

Truncated Weil Algebra の有理ホモトピー型

埼玉大教養部 柴田勝征 (Katsuyuki Shibata)

§1. 葉層構造の双対ホモトピー不変量 (d'après S. Hurder)

C^∞ 多様体 M 上に余次元 q の葉層構造が与えられると、その法束 L_q に付随した主束に対して、Weil 準同型写像

$$\omega: I^*(GL(q, \mathbb{R})) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

が定義され、更に Adapted (Bott) 接続を用いれば上の ω は

$$\bar{\omega}: I^*(GL(q, \mathbb{R}))_q \longrightarrow \Omega^*(M)$$

によって factor される。ただし、一般に G を Lie 群、 $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする時、 $I^*(G)$ は $\mathfrak{g}$ 上の $\text{Ad}(G)$ 不変な多項式全体の作る環を表わすものとし、 $I^*(G)_q \equiv I^*(G) / (\deg > 2q)$ と定義する。具体的には、 $I^*(GL(q, \mathbb{R})) \cong I^*(GL(q, \mathbb{C})) \cong$

$R[C_1, C_2, \dots, C_q]$ (C_i は i 次普遍 Chern 類) となっている。簡単のため、以後 $I^*(GL(q, \mathbb{R}))_q$ を $I(q)$ と略記する。

$\bar{\omega}$ は differential graded algebra (DGA と略記する) 準同型だから、両辺の Sullivan の意味の極小モデルの間の写像を引き起こす。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(I(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{m(\bar{\omega})} & \mathcal{M}(\Omega^*(M)) \\
 \downarrow \cong & \curvearrowright & \downarrow \cong \\
 I(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & \Omega^*(M)
 \end{array}$$

一般に、DGA A^* が $H^0(A^*) \cong \mathbb{R}$ を満たす時、 A^* の双対ホモトピー群 $\Pi^*(A^*)$ を、 $\overline{\mathcal{M}}(A^*) / (\overline{\mathcal{M}}(A^*))^2$ により定義する。ここに $\overline{\mathcal{M}}(A^*)$ は $\mathcal{M}(A^*)$ の augmentation 核 ($= \mathcal{M}(A^*)$ の正の degree の元全体) である。

故に、 M を連結と仮定しておくと、 $m(\bar{\omega})$ は準同型

$$\Pi^*(\bar{\omega}) : \Pi^*(I(\mathfrak{g})) \longrightarrow \Pi^*(M) = \Pi^*(\Omega^*(M))$$

を定義する。もともと、Weil 準同型は、接続の曲率形式を用いて定義されていたが、 $\Pi^*(\bar{\omega})$ は接続の取り方によらず、 π の concordance class にのみ依存する事が証明される。

特に、 M が単連結な時は、Sullivan の基本定理によって、 $\Pi^*(M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(M), \mathbb{R})$ が成り立つ事に注意する。

上の $\Pi^*(\bar{\omega})$ (およびその像) を Harder は葉層の双対ホモトピー不変量と呼んだ。([2]) これと、葉層の 2 次特性類とは、双対 Hurewicz 準同型写像によって結ばれているが、簡単の為、法束 $\mathcal{U}_M$ が自明の場合に限って説明する。 $\mathcal{U}_M$ が自明の時は、DGA $\hat{W}_{\mathfrak{g}} = I(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} E(h_1, h_2, \dots, h_g)$; $d(h_i) = c_i$ を用いて、2 次特性類の写像 $\Delta_* : H^*(\hat{W}_{\mathfrak{g}}) \rightarrow H^*(M)$ が定

義され、双対フレビッチ準同型 $\overline{\pi}$ により、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(I_{(q)}) & \xrightarrow{\pi^*(\bar{\omega})} & \pi^*(M) \\ \wr \uparrow (\text{mono}) & \hookrightarrow & \uparrow \overline{\pi} \\ H^*(\hat{W}_q) & \xrightarrow{\Delta^*} & H^*(M) \end{array}$$

ここに、 $\wr$ は或る単射な線型写像であって、次節で述べるが、ある意味で双対フレビッチ準同型とみなせる自然な写像である。上の図式は葉層 $(M, \mathcal{F})$ に関して functorial なので、

多様体 M の代りに分類空間 BP^q , FP^q などを入れる事ができて、これらの空間のホモトピー、コホモロジーの研究に役に立つのである。双対ホモトピー不変量を考えるメリットは、

上の図式で言うと、 $H^*(\hat{W}_q)$ の積が trivial (Vey の結果) で、単なるベクトル空間としての意味しか無いのに対して、 $\pi^*(I_{(q)})$ は (無限次元) Lie 環の dual としての構造が入っている点にある。その構造を完全に決定するには、極小モデル $\mathcal{M}(I_{(q)})$ を具体的に求めなければならない。

