

定常軸対称 Einstein 方程式の厳密解と積分可能性

阪大 理 田中 俊一

Einstein 方程式の厳密解の大きな族としては富松-佐藤解 ([1]) があるがその数学的構造はまだ明らかにされていない。最近対称性をもつ Einstein 方程式の積分可能性に関連すると思われる論文がいくつかあらわれたのでこの問題の概観を試みたい。

g_{jk} は符号が $(+---)$ の 4 次元 (不定) Riemann 計量とする。Ricci テンソルが 0, すなわち

$$(1) \quad R_{jk} = 0,$$

を g_{jk} に対する微分方程式とみたものを Einstein 方程式という。

とくに g_{jk} が $x^1 = t$, $x^2 = \varphi$ に無関係のときに定常軸対称であるという。

微分方程式 (1) の研究は一般相対論の中心をなしている (一般相対論の数学的教科書としては [1] を見よ)。(1)

の厳密解 (exact solution) は多く知られているが、定常軸対称なものとしては Kerr 解 ([1, 7 章]), 富松-佐藤解がある。Kerr 解は重力崩壊した星の最終時空構造を(裸の特異点がないという 付加条件の下で) あらわす解として数学的^{特徴}づけがなされている。

豊富な厳密解をもつ定常軸対称 Einstein 方程式はそれ自身特別な構造をもつことが期待される。それにふれる前に最近ソリトンの理論として発展した非線形微分方程式の積分可能性のいくつかの観点を列挙しておく。

1. Liouville の意味での積分可能性: 自由度 N の Hamilton 系で互に可換な積分が N 個見出される場合。 $\mathbb{R}^N$ が解の空間に(局所的に)作用する。 もとの形または無限自由度に対する類似の形で多くの例がある。 [2, 付録 1.3] に簡潔な解説がある。

2. Lax 表示の存在: 非線形方程式^が線形方程式系の積分可能条件としてあらわされる場合。 ただしそのような場合すべてが可積分であるとは限らない。 曲面論の Gauss-Codazzi の方程式は(線形な) Gauss-Weingarten 方程式の積分可能条件であるが解けるのは Sine-Gordon 方程式とその拡張 ([8]) に限られるようである。

3. Bäcklund 変換の存在: 解を解にうつす変換で Sine-

Gordon 方程式に対しては古くから知られていた (たとえば [10] 参照).

4. Prolongation structure の存在: Wahlquist - Estabrook [12] は KdV 方程式を外微分形式系に書きなおしその prolongation を求めることと問題にした. 解曲面は ^{対応する} 接続の曲率を制限したとき 0 になる二次元部分多様体として特徴づけられる. 彼等が見出した prolongation には Bäcklund 変換や Lax 表示に関連するものが含まれている. Sine-Gordon その他の方程式に対しても同様の事実があるが, その幾何学的意味等まだ解明されていないようである.

定常軸対称な線素は

$$(2) \quad ds^2 = f_{AB} dx^A dx^B - e^{2\Gamma} \delta_{MN} dx^M dx^N$$

$$A, B = 1, 2; \quad M, N = 3, 4$$

とあらわされる. ここに f_{AB} , Γ は x^3, x^4 のみの関数である. ϵ^{AB} は $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$, $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ で定義される量とする. 添字 A, B の上げ下げは ϵ^{AB} で行なう. 例えば

$$f^A_B = \epsilon^{AX} f_{XB}.$$

$\det(f_{AB}) < 0$ であるから,

$$\rho^2 = -\det(f_{AB})$$

と置く. あきらかに

$$(3) \quad f^{AB} f_{BC} = -\rho^2 \delta^A_C.$$

線素(2)に対しては Einstein 方程式は

$$(4) \quad \nabla \cdot (\rho^{-1} f^{AB} \nabla f_{BC}) = 0$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^4} \right)$$

となる. f_{AB} が求まれば Γ は ^{線形} 方程式 ^{を解いて} 求められる.

