

負曲率多様体上の Poisson 核の評価とその応用

東北大・理 新井 仁之 (Hitoshi Arai)

(M, g) を完備単連結 n 次元 Riemann 多様体で、その断面曲率 K_M が、 $-\infty < -b^2 \leq K_M \leq -a^2 < 0$ (a, b : 定数) を満たすものとする。 $S(\infty)$ を M の Sphere at Infinity とする。 Anderson-Schoen [2] は、 M の Martin 境界 $\mathcal{M}$ から $S(\infty)$ への natural homeomorphism 重が存在し、さらに $\mathcal{M}$ には C^α structure が well-defined であつ、重が C^α 写像であることとを証明した。(ここで、 α は、 $0 < \alpha$ であるが、一般には、 $\alpha < 1$ である。) この結果は、 [2] あるいは Yau [5] で指摘されているように、 M 上の調和関数の systematic な研究の可能性を示すものである。実際、 Anderson-Schoen [2] は M 上の調和関数の $S(\infty)$ での挙動に関する結果として、古典的な Fatou の (boundary limit) 定理を M に一般化した。(注: この結果は、 Ancona [1], Arai [4] で、より精密化されている)

本講演では、 M 上の調和関数に関する結果を得るため、次の三つの点について論ずる：

- (1) Poisson 核の境界 $S(\infty)$ の近くでの挙動
- (2) $S(\infty)$ 上の real analysis
- (3) (1)+(2)+ α により、 M 上の調和関数を研究する。

以下、任意の点 $0 \in M$ を取り、これは固定しておく。

§1. Poisson 核の評価. $K(\cdot, \cdot) : M \times S(\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ を Poisson 核 — すなわち、 $K(0, \cdot) \equiv 1$ なる kernel function — とする。このような関数の存在と一意性は、[2] による。このとき、 $Q' \in S(\infty) \setminus \{Q\}$ に対しては、

$$\lim_{\substack{x \in M \\ x \rightarrow Q'}} K(x, Q) = 0$$

である。従って、興味深いのは、 $K(\cdot, Q)$ の Q の近傍での挙動である。 $K(\cdot, Q)$ の Q での発散の様子を評価する結果として次の二つが得られる：

定理1 ([3]). $\exists C < +\infty$, $\exists t_0 > 0$, $\forall x \in M$:

$$\sup \left\{ K(x, Q) : Q \in \Delta^{(j)} \setminus \Delta^{(j-1)} \right\} \leq C \frac{1}{\omega(\Delta^{(j)})} e^{-j}$$

ただし、ここで、 $\Delta^{(j)}$ は、頂点 $\gamma_{0x}(r-jt_0)$ 、広き $\frac{\pi}{4}$ 、
軸 $\dot{\gamma}_{0x}(r-jt_0)$ の cone C_j と $S(\infty)$ との共通部分であり、
 $r = d(0, x)$ 、 γ_{0x} = “出発点 0 で、 x を通る unit speed
の測地線” である。また、 j_0 は C_j の 0 なる最大の自然数
である。 $d\omega$ は 0 に関する調和測度。

この定理は、後述の $S(\infty)$ 上の real analysis と調和関数を
結びつける重要な役割を果たす。また、次の定理は、 $K(x, \cdot)$ の
 $S(\infty)$ での regularity を調べるのに役立つ：

定理 2 ([3]). 次をみたすような $r_0 > 0$ が存在する：
任意の自然数 N と任意の $r (> Nr_0 + 1)$ 及び、次の (i), (ii)
をみたす任意の数列を取る：

$$(i) \quad 0 = m_0 < m_1 < \dots < m_n < r-1$$

$$(ii) \quad m_{j+1} - m_j \geq r_0$$

このとき、

$$\forall Q_0 \in S(\infty), \forall Q \in \Delta(Q, r), \forall x \in M \setminus C(\gamma_{0Q_0}(r-m_j), Q_0, \frac{\pi}{4}) :$$

$$|K(x, Q_0) - K(x, Q_1)| \leq C K(x, Q_0) 2^{-j}$$

が成り立つ。ただし、ここで、 $\Delta(Q, r)$ は、頂点 $\gamma_{0Q}(r)$ 、広き $\frac{\pi}{4}$
軸 $\dot{\gamma}_{0Q}(r)$ の cone と $S(\infty)$ との共通部分であり、 $C(\gamma_{0Q_0}(r-m_j), Q_0, \frac{\pi}{4})$