§2. Gelfand-Fuks コホモロジーとの関係

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場全体の作る位相 Lie 環を $\mathcal{L}_M$ とし、その連続な余鎖複体を $C_c^*(\mathcal{L}_M)$ と表わすと、その

コホモロジー $H_C^*(\mathcal{L}_M)$ が Gelfand-Fuks のコホモロジーである。

さて、 $\gamma_n: EU_n \rightarrow BU_n$ を普遍 U_n -束とし、 $\gamma_n^{(2n)}: EU_n^{(2n)} \rightarrow BU_n^{(2n)}$ を、 BU_n の $2n$ -skeleton $BU_n^{(2n)}$ 上への γ_n の制限として、 γ_n と $\gamma_n^{(2n)}$ のファイバー積

$$\hat{\gamma}_n: EU_n^{(2n)} \rightarrow EU_n^{(2n)} \times_{U_n} EU_n \rightarrow BU_n$$

を考える。

C^∞ -多様体 M の接バンドルの複素化 T_C^M が写像 $f_M^C: M \rightarrow BU_n$ によって類別されるとき、induced 束 $(f_M^C)^* \hat{\gamma}_n$ の cross-sections 全体の作る位相空間 $\Gamma((f_M^C)^* \hat{\gamma}_n)$ を考えると、

$$H^*(\Gamma((f_M^C)^* \hat{\gamma}_n); \mathbb{R}) \cong H^*(C_C^*(\mathcal{L}_M))$$

が成り立つ。(Bott-Fuks 予想, Haefliger, Bott-Segal, Fuks らにより肯定的に解決)

この結果を使って Gelfand-Fuks コホモロジーの計算を行なう為に、 $\hat{\gamma}_n$ の (Sullivan の意味の) 代数的モデルを求めよう。そのために、まず γ_n のモデルを考えると、底 BU_n のモデルは $R[c_1, c_2, \dots, c_n]$, $d(c_i) = 0$ であり、fiber U_n のモデルは $E(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $d(h_i) = 0$ であり、全空間 EU_n のモデルは $R[c_1, c_2, \dots, c_n] \otimes_{\mathbb{C}} E(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $d(h_i) = c_i$ となる。記号 $\otimes_{\mathbb{C}}$ は differential d がネジレ (torsion) を持っている事を表わす。従って $\gamma_n^{(2n)}$ のモデルは $(R[c_1, c_2, \dots, c_n] / (\deg > 2n)) \otimes_{\mathbb{C}} E(h_1, h_2, \dots, h_n)$,

$d(h_i) = c_i$ となる。§1 で使った記号を用いれば、 $\hat{W}_n$ に等しい。故に $\hat{\delta}_n$ の (全空間の) モデルは $R[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n] \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{W}_n$;
 $d(h_i) = c_i - \bar{c}_i$, $d(c_i) = d(\bar{c}_i) = 0$ となる。(同じ普遍 Chern 類のコピーが底と fiber の両方に出て来るので、区別するために一方を c_i で、他方を $\bar{c}_i$ で表わした。) $R[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n]$ を $\bar{I}^n$ と略記する事にする。

さて $\hat{\delta}_n$ を $B\mathbb{U}_n$ 上の $E\mathbb{U}_n^{(2n)}$ を fiber とする fiber 束と考え、話を進めて来たが、見方を変えて、 $E\mathbb{U}_n^{(2n)} \times_{\mathbb{U}_n} E\mathbb{U}_n$ から第 1 成分への射影を考えると、 $E\mathbb{U}_n \rightarrow E\mathbb{U}_n^{(2n)} \times_{\mathbb{U}_n} E\mathbb{U}_n \rightarrow B\mathbb{U}_n^{(2n)}$ という、 $B\mathbb{U}_n^{(2n)}$ 上の $E\mathbb{U}_n$ を fiber とする fiber 束が得られる。これは可縮な fiber を持つ fiber 束だから、上の射影は全空間と底とのホモトピー同値を与えている。 $B\mathbb{U}_n^{(2n)}$ のモデルが $I_{(n)}$ だから、§1 で残した課題「 $\mathcal{M}(I_{(n)})$ を求めよ」を解結するためには、 $\hat{\delta}_n$ (の全空間) の極小モデルを求める事が必要かつ十分である事がわかった。この極小モデルの具体的表示を次節で与えるが、ここではひとまず、この極小モデルが存在するという「存在定理」を前提にして話を進めよう。

「モデルのファイバーは、ファイバーのモデルに等しい」という Grivel の定理を使うと、 $\hat{\delta}_n$ の極小モデルは

$$\psi: \bar{I}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}(\hat{W}_n) \xrightarrow{\cong} \bar{I}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{W}_n$$

