

コーエン強制, ランダム強制に関する 位相空間の性質の保存

嘉田 勝* / Masaru Kada

大阪府立大学 / Osaka Prefecture University

概要

強制拡大によって位相空間の性質が保存されるか, それとも破壊されるかを調べることは, 強制法によって特定の性質を持つ位相空間を構成する (すなわち, その性質を持つ位相空間の存在が ZFC 上無矛盾であることを証明する) うえで, 強力な道具となる. 本稿の目的は, 特にコーエン強制, ランダム強制に関する位相空間の性質の保存に注目して, 「強制拡大で位相空間の性質が保存される」とはどういうことかを説明し, また, それはどのように証明されるか, 議論の一例を紹介することである.

1 位相空間の性質の保存とは

(X, τ) を基底モデル V に存在する位相空間とする. 強制拡大モデルに関する位相空間の性質の保存を議論するためには, 強制概念 $\mathbb{P}$ による V の強制拡大モデル $V^{\mathbb{P}}$ における, 位相空間 (X, τ) に「対応する」位相空間を定める必要がある.

注意 1. 「強制拡大モデル」というからには, 本来は $\mathbb{P}$ のジェネリックフィルター G を選んで $V[G]$ と記すべきだが, 本稿では, $\mathbb{P}$ -name 全体の空間を表す記号 $V^{\mathbb{P}}$ を, 強制拡大 $V[G]$ を表す記号としても流用する. 同様に, 「 $V[G]$ に属する集合」と「 $\mathbb{P}$ -name」も厳密に区別せず, $\mathbb{P}$ -name を「 $V[G]$ に属する集合」を表す記号としても流用する. また, V に属する集合を $V[G]$ の視点で扱うことを明確にするために, チェックつきの $\mathbb{P}$ -name (たとえば $\check{X}$) を用いて表すことにする.

ここで, $V^{\mathbb{P}}$ においては τ は集合 $\check{X}$ 上の位相とは限らないことに注意が必要である. 強制拡大によって τ が「和集合について閉じている」という性質を失う, すなわち, V に

* 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 21740080.

は存在しない τ の無限部分集合が $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ には存在して、そのような「新しい」 τ の部分集合の和集合は τ に属さないということが起こりうるからである。

しかし、 τ は $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において依然として X の開基をなす。そこで、 τ に対応する X 上の位相として、 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において τ を開基として生成される位相を考え、それを $\tau^{\mathbb{P}}$ で表す。そして、 $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ を、 $\mathbf{V}$ での (X, τ) に対応する $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の位相空間と考えるという立場をとる。 φ を位相空間の性質とする。強制概念 $\mathbb{P}$ について、

基底モデル $\mathbf{V}$ の位相空間 (X, τ) が性質 φ をもつならば、 $\mathbb{P}$ による強制拡大モデル $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において、位相空間 $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ が性質 φ をもつ

という性質が成り立つとき、 $\mathbb{P}$ による強制拡大は性質 φ を保存するという。

注意 2. 基底モデルの空間 (X, τ) に対応する拡大モデルの空間を考えると、集合として考えるのは $\check{X}$ 、すなわち「基底モデルの集合 X そのものを拡大モデルの視点で見たもの」であって、拡大モデルで X の定義に基づいて「再構成」されたものではない。たとえば、 $\mathbf{V}$ の閉区間 $I = [0, 1]$ に対応する $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の位相空間としては、「 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ における」閉区間 $I^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}} = [0, 1]^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}}$ を考える^{*1}のがある意味で自然だが、本稿ではその立場をとらない。空間の定義に基づいて拡大モデルで空間を再構成すると、当然ながら、ZFC で証明可能な空間の性質はすべて再現されるので、性質の保存の議論は意味をなさない。

この意味で、強制拡大によってどのような性質が保存され、また、どのような性質が壊されるだろうか。簡単な例をいくつか見てみよう。

例 1.1. T_1 分離公理、 T_2 (ハウスドルフ) 分離公理など、「点」と「点の近傍基」だけで定義できる空間の性質は、いかなる強制拡大によっても保存される。このことは、基底モデルと拡大モデルで、対応する位相空間が同じ開基をもつことから明らか。