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \nabla \rho) \delta^A_c \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \cdot \rho^{-1} \nabla \rho^2) \delta^A_c \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla \cdot \rho^{-1} \nabla f^{AB} f_{BC}) \end{aligned}$$

であるが右辺は (4) より 0. したがって ρ は調和関数である.

$$\tilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^4}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

とおく.

$$\underline{u} = \nabla f$$

とあらわされる条件は

$$\tilde{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

となることである.

(4) より ψ^A_B が存在して

$$(5) \quad \tilde{\nabla} \psi^A_B = \rho^{-1} f^{AX} \nabla f_{XB}$$

となる. (3) を用いて

$$(6) \quad \nabla f_{AB} = \rho f_A^X \nabla \psi_{XB}.$$

(5) は

$$(5)' \quad \tilde{\nabla} \psi_{AB} = -\rho^{-1} f_A{}^X \nabla f_{XB}$$

となるから複素ポテンシャルとよばれる

$$\varepsilon_{AB} = f_{AB} + i\psi_{AB}$$

は (6), (5)' を合せた式

$$(7) \quad \nabla \varepsilon_{AB} = -i\rho^{-1} f_A{}^X \tilde{\nabla} \varepsilon_{XB}$$

をみたす. この式が以下の議論の基礎になる ([6], [7]).

ここで以前の文献とくに Ernst [3] の定式化との関連を述べよう. 線素は

$$f_{11} = f, \quad f_{12} = -f\omega, \quad f_{22} = f\omega^2 - \rho^2 f^{-1}$$

という形で与えられる. $\psi = \psi_{11}$ と f から ω は定められる. したがって複素ポテンシャル (または Ernst ポテンシャル)

$\varepsilon = \varepsilon_{11} = f + i\psi$ から線素が決まる. ε は式

$$(8) \quad (\text{Re } \varepsilon) \rho^{-1} \nabla \cdot (\rho \nabla \varepsilon) = \nabla \varepsilon \cdot \nabla \varepsilon$$

をみたすことがわかる.

3次元線素を

$$ds_3^2 = dx^3{}^2 + dx^4{}^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

とおくと対応する divergence 作用素 ∇_3 は $\underline{u}$ が x^3, x^4 のみの成分を持つトルのとき

$$\nabla_3 \cdot \underline{u} = \rho^{-1} \nabla \cdot (\rho \underline{u})$$

とあらわされる. したがって (8) は Ernst 方程式とよばれる

$$(9) \quad (\text{Re } \varepsilon) \nabla_3^2 \varepsilon = \nabla_3 \varepsilon \cdot \nabla_3 \varepsilon$$

になる。

$$\xi = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

とおくと (9) は

$$(10) \quad (\xi \xi^* - 1) \nabla_3^2 \xi = 2\xi^* \nabla_3 \xi \cdot \nabla_3 \xi$$

と変形される。

ξ, ξ^* が実数値の場合は

$$\xi = e^{2\psi}, \quad \xi^* = -\coth \psi$$

とおくと (9), (10) は

$$\nabla_3^2 \psi = 0$$

となる。対応する線素を Weyl 解という。

(9), (10) の興味ある解を見出すためにこれまで任意であった座標 x^3, x^4 を具体的に取る必要がある。 ρ は調和であったので Z を

$$(11) \quad \nabla Z = -\tilde{\nabla} \rho$$

で定義される共役調和関数とする。 $x^3 = \rho, x^4 = Z$ ととることが多い。さらに円柱座標 ρ, Z から関係式

$$\rho^2 = (x^2 - 1)(1 - y^2), \quad Z = xy$$

で楕円体座標 x, y を定義する。 δ も自然数として

$$\xi = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta, \quad \psi = \frac{\delta}{2} \log \frac{x-1}{x+1}$$

で与えられる線素を δ 次の Weyl 解という。 $\delta = 1$ とする

と $\xi = x$ で線素は Schwarzschild 解である。

未知関数 ξ と楕円体座標を用いると Kerr 解も

$$\xi = x \cos \lambda + i y \sin \lambda \quad (\lambda: \text{実パラメータ})$$

ときわめて簡潔に表示される ([3]).

Kerr 解は 1 次の Weyl 解に回転を与えたものであるが, 富松-佐藤解は $\delta = 2, 3, \dots$ 次の Weyl 解に回転を与えたものである.