という quasi-isomorphism (コホモロジーの同型を与える準同型)

である。上に述べたホモトピー同値の関係から

$$m(I_{(n)}) \cong \bar{I}^n \otimes_{\mathbb{C}} m(\hat{W}_n) \xrightleftharpoons[\text{incl.}]{\text{proj.}} m(\hat{W}_n)$$

従って、

$$\pi^*(I_{(n)}) \cong \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n\}_{\mathbb{R}} \oplus \pi^*(\hat{W}_n) \xrightleftharpoons[\text{incl.}]{\text{proj.}} \pi^*(\hat{W}_n)$$

となる。ところで、Vegの結果から $\hat{W}_n$ は球面の bouquet と同じ有理ホモトピー型を持つので、双対フレビッチ準同型写像 $\tilde{H}^*(\hat{W}_n) \rightarrow \pi^*(\hat{W}_n)$ が考えられる。これと上の inclusion を結合したものが、§1 で述べた $\zeta: \tilde{H}^*(\hat{W}_n) \rightarrow \pi^*(I_{(n)})$ (才2 特性類と双対ホモトピー不変量の関係) である。具体的には、

$$\begin{aligned} \pi^*(\hat{W}_n) &= \text{Hom}(\sigma L(\sigma^{-1} \text{Hom}(\tilde{H}^*(\hat{W}_n), \mathbb{R})), \mathbb{R}) \\ &\xrightleftharpoons[\text{incl.}]{\text{proj.}} \text{Hom}(\sigma(\sigma^{-1} \text{Hom}(\tilde{H}^*(\hat{W}_n), \mathbb{R})), \mathbb{R}) \\ &\cong \tilde{H}^*(\hat{W}_n) \end{aligned}$$

であり、故に ζ は単射である。ここに σ (resp. σ^{-1}) は懸垂 (resp. 逆懸垂) を表わし、 $L(\dots)$ は自由 Lie 環を表わす。

また、 $\hat{W}_n$ のモデルにおいて、 $\bar{I}^n$ の代りに $\bar{I}^n / (C_{2i-1}; 2i-1 \leq n)$ で置き換えて上と同様の議論をすると、

$$\bar{I}^n / (C_{\text{odd}}) \otimes_{\mathbb{C}} \hat{W}_n = (\bar{I}^n / (C_{\text{odd}}) \otimes_{\mathbb{C}} E(h_{2i-1}; 2i-1 \leq n)) \otimes (\bar{I}^n / (C_{\text{odd}}) \otimes_{\mathbb{C}} E(h_{2i}; 2i \leq n))$$

$\hat{W}_n$

$\hat{W}_n$

だから $m(\hat{W}_n) \cong \bar{I}^n / (C_{\text{odd}}) \otimes_{\mathbb{C}} m(\hat{W}_n)$ である事がわかる。

Kamber-Tondeur は Truncated Weil Algebra $W(\mathfrak{g}, H)_{\mathbb{Q}} \equiv (\wedge \mathfrak{g}^* \otimes I^*(G)_{\mathbb{Q}})^H$ を定義したが、特に、 $m(\hat{W}_{\mathbb{Q}}) \cong m(W(\mathfrak{gl}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}),$

$\{e_i\}_g$), $m(\hat{W}O_g) \cong m(W(\text{gl}(g; R), O_g)_g)$ である事に注意しておく。

§3. Sullivan-Quillen 混合型 fibration

この節では、§1, §2 で述べた極小モデルを explicit に記述するマシンを与える。

一般に、 A^* を non-negatively graded かつ augmented (すなわち、 $A^* \xrightleftharpoons[u]{\varepsilon} R$) な DGA とする時、 $A_{-*} \equiv A^*$ と定義する。

[定義] A_* 上の graded Lie 環 L_* が、 A_* 上の Sullivan-Quillen 混合型 fibration であるとは、

- (i) L_* は自由 A_* -加群 (すなわち、 $L_* \cong A_* \otimes \bar{L}_*$)
- (ii) $(R \otimes_{A_*} L_*)_i = 0$ ($i < 0$), $\dim (R \otimes_{A_*} L_*)_i < \infty$ ($i \geq 0$)
- (iii) L_* には、次の性質を満たす $x \in L_{-2}$ (オイラー元) と

A_* -Lie derivation $D: L_* \rightarrow L_{*-1}$ (共変外微分) が与えられている。

① (Bianchi 等式) $D(x) = 0$

② (曲率公式) $D^2(y) + [x, y] = 0$ ($\forall y \in L_*$)