例 1.2. 点列の収束および集合の集積の概念は、収束点あるいは集積点の近傍基だけで議論できるので、いかなる強制拡大についても、基底モデルと拡大モデルで一致する。特に、基底モデルに属する集合の閉包は、基底モデルと拡大モデルのどちらで考えても、同じ集合になる。

例 1.3. 正則性 (regularity) はいかなる強制拡大によっても保存される。 $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の 1 点 $\check{x}$ とその開近傍の $\mathbb{P}$ -name $\check{U}$ が与えられたとき、 τ に属する x の近傍 V で $\check{V} \subseteq \check{U}$ なる

^{*1} $\mathbb{P}$ による強制拡大で実数が付加されている可能性があるので、一般に $I^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}} = [0, 1]^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}}$ と $\check{I} = [0, 1]^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}} \cap \mathbf{V}$ は集合として異なる。

ものを選んで、 V における (X, τ) の正則性を x と V に適用すればよい。閉包作用素は強制拡大で不変なので、 V における分離は V^P においても有効である。同じ理由で、完全正則性も強制拡大で保存される。

正規性 (normality) は強制拡大で必ずしも保存されないことが知られている [2]。

例 1.4. コンパクト性、連結性は強制拡大によってたやすく壊れる。 $\mathbb{R}$ の閉区間 $I = [0, 1]$ はコンパクトかつ連結だが、強制拡大によって実数が付加されると、明らかに $\tilde{I}$ の連結性は失われる。また、付加された実数に両側からそれぞれ収束する点列を使って、 $\tilde{I}$ を開集合の真の可算上昇列で被覆できるので、コンパクト性も失われている。

さらに、基底モデルの実数と付加された実数はどちらも稠密に存在するので、 $\tilde{I}$ は 0 次元であり、位相的次元の概念も強制拡大によって保存されないことがわかる。

これらの例のように、位相空間の性質の中には、強制拡大でつねに保存されるものと、保存されるとは限らないものがある。

必ずしも保存されない位相的性質については、強制概念について何らかの仮定をおけば性質の保存が成り立つことがある。ある位相的性質が強制拡大で保存されるために強制概念がみたすべき性質を見出すことは、強制法理論と位相空間論の両方の面で興味深い問題である ([4] はこの方向からの研究成果のひとつである)。一方、コーエン強制、ランダム強制のような特定の強制概念がどのような位相的性質を保存するかを調べることも、応用上きわめて有益である。

本稿の主な目的は、コーエン強制とランダム強制はともに空間のリンデレーフ性を保存するという定理の証明を例として、位相空間の性質の強制拡大による保存性を証明するための典型的な議論のパターンを紹介することである。

2 エンダウメント

エンダウメント (endowment, あるいは n -dowment) とは、A. Dow が発見した、コーエン強制概念についての組合せ論的性質である。^{*2*}^{*3} 本来はエンダウメントはコーエン強制概念についてのみ定義されたものだが、次のように、一般の強制概念についての組合せ

^{*2} Dow は当初これに名前を与えなかったが、後の Dow, Tall, Weiss の共著論文 [1] で再び利用されたときに、“ n -dowment” という名前が与えられた。もちろん、この名前は “Dow” にひっかけた洒落であり、名付け親は Dow 以外の共著者のどちらかである。

^{*3} n -dowment と記すと、“ n ” が自然数パラメータなのか名称の一部なのかのかわかりにくいという欠点があるので、本稿では “ n ” を使わず、「エンダウメント」あるいは “endowment” と記す。

論的性質として再定義すると、ランダム強制概念もエンダウメントをもつことが容易にわかる。

定義 2.1. 強制概念 $\mathbb{P}$ に対し、 $\mathbb{P}$ の部分集合の $\subseteq$ に関する上昇列 $\langle P_n : n < \omega \rangle$ で、 $\mathbb{P} = \bigcup_{n < \omega} P_n$ となるものが定められているとする。強制概念 $\mathbb{P}$ が**エンダウメントをもつ**とは、次の性質をみたす**エンダウメントの系列** $\langle \mathcal{L}_n : n < \omega \rangle$ が存在するときという。個々の $\mathcal{L}_n$ を $\mathbb{P}$ の n 番めの**エンダウメント**という。^{*4}