は、頂点 $r_{0\alpha_0}(r-m_j)$, $\angle$ は $\frac{\pi}{4}$, 軸 $r_{0\alpha_0}(r-m_j)$ と M との共通部分があり、 C は、 $n(=\dim M)$, a, b によりのみ決定された定数である。

この定理から、次の結果が得られる：

系 3 (Anderson-Schoen [2])

$K(x, \cdot)$ は $S(\infty)$ 上の C^q 関数である ($0 < q < 1$)。

定理 2 から、その他にも $S(\infty)$ の atom 理論と M 上の調和関数を結びつける結果が得られる (cf. [3])。

§2. Generalized sphere at infinity. 今のときは、 $S(\infty)$ と調和測度 $d\omega$ を Space of homogeneous type にするような $S(\infty)$ 上の quasi-metric は見つかっていない。そこで、ここでは、 $S(\infty)$ 上のそのような quasi-metric を見つけるために、Space of homogeneous type の公理系から "quasi-metric" を取り除き、 $S(\infty)$ 上の解析に合うような公理に弱めることを試みる。

定義 4 ([3]) W を位相空間、 μ を W 上の正值 Borel 測

度とする。各 $Q \in W$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して、 Q の近傍 $\Delta_t(Q)$

で、次の条件を満たすものが存在するものとする:

$$(1) \quad W = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta_t(Q) \supset \Delta_r(Q) \supset \Delta_{r+s}(Q) \supset \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta_t(Q) = \{Q\}.$$

$$(2) \quad \exists r_0 > 0, \quad \forall Q, Q' \in W \quad \forall r \in \mathbb{R} : \Delta_r(Q) \cap \Delta_r(Q') \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \Delta_{r-r_0}(Q) \supset \Delta_r(Q)$$

$$(3) \quad 0 < \mu(\Delta_r(Q)) < +\infty.$$

$$(4) \quad \exists C > 0, \quad \forall \Delta_r(Q) : \mu(\Delta_{r-1}(Q)) \leq C \mu(\Delta_r(Q))$$

このとき、組 $(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ を *generalized sphere at infinity* と呼ぶことにする。

例 (1) $W = S(\infty)$, $\mu = \omega$, $\Delta_t(Q) = \Delta(Q, t)$ ($\Delta(Q, t)$ の定義は、定理 2 参照) とすると、 $(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ は *generalized sphere at infinity* である。

(2) (X, ρ, ν) を *Space of homogeneous type* とする。 $W = X$, $\mu = \nu$, $\Delta_t(Q) := \{x \in X : \rho(x, Q) < e^{-t}\}$ とすると、 $(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ は、*generalized sphere at infinity* である。

このように、*Generalized sphere at infinity* は *sphere at infinity* と *space of homogeneous type* の両者を一般化した概念になっている。

注意すべき事柄は、*Generalized sphere at infinity* の設定のも

でも、Vitali 型の被覆定理及び Whitney 型の被覆定理が成り立っているということである ([3])。従って、あとは、Coifman-Weiss の理論の展開の方法と同様にして、generalized sphere at infinity 上で、 H^p , BMO, VMO 等の多くの結果が証明できる ([3])。

§3. M 上の調和解析への応用. §1, §2 での結果を組み合わせ、さらに微分幾何の諸比較定理等を用れば、円板上の調和関数に関する種々の古典的結果を M 上に一般化することができる。——たとえば、 H^p , BMO に関する結果、 M 上の調和関数ならびに、ある種の楕円型方程式の解の $S(\infty)$ の近くでの挙動 Brown 運動との関係、--- etc. (詳細は [3], [4] 参照)。

参考文献.

- [1] A. Ancona, Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary, Ann. of Math., 125 (1987), 495-536.
- [2] M.T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. of Math., 121 (1985), 429-461
- [3] H. Arai, Harmonic analysis on negatively curved manifolds, I (announcement: to appear in Proc. Japan Acad.), II in preparation.

- [4] H. Arai, Fine and nontangential convergence for complete manifolds of negative curvature, preprint.
- [5] P. Li and L.-F. Tam, Positive harmonic functions on complete manifolds with nonnegative curvature outside a compact set, *Ann. of Math.*, 125 (1987), 191-207.
- [6] S.-T. Yau, *Nonlinear Analysis in Geometry*, Monographie N° 33 de L'Enseignement Mathématique, Genève, 1986.