これに対して、 A^* 上の Sullivan 型 fibration は次の様に定義する。

[定義] A^* 上の DGA E^* が Sullivan 型 fibration である、とは

(i) E^* は自由 A^* -加群 (すなわち $E^* \cong A^* \otimes \bar{E}^*$)

(ii) $(R \otimes_{A^*} E^*)^i = 0$ ($i < 0$), $(R \otimes_{A^*} E^*)^0 \cong R$,

$$\dim (R \otimes_{A^*} E^*)^i < \infty \quad (i > 0)$$

また、 A^* -alg. homo $e: E^* \rightarrow A^*$ で、unit map $u: A^* \rightarrow E^*$ の左逆元 ($e \circ u = \text{id}_{A^*}$) となるものを、この fibration の 局所切断 と言う。

A^* 上の Sullivan-Quillen 混合型 fibration (L^*, χ, D) に対して、局所切断を持つ Sullivan 型 fibration $C_A^*(L^*, \chi, D)$ を対応させる。

Generalized Koszul cochain complex functor と、 A^* 上の Sullivan 型 fibration E^* とその局所切断 e に対して、Sullivan-Quillen 混合型 fibration $L_*^A(E^*, e)$ を対応させる Generalized Quillen L functor、およびそれらの adjunction homo が定義できる。[3]

そこで、§1, 2 のファイバー束 $\hat{\mathcal{F}}_n$ およびそのモデル $\bar{I}^n \rightarrow \bar{I}^n \otimes_{\mathbb{Q}} \hat{W}_n$ について考える。 $\bar{I}_n \otimes H^*(\hat{W}_n)$ に (non-trivial な) 積と微分 d を定義し、また準同型 $\psi_n: \bar{I}_n \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\hat{W}_n) \rightarrow \bar{I}_n \otimes \hat{W}_n$ で quasi-isomorphism となるものが定義される。そして、 $\hat{\mathcal{F}}_n$ の極小モデル (従って、 $\mathcal{M}(I(n))$) は次の形で与える事ができる。

$$\psi_n \circ \beta: C_{\bar{I}^n}^* \circ L_*^{\bar{I}^n}(\bar{I}^n \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\hat{W}_n)) \rightarrow \bar{I}_n \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(\hat{W}_n) \rightarrow \bar{I}_n \otimes \hat{W}_n$$

ここに、 β は上に述べた 2 つの functors の adjunction homo を

(8)

表わす。これらの functors の定義は [3] で explicit に与えてあるから、上の結果により、極小モデルが explicit に計算可能となった。

また、 $\bar{I}^n / (C_{\text{odd}}) \cong P_n \equiv R[P_1, P_2, \dots, P_n; i \leq 2n]$ の同一視により、Haefliger が [1] で出した問題「 P_n 上の Sullivan 型 fibration $P_n \otimes_{\mathbb{C}} \hat{W}_n$ の極小モデルを explicit に表現せよ」の解答が与えられる。すなわち、その極小モデルは

$$\hat{\psi}_V \circ \beta : C_{P_n}^* \cdot L_{*}^{P_n} (P_n \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n)) \rightarrow P_n \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n) \rightarrow P_n \otimes_{\mathbb{C}} \hat{W}_n$$

である。

さて、上の Haefliger の問題は次のような意味をもっている。 C^∞ -多様体 M の i -次 Pontrjagin 類の代表元 $\tilde{p}_i \in \Omega^{4i}(M)$ を固定すると、 $p_i \mapsto \tilde{p}_i$ の写像により、 $\Omega^*(M)$ は P_n -加群となる。

これを用いて、DGA $\Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n) \cong \Omega^*(M) \otimes_{P_n} (P_n \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n))$ を考え、 $L_{*}^{\Omega^*(M)}(\Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n))$ について考えると、これは、定義から $\Omega^*(M)$ 上の微分 Lie 環であるが、 $\Omega^*(M)$ -加群である事を忘れれば、 $\mathbb{R}$ 上の微分 Lie 環であって、 $\Omega^*(M)$ の C^∞ 位相から来る位相が入っている。そこで、この位相微分 Lie 環の連続 cochain complex $C_{\mathbb{R}}^*(L_{*}^{\Omega^*(M)}(\Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{W}_n)))$ を取ると、これから、Gelfand-Fuks の cochain $C_c^*(\mathcal{L}M)$ への DGA homo で、コホモロジーの同型を induce するものが存在する。これが Haefliger の基本定理 (の我々による精密化) である。

[引用文献]

- [1] A. Haefliger : Sur la cohomologie de Gelfand-Fuks,
Lecture Notes Math., No. 484 , p. 121-152
- [2] S. Hurder : Dual homotopy invariants of G -foliations,
Topology, vol 20, No. 4 (1981), p. 365-387
- [3] K. Shibata : Sullivan-Quillen mixed type model for
fibrations, preprint