- (1) 各 $n < \omega$ について、 $\mathcal{L}_n$ は $\mathbb{P}$ の有限な反鎖の集合である。
- (2) すべての $n < \omega$ と、すべての $\mathbb{P}$ の極大反鎖 A について、 $L \in \mathcal{L}_n$ で $L \subseteq A$ をみたすものが存在する。
- (3) すべての $n < \omega$ 、すべての $p \in P_n$ 、すべての $L \in \mathcal{L}_n$ について、 $q \in L$ で p, q が $\mathbb{P}$ で compatible であるものが存在する。

無限基数 κ を index set とするコーエン強制概念、ランダム強制概念をそれぞれ $\mathbb{C}(\kappa)$, $\mathbb{B}(\kappa)$ で表す。

コーエン強制概念 $\mathbb{C}(\kappa)$ はエンダウメントをもつ。この結果は “Dow’s Lemma” と呼ばれる定理 [1] の特殊な場合である。 $\mathbb{C}(\kappa)$ の可算上昇列への切り分けは、 $\mathbb{C}(\kappa) = \bigcup_{n < \omega} C_n$, $C_n = \{p \in \mathbb{C}(\kappa) : |p| \leq n\}$ でよい。証明は [6, Appendix] を参照されたい。

定理 2.2. すべての無限基数 κ について、コーエン強制概念 $\mathbb{C}(\kappa)$ はエンダウメントをもつ。

ランダム強制概念 $\mathbb{B}(\kappa)$ がエンダウメントをもつことは、簡単な測度の議論で示せる。

定理 2.3. すべての無限基数 κ について、ランダム強制概念 $\mathbb{B}(\kappa)$ はエンダウメントをもつ。

証明. μ を 2^κ 上の測度とする。 $\mathbb{B}(\kappa)$ の可算上昇列への切り分けを $\mathbb{B}(\kappa) = \bigcup_{n < \omega} B_n$, $B_n = \{p \in \mathbb{B}(\kappa) : \mu(p) \geq 2^{-n}\}$ で定める。各 $n < \omega$ について、 n 番めのエンダウメント $\mathcal{L}_n$ を、「測度の和が $1 - 2^{-n}$ より大きい $\mathbb{B}(\kappa)$ の有限反鎖全体の集合」とすればよい。□

コーエン強制概念とランダム強制概念に関する位相的性質の保存定理は、エンダウメントを使って議論することで、統一的に証明することができる。

^{*4} ここでの「エンダウメント」は、[6] でいう “weak endowment” を指す。Dow の当初の定義による “endowment” は本稿では用いないので、本稿では “weak endowment” を単に「エンダウメント」と呼ぶことにした。

以下、 $\mathbb{P}$ はエンダウメントをもつ強制概念とし、 $\mathbb{P}$ の可算上昇列への切り分け $\mathbb{P} = \bigcup_{n < \omega} P_n$ と、それに対応するエンダウメントの系列 $\langle \mathcal{L}_n : n < \omega \rangle$ が固定されているものとする。

エンダウメントを使うと、拡大モデルの位相空間 $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の開被覆の $\mathbb{P}$ -name を、基底モデルの位相空間 (X, τ) の開被覆で「近似」することができる。エンダウメントをもつ強制概念による位相的性質の保存は、この「近似」を経由して議論することで証明できる。

$(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の開被覆の $\mathbb{P}$ -name $\dot{U}$ が与えられたとする。各 $n < \omega$ について、 $\langle \mathcal{L}_n : n < \omega \rangle$ による $\dot{U}$ の n 番めの近似 $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ を次の要領で定義する。

$\dot{U}$ は $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の開被覆であることが強制されていて、また、 $\check{\tau}$ は $\tau^{\mathbb{P}}$ の開基をなすので、 X の各点 $x \in X$ について、 $\check{\tau}$ の要素を表す $\mathbb{P}$ -name $\dot{W}_x$ を、

