

Hausdorff-gap から得られる ideal に関して

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

この論文では、集合論における記法を用いる。

Definition. X を ω の subset、 $f, g : X \rightarrow \omega$ とするとき、

$$f \prec g \text{ iff } \{ n \in X ; g(n) \leq f(n) \} \text{ が finite}$$

と記し、 g は f を dominate するという。

Definition. κ, λ を無限基数とする。 $\langle \langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \mid \langle g_\beta \mid \beta < \lambda \rangle \rangle$

が (κ, λ) -gap であるとは、

$$(1) f_\alpha, g_\beta : \omega \rightarrow \omega, \text{ for any } \alpha < \kappa, \beta < \lambda,$$

$$(2) f_\alpha \prec f_\gamma \prec g_\delta \prec g_\beta, \text{ for any } \alpha < \gamma < \kappa, \beta < \delta < \lambda$$

が成り立つことである。

(κ, λ) -gap $\langle \langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \mid \langle g_\beta \mid \beta < \lambda \rangle \rangle$ が, unfilled であるとは、

$$f_\alpha \prec h \prec g_\beta, \text{ for any } \alpha < \kappa, \beta < \lambda$$

を満たす $h : \omega \rightarrow \omega$ が存在しないことである。

unfilled な (ω_1, ω_1) -gap を Hausdorff gap (略して、H-gap) と呼ぶ。

次の Fact は、よく知られている。

Fact. 正則無限基数 κ, λ に対して、 $(\kappa, \lambda) \neq (\omega_1, \omega_1)$ なら、

$$\mathbb{W} = \text{"unfilled な } (\kappa, \lambda)\text{-gap は存在しない"}$$

を満たす基数を保つ適当な generic extention $\mathbb{W}$ が存在する。

H-gap に関して、Fact とは対照的な次の定理が成り立つ。

定理 (Hausdorff[D, Theorem 4.3]) H-gap は、存在する。

この論文では、H-gap $\mathcal{Q} = \langle \langle f_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \rangle$ から得られるイデアル:

$$I_{\mathcal{Q}} = \{ x \subset \omega ; \exists h : x \rightarrow \omega \forall \alpha < \omega_1 (f_\alpha \upharpoonright x < h < g_\alpha \upharpoonright x) \}$$

に関して2つの結果を示す。

定義から明らかなように、任意の H-gap $\mathcal{Q}$ に対して、

$$\text{fin} = \{ x \subset \omega ; x \text{ is finite} \} \subset I_{\mathcal{Q}}$$

が成り立つ。

定理 1 (CH) の上のイデアル $\mathcal{I}$ が $\text{fin} \subset \mathcal{I}$ を満たすなら、 $\mathcal{I} = I_{\mathcal{Q}}$ となる H-gap $\mathcal{Q}$ が存在する。

証明. 連続体仮説 (CH) を仮定する。 $\mathcal{I}$ を ω 上のイデアルで $\text{fin} \subset \mathcal{I}$ を満たすものとする。

各 $f, g : \omega \rightarrow \omega$ に対して、

$$f \ll g \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \omega} (g(n) - f(n)) = \omega$$

と記す。

$$\mathcal{K} = \{ s ; \exists x \subset \omega (x \in \mathcal{I} \ \& \ s : x \rightarrow \omega) \}$$

とおき、

$$\langle s_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle : \mathcal{K} \text{ の enumeration,}$$

$$\langle a_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle : \mathcal{I} \text{ の enumeration}$$

とし、各 $\alpha < \omega_1$ に対して、

$$b_\alpha = \text{domain}(s_\alpha)$$

とおく。

$\alpha < \omega_1$ に関する induction により、 $f_\alpha, g_\alpha : \omega \rightarrow \omega$ と $h_\alpha : a_\alpha \rightarrow \omega_1$ を、次の (1)~(4) を満たすようにとる。

- (1) $f_\xi < f_\alpha \ll g_\alpha < g_\xi$, for any $\xi < \alpha$,
- (2) $f_\alpha \upharpoonright a_\xi \ll h_\xi \ll g_\alpha \upharpoonright a_\xi$, for any $\xi < \alpha$,
- (3) $f_\alpha \upharpoonright b_\alpha \not\ll s_\alpha$ or $s_\alpha \not\ll g_\alpha \upharpoonright b_\alpha$.

