overset{1+k}{*} & & \\ & & \circ & & \\ & & & & * \\ & \circ & & & \\ & & & & \end{bmatrix} T^{\lambda(n+m)+k} & k \geq 0 \\ &= \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \circ \\ & & & & \\ \overset{1-k}{*} & & & & \\ & \circ & & & * \end{bmatrix} T^{\lambda(n+m)+k} & k < 0 \end{aligned} \right.$$

また、 $\nu_\pi(*) = -(\lambda n + k)$ が、すべての $*$ について成立する。

我々は $\pi^{-1} u A u^{-1} \pi = (I_n - (U+V)) A \geq W_k^{(\lambda)}$ が $\mathcal{O}_n$ の元となる条件を知りたい。その為、 A を次のように表わす。

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{ij} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$

これにより, $(I_n - (U+V))A$ は次のようになる。

$$(I_n - (U+V)) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sigma_i - \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma T \\ \vdots \\ \sigma_n - \pi^{-1} \sigma_1^{\sigma^{m+1}} T^{m+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} (i & i < n \\ \\ (n \end{matrix}$$

一方, $W_k^{(\lambda)}$ は $\lambda(n+m) + k$ 次の monomial であるから,

$\sum W_k^{(\lambda)}$ の表示に於て, $|k_0| \leq 1$ のとき, $\lambda(n+m) + k_0$ 次のものは $W_{k_0}^{(\lambda)}$ に限る。これに注意して, $\pi^{-1}u A u^{-1}\pi$ の $\lambda(m+n)$ 次、及び $\lambda(m+n) + 1$ 次の項の第 i 行をみると (但し $i < n$) ,

$$(\star)_i \quad \left. \begin{aligned} \sigma_i W_1^{(\lambda)} &\equiv \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma W_0^{(\lambda)} \\ \sigma_i W_0^{(\lambda)} &\equiv \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma W_{-1}^{(\lambda)} \end{aligned} \right\} \text{mod } R$$

が得られる。こゝで次の Lemma が必要になる。

$$\begin{aligned} \text{Lemma 2.} \quad i) \quad W_k^{(\lambda)} &= W_{k-1}^{(\lambda)} U + U^{n-1+k} V (U^{n-1} V)^{\lambda-1} \\ &= U W_{k-1}^{(\lambda)} + (V U^{n-1})^{\lambda-1} V U^{n-1+k} \quad \lambda \geq 1 \\ ii) \quad W_{k+1}^{(\lambda)} &= U W_{k-1}^{(\lambda)} U \quad k \geq 0, \lambda \geq 1 \end{aligned}$$

$W_{k_0}^{(\lambda)}$ の成分は λ が増大するに従って valuation が $-\infty$ に向う。これと, Lemma 2. をあわせてみると $(\star)_i$ は次のよう

になる。

$$d_{in} = 0$$

$$d_{i+1,1}^{\sigma} = 0$$

$$\pi^{-\sigma^{n-i}} d_{i+1,j+1}^{\sigma} = \pi^{-\sigma^{n-j}} d_{i,j}$$

これを総合すると

$$\begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

これに $\pi^{-1} u A u^{-1} \pi$ の第 n 行の条件 $(\star)_n$ を加えると

$$(d^{\sigma^{n-1}})^{\sigma^{m+1}} = \alpha^{\tau} = \alpha$$

が必要となる。

$$\text{一方、} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\tau} = \alpha \quad \text{であれば、}$$

A は P^{-1} , $N_+ T$, $N_-^{-1} T^{m+1}$ と可換であり、従って、 U , V と可換である。従って

$$\begin{aligned} \pi^{-1} u A u^{-1} \pi &= (I_n - (U+V)) A u^{-1} \pi = A (I_n - (U+V)) u^{-1} \pi \\ &= A \in \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

である。即ちこれが必要十分条件である。

$$\begin{aligned} \text{End}_R(H_{n,m}) &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(R) \mid \alpha^{\tau} = \alpha \right\} \\ &\simeq \{ \alpha \in R \mid \alpha^{\tau} = \alpha \} \end{aligned}$$

特に $R \supset \mathbb{Z}_p$ のとき (簡単には complete のとき、更には p -進整数環のとき)、 $\{\alpha \in R \mid \alpha^c = \alpha\}$ を調べて、次を得る。

Theorem. $\text{End}_p(H_{n,m}) \cong \mathbb{Z}_p[W', \pi']$

ここに、 W' は R に属する、1 の $q^{m+n} - 1$ 乗根のうち order が最大のもので、 π' は π -stable な R の元 (例えば p) のうち valuation が minimal positive なもので、 $\mathbb{Z}_p[W']$ 上 Eisenstein polynomial で定義される。

参考文献

- [1] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$,
Comm. Math. Helv. 28 (1954) 87-118.
- [2] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$ (II),
Amer. J. Math. 77 (1955) 218-244.
- [3] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (III),
Math. Z. 63 (1955) 53-75.

- [4] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras
over a field of characteristic $p > 0$ (IV),
Amer. J. Math. 77 (1955) 429-452.
- [5] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres
de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (V),
Bull. Soc. Math. France 84 (1956) 207-239.
- [6] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras
over a field of characteristic $p > 0$ (VI),
Amer. J. Math. 79 (1957) 331-388.
- [7] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres,
de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (VII),
Math. Ann. 134 (1957) 114-133.
- [8] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras
over a field of characteristic $p > 0$ (VIII),
Amer. J. Math. 80 (1958) 740-772.
- [9] T. Honda, On the theory of commutative
formal groups,
J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 213-246
- [10] Y. Yamasaki, On the endomorphism rings of
Honda groups $H_{n,m}$ over $\mathfrak{p}$ -adic integer rings,
to appear.