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\check{x} \in \dot{W}_x \text{ かつ } \exists U \in \dot{U} (\dot{W}_x \subseteq U)\text{”}$$

をみたすように選べる。各点 $x \in X$ について、 $\mathbb{P}$ の極大反鎖 A_x と、各 $p \in A_x$ に対応する開集合 $W_{x,p} \in \tau$ を、各 $p \in A_x$ について $x \in W_{x,p}$ かつ $p \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{W}_x = \dot{W}_{x,p}\text{”}$ をみたすようにとる。

$n < \omega$ について、 $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ を次のとおり定める。各点 $x \in X$ について、 $L_{x,n} \in \mathcal{L}_n$ を $L_{x,n} \subseteq A_x$ となるように選び出し、 $V_{x,n} = \bigcap \{W_{x,p} : p \in L_{x,n}\}$ と定める。すると、 $L_{x,n}$ が有限な反鎖であることが奏効して、 $V_{x,n}$ は x を要素にもつ開集合となる。これら $V_{x,n}$ をすべての点 x について集めて、 $\mathcal{V}_n(\dot{U}) = \{V_{x,n} : x \in X\}$ とすれば、これは X の開被覆となる。

$\mathcal{V}_n(\dot{U})$ は次の性質をもつことが容易にわかる。

補題 2.4. $n < \omega$ について、 $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ を $\langle \mathcal{L}_n : n < \omega \rangle$ による $\dot{U}$ の n 番めの近似とする。このとき、各 $n < \omega$ について、すべての $V \in \mathcal{V}_n(\dot{U})$ と $p \in P_n$ に対して、 $r \in \mathbb{P}$ を、 $r \leq p$ かつ $r \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\exists U \in \dot{U} (\check{V} \subseteq U)\text{”}$ をみたすようにとれる。

証明. $n < \omega$, $V \in \mathcal{V}_n(\dot{U})$, $p \in P_n$ を固定する。 $x \in X$ を、 $V = V_{x,n}$ ($V_{x,n}$ は $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ の構成に現れるもの) となるように選び、この x について $L_{x,n}$ に着目する。 n 番めのエンダウメント $\mathcal{L}_n$ の性質によって、 $q \in L_{x,n}$ と $r \in \mathbb{P}$ を、 $r \leq p$ かつ $r \leq q$ となるように選べる。 $V_{x,n}$ の定義によって、 $V = V_{x,n} \subseteq W_{x,q}$ である。 $\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\exists U \in \dot{U} (\dot{W}_x \subseteq U)\text{”}$ かつ $q \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{W}_x = \dot{W}_{x,q}\text{”}$ だから、 $r \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\exists U \in \dot{U} (\check{V} \subseteq U)\text{”}$ が成り立つ。□

3 エンダウメントとリンデレーフ性の保存

前節で定義した、エンダウメントによる開被覆の近似を利用して、エンダウメントをもつ強制概念がリンデレーフ性を保存することを証明しよう。この結果は、Dow, Tall, Weiss の論文 [1] で最初に証明され、後に Iwasa [3] および嘉田 [6] によって、より一般化された定理に拡張されている。拡張された結果については [6] を参照されたい。

補題 3.1. (X, τ) を位相空間, $\dot{U}$ を $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の開被覆を表す $\mathbb{P}$ -name, $n < \omega$, $\mathcal{H} \subseteq \tau$ を $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ の細分^{*5}とする。このとき, $\mathcal{H}$ の部分族を表す $\mathbb{P}$ -name $\dot{W}$ を, 次の性質をもつように構成できる。

- (1) $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W}$ は $\dot{U}$ の細分である。
- (2) すべての $p \in P_n$ および $H \in \mathcal{H}$ に対して, $r \in \mathbb{P}$ を, $r \leq p$ かつ $r \Vdash_{\mathbb{P}} \check{H} \in \dot{W}$ となるように選べる。

証明. $\mathbb{P}$ -name $\dot{W}$ を, 次の性質をみたすように作る。このような構成が可能であることは, “maximal principle” ([5, VII Theorem 8.2] 参照) により保証される。