次に基本的関係式 (7) に関する二つの補題を述べる.

補題 1.

$$\nabla H_{AB} = -i p^{-1} f_A^x \tilde{\nabla} H_{xB}$$

$$\nabla H'_{AB} = -i p^{-1} f_A^x \tilde{\nabla} H'_{xB}$$

が成立するならば

$$\nabla N_{AB} = H_{xA}^* \nabla H'^x_B$$

となる N_{AB} が存在する.

補題 2. N_{AB} は $H_{AB} = \varepsilon_{AB}$, H'_{AB} に対して前補題から定めたものとする.

$$P_{AB} = N_{AB} + \varepsilon_{AX} H'^x_B$$

とおくと

$$\nabla P_{AB} = -i p^{-1} f_A^x \tilde{\nabla} P_{xB}$$

が成立する.

証明は簡単である ([7, II]).

補題1, 2より次の式で定義される系列 $\epsilon_{AB}^n, N_{AB}^n$ が存在する:

$$\begin{aligned}\nabla N_{AB}^n &= \epsilon_{XA}^* \nabla \epsilon_B^n \\ \epsilon_{AB}^{n+1} &= i(N_{AB}^n + \epsilon_{AX} \epsilon_B^n),\end{aligned}$$

ただし

$$\epsilon_{AB}^1 = \epsilon_{AB}.$$

さらに

$$\nabla N_{AB}^{nn} = \epsilon_{XA}^{nn*} \nabla \epsilon_B^{nn}$$

から定まる N_{AB}^{nn} も存在する, ただし

$$N_{AB}^n = N_{AB}^{nn}.$$

さらに

$$N_{AB}^{on} = -i \epsilon_{AB}^n$$

と規約しておく.

Kinnersley - Chitre は (先行する Geroch [4] の結果を拡張して) 定常, 軸対称時空の変換群を構成した. その作用は (微小変換の形で) N_{AB}^{nn} によりあらわされる, さらに漸近的平坦 (asymptotically flat) 性をもつ変換は可換群をなすこととその具体的な形をも見出した ([7, VI]), 結果は複雑でこれらの群の正体はよくわからなりが計算例として Kerr 解, 富松佐藤解 ($\delta=2$) を対応する Weyl 解を変換しておめている.

漸近的平坦 定常軸対称な時空に作用する無限次元の可換群があることは方程式の完全積分可能性に由来しているに違いない。Lax 表示の類似のあることを示した[9] ,

Wahlquist-Estabrook型の prolongation structure の存在を示した[5] も積分可能性を支持しているといえよう。積分可能性をより明確な形で示すことが望まれる。

References

- [1] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer, Introduction to general relativity, McGraw-Hill, second edition 1975.
- [2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York (1978).
- [3] F.J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, Phys. Rev. 167 (1968), 1175-1178.
- [4] R. Geroch, A method for generating new solutions of Einstein's equation. II , J.Math. Phys. 13 (1972), 394-404.
- [5] B.K. Harrison, Bäcklund transformation for the Ernst equation of general relativity, Phys. Rev. Lett. 41 (1978), 1197-1200.
- [6] W. Kinnersley, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations. I , J.Math. Phys. 18 (1977), 1529-1537.
- [7] W. Kinnersley and D.M. Chitre, Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations, J. Math. Phys. II 18 (1977), 1538-1542; III 19 (1978), 1926-1931; IV 19 (1978), 2037-2042.
- [8] F. Lund and T. Regge, Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, Phys. Rev. D 14 (1976), 1524-1535.
- [9] D. Maison, Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable?, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 521-522.
- [10] R.M. Miura (ed.), Bäcklund transformations, the inverse scattering method, solitons, and their applications, Lect. Note in Math. 515, Springer, 1976.
- [11] A. Tomimatsu and H. Sato, New series of exact solutions for gravitational fields of spinning masses, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 95-110.
- [12] H.D. Wahlquist and F.B. Estabrook, Prolongation structures of nonlinear evolution equations, J. Math. Phys. 16 (1975), 1-7.