$$(4) \quad f_\alpha \vdash a_\alpha \ll h_\alpha \ll g_\alpha \vdash b_\alpha$$

いま、(1)~(4) をみたす $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha$ (for $\alpha < \omega_1$) がとれたとする。

(1) より、

$$\mathcal{Q} = \langle \langle f_\alpha \restriction \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \restriction \alpha < \omega_1 \rangle \rangle : \text{gap}$$

が成り立つ。又、(2) より任意の $\beta < \omega_1$ に対して、

$$f_\alpha \vdash a_\beta \ll h_\beta \ll g_\alpha \vdash a_\beta, \text{ for any } \alpha < \omega_1$$

となるから、

$$a_\beta \in I_{\mathcal{Q}}$$

が成り立つ (i.e., $\mathcal{Q} \subset I_{\mathcal{Q}}$)。更に、(3) より、

$$I_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}$$

である。

以下、(1)~(4) をみたす $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha$ が ($\alpha < \omega_1$ に関する induction で) とれることを示す。

Notation. $X, Y \subset {}^\omega \omega$ に対して、

$$X \ll Y \text{ iff } \forall f \in X \forall g \in Y (f \ll g)$$

と記す。

補題 1. $X, Y \subset {}^\omega \omega$ が、 $0 < |X| \leq \omega$ & $|Y| \leq \omega$ & $X \ll Y$ を満たすなら、

$$X \ll \{h\} \ll Y$$

を満たす $h : \omega \rightarrow \omega$ が存在する。

証明. $Y = \emptyset$ なら明らかだから、 $Y \neq \emptyset$ としておく。

$$\langle f_n \restriction n < \omega \rangle : X \text{ の enumeration,}$$

$$\langle g_n \restriction n < \omega \rangle : Y \text{ の enumeration}$$

をとっておく。 $X \ll Y$ だから、任意の $k < \omega$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \omega} (\min\{g_i(n); i \leq k\} - \max\{f_i(n); i \leq k\}) = \omega$$

が成り立つ。そこで、各 $k < \omega$ に対して、 $n_k < \omega$ を、

$$n_k < n_{k+1},$$

$$\forall n \in [n_k, n_{k+1}) \quad (\min\{g_i(n); i \leq k\} - \max\{f_i(n); i \leq k\} \geq 2k),$$

となるようにとり、 $h: \omega \rightarrow \omega$ を、

$$h(n) = \max\{f_i(n); i \leq k\} + k, \text{ if } n \in [n_k, n_{k+1})$$

で定めれば、 $X \ll \{h\} \ll Y$ である。□

補題 2. b, s, X, Y, Z が、

$$b \subset \omega \text{ \& } s: b \rightarrow \omega \text{ \& } b \text{ is infinite,}$$

$$X, Y \subset {}^\omega \omega \text{ \& } Z \subset \{h; \exists x \subset \omega (h: x \rightarrow \omega)\},$$

$$X \neq \emptyset \text{ \& } |X| \leq \omega \text{ \& } |Y| \leq \omega \text{ \& } X \ll Y,$$

$$\forall h \in Z \quad (X \upharpoonright \text{domain}(h) \ll \{h\} \ll Y \upharpoonright \text{domain}(h)),$$

$$\forall h \in Z \quad (b \cap \text{domain}(h) \text{ is finite})$$

を満たすとする、

$$X \ll \{f\} \ll \{g\} \ll Y,$$

$$f \upharpoonright \text{domain}(h) \ll h \ll g \upharpoonright \text{domain}(h), \text{ for any } h \in Z,$$

$$f \upharpoonright b \preceq s \text{ or } s \preceq g \upharpoonright b$$

を満たす $f, g: \omega \rightarrow \omega$ が存在する。

証明. $a = \omega \setminus b$ とおく。補題 1 を用いて、 $f_1, g_1: a \rightarrow \omega$ を、

$$X \upharpoonright a \ll f_1 \ll g_1 \ll Y \upharpoonright a,$$

$$f_1 \upharpoonright \text{domain}(h) \ll h \ll g_1 \upharpoonright \text{domain}(h), \text{ for any } h \text{ in } Z$$