各 $H \in \mathcal{H}$ および各 $p \in \mathbb{P}$ について,

- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists U \in \dot{U} (\check{H} \subseteq U)$, ならば, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \check{H} \in \dot{W}$ であり, また,
- $\forall r \leq p (r \nVdash_{\mathbb{P}} \exists U \in \dot{U} (\check{H} \subseteq U))$ (すなわち $p \Vdash_{\mathbb{P}} \forall U \in \dot{U} (\check{H} \not\subseteq U)$) ならば, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \check{H} \notin \dot{W}$ である。

補題 2.4 を使えば, この $\dot{W}$ が所期の性質をみたすことを容易に確かめられる。 □

定理 3.2. $\mathbb{P}$ がエンダウメントをもつ強制概念ならば, $\mathbb{P}$ は位相空間のリンデレーフ性を保存する, すなわち, (X, τ) がリンデレーフ空間ならば, $\Vdash_{\mathbb{P}} (\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ はリンデレーフ空間” が成り立つ。

証明. (X, τ) をリンデレーフ空間, $\dot{U}$ を $(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$ の開被覆を表す $\mathbb{P}$ -name とする。

各 $n < \omega$ について, $\langle \mathcal{L}_n : n < \omega \rangle$ による $\dot{U}$ の n 番めの近似 $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ を考える。 (X, τ) がリンデレーフ空間であることを利用して, 各 $n < \omega$ について, $\mathcal{V}_n(\dot{U})$ の可算部分開被覆 $\mathcal{H}_n$ をとり, さらに, $\mathcal{H}_n$ に補題 3.1 を適用して, $\mathcal{H}_n$ の部分族を表す $\mathbb{P}$ -name $\dot{W}_n$ をとる。

^{*5} 本稿では, 「細分」というとき, それ自体がまた被覆であることまでは要求しないものとする。

$\mathbb{P}$ -name $\dot{W}$ を, $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W} = \bigcup_{n < \omega} \dot{W}_n$ をみたすものとする. このとき, $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W}$ は可算” は明らか. $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W}$ は $\check{X}$ の被覆” を示せばよい.

そこで, $x \in X$ および $p \in \mathbb{P}$ を任意にとる. $n < \omega$ を $p \in P_n$ となるように選ぶ. また, $\mathcal{H}_n$ が X の被覆であることから, $H \in \mathcal{H}_n$ を $x \in H$ となるように選ぶ. ここで, 補題 3.1 で保証された $\dot{W}_n$ の性質によって, $r \in \mathbb{P}$ を, $r \leq p$ かつ $r \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{H} \in \dot{W}_n$ なるように選べる. x は X の任意の点, p は $\mathbb{P}$ の任意の強制条件だったから, $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{W}$ は $\check{X}$ の被覆” が示された. $\square$

系 3.3. すべての無限基数 κ について, コーエン強制概念 $\mathbb{C}(\kappa)$ およびランダム強制概念 $\mathbb{B}(\kappa)$ は位相空間のリンデレーフ性を保存する.

参考文献

- [1] A. Dow, F. D. Tall, and A. R. Weiss. New proofs of the consistency of the normal Moore conjecture I. *Topology Appl.*, 37:33–51, 1990.
- [2] R. Grunberg, L. R. Junqueira, and F. D. Tall. Forcing and normality. *Topology Appl.*, 84:145–174, 1998.
- [3] A. Iwasa. Covering properties and Cohen forcing. *Topology Proc.*, 31:553–559, 2007.
- [4] M. Kada. Preserving the Lindelöf property under forcing extensions. *Topology Proc.*, 38:237–251, 2011.
- [5] K. Kunen. *Set Theory: an introduction to independence proofs*, volume 102 of *Studies in Logic*. North Holland, 1980.
- [6] 嘉田 勝. Remarks on the preservation of topological covering properties under cohen forcing. In **無限集合上の組合せ論と強制法理論**, number 1686 in 数理解析研究所講究録, pages 63–72. 京都大学数理解析研究所, 2010.