となるようにとる。 $f_2, g_2: b \rightarrow \omega$ を、

$$f_2 \ll g_2 \text{ \& } X \upharpoonright b \prec f_2 \text{ \& } g_2 \prec Y \upharpoonright b,$$

$$f_2 \preceq s \text{ or } s \preceq g_2$$

となるようにとり、

$$f = f_1 \cup f_2, \quad g = g_1 \cup g_2$$

とすればよい。□

定理 1 の証明 (続) いま、 $\alpha < \omega_1$ に対して、 f_ξ, g_ξ, h_ξ (for $\xi < \alpha$) まで (1)~(4) を満たすようにとられたとする。

$$b_\alpha \in \mathcal{I} \quad \& \quad \{a_\xi; \xi < \alpha\} \subset \mathcal{I} \quad \& \quad \text{fin} \subset \mathcal{I}$$

だから、 $b \subset b_\alpha$ を、

$$b : \text{infinite} \quad \& \quad b \cap a_\xi : \text{finite}, \text{ for all } \xi < \alpha$$

となるようにとる。補題 2 より、 $f_\alpha, g_\alpha: \omega \rightarrow \omega$ を、

$$f_\xi < f_\alpha << g_\alpha < g_\xi, \text{ for all } \xi < \alpha,$$

$$f_\alpha \upharpoonright s_\xi << h_\xi << g_\alpha \upharpoonright s_\xi, \text{ for all } \xi < \alpha,$$

$$f_\alpha \upharpoonright b \times s_\alpha \upharpoonright b \text{ or } s_\alpha \upharpoonright b \times g_\alpha \upharpoonright b$$

となるようにとる。そして、 $h_\alpha: \omega \rightarrow \omega$ を、

$$f_\alpha \upharpoonright a_\alpha << h_\alpha << g_\alpha \upharpoonright a_\alpha$$

となるようにとればよい。 ■

定理 2 (CH) 基数 κ が、 $\kappa^\omega = \kappa$ を満たすとする。

$$P = \{ p ; \exists x \subset \kappa (|x| < \omega \quad \& \quad p: x \rightarrow 2) \}$$

(κ 個の Cohen real を付け加える partial ordering)

とおく。このとき、 V^P において、

$$\{ I_{\mathcal{Q}} ; \mathcal{Q} \text{ is a H-gap } \}$$

= the family of all ideals $\mathcal{I}$ such that

$$\text{fin} \subset \mathcal{I} \quad \text{and} \quad \mathcal{I} \text{ is } \leq \omega_1\text{-generated.}$$

が成り立つ。

$$Q = \{ q ; \exists x \subset \omega (|x| < \omega \quad \& \quad q: x \rightarrow 2) \}$$

とおく。定理 2 を示すため、まず次の補題を示す。

補題 3. $\mathcal{Q} = \langle \langle f_\alpha \upharpoonright \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \upharpoonright \alpha < \omega_1 \rangle \rangle$ を H-gap とし、 $\mathcal{I} =$

$I_{\mathcal{Q}}$ とおく。このとき、

$$V^Q \models " I_{\mathcal{Q}} \text{ is the ideal generated by } \mathcal{I} "$$

が成り立つ。

証明. $V^Q = "I \subset I_Q"$ は、明かだから、 $=$ を示すには、

$$\Vdash_Q \forall x \in I_Q \exists y \in I (x \subset y)$$

を示せば十分である。それを示すため、

$$q \in Q \text{ \& } x : Q\text{-name} \text{ \& } q \Vdash x \in I_Q$$

とする。 $Q\text{-name } h$ を、

$$\Vdash h : x \rightarrow \omega \text{ \& } \forall \alpha < \omega (f_\alpha \restriction x < h < g_\alpha \restriction x)$$

となるようにとる。各 $\alpha < \omega_1$ に対して、 $q_\alpha \leq q$ と $n_\alpha < \omega$ を、

$$q_\alpha \Vdash \forall k \in x \setminus n_\alpha (f_\alpha(n) < h(n) < g_\alpha(n))$$

となるようにとる。 $|Q \times \omega| = \omega$ だから、 $r \in Q$ と $\kappa < \omega$ を、

$$A = \{ \alpha < \omega_1 ; q_\alpha = r \text{ \& } n_\alpha = \kappa \} \text{ is cofinal in } \omega_1$$

となるようにとる。

$$y = \{ k < \omega ; \kappa \leq k \text{ \& } \exists r' \leq r (r' \Vdash k \in x) \}$$

とおく。 y のとりかたから、

$$r \Vdash x \subset y \cup \kappa$$

である。以下、 $y \in I$ を示す。

☆ $\alpha, \beta \in A$ \& $k \in y$ とすると、

$$f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k)$$

が成り立つ。

$\therefore$ $\alpha, \beta \in A$ \& $k \in y$ とする。 $r' \leq r$ を、

$$r' \Vdash k \in x$$

となるようにとる。このとき、 $k \geq \kappa$ だから、

$$r' \Vdash f_\alpha(k) < h(k) < g_\beta(k)$$

が成り立つ。

$$\therefore r' \Vdash f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k).$$

$$\therefore f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k).$$

△

☆より、 $h : y \rightarrow \omega$ を、

$$h(k) = \max \{ f_\alpha(k) ; \alpha \in A \} + 1$$

で定める。定めかたと☆より、

$$\forall \alpha < \omega (f_\alpha \upharpoonright y < h < g_\alpha \upharpoonright y)$$

が成り立つ。 $\therefore y \in \mathfrak{A}$. $\square$

系 3.1. $\mathfrak{Q} = \langle \langle f_\alpha \upharpoonright \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \upharpoonright \alpha < \omega_1 \rangle \rangle$ を H-gap とし、

$\mathfrak{A} = I_{\mathfrak{Q}}$ とおく。このとき、

$$V^P \models "I_{\mathfrak{Q}} \text{ is the ideal generated by } \mathfrak{A}"$$

が成り立つ。

証明. 補題 3 と

$$V^P \cap \mathcal{P}(\omega) \subset \cup \{ V^{P \upharpoonright A} ; A \in V \text{ \& } A \subset \kappa \text{ \& } |A| \leq \omega \}$$

より明か。 $\square$

定理 2 の証明. まず、 V^P において、

$$\forall \mathfrak{Q} : \text{H-gap } (I_{\mathfrak{Q}} \text{ is } \leq \omega_1\text{-generated})$$

が成り立つことを示す。そこで、

$$\mathfrak{Q} \in V^P \text{ and } V^P \models \mathfrak{Q} \text{ is a H-gap}$$

とする。 $A \in V$ を、

$$|A| \leq \omega_1 \text{ \& } \mathfrak{Q} \in V^{P \upharpoonright A}$$

となるようにとる。 $V^{P \upharpoonright A} \models CH$ だから、

$$V^{P \upharpoonright A} \models I_{\mathfrak{Q}} \text{ is } \leq \omega_1\text{-generated}$$

が成り立つ。 $P \cong (P \upharpoonright A) \times (P \upharpoonright (\kappa \setminus A))$ かつ $P \cong P \upharpoonright (\kappa \setminus A)$ だから、

系 3.1 より、

$$V^P \models I_{\mathfrak{Q}} \text{ is } \leq \omega_1\text{-generated}$$

である。

逆を示すため、

$$\mathfrak{A} \in V^P \text{ \& } V^P \models \mathfrak{A} \text{ is } \leq \omega_1\text{-generated and fin} \subset \mathfrak{A}$$

とする。 $S \in V^P$ を、

$$V^P = \{S \mid |S| \leq \omega_1 \text{ and } \mathcal{Q} \text{ is generated by } S\}$$

となるようにとり、 $A \in V$ を、

$$|A| \leq \omega_1 \quad \& \quad S \in V^{P \upharpoonright A}$$

となるようにとる。 $V^{P \upharpoonright A} = CH$ だから、定理 1 より、 $\mathcal{Q} \in V^{P \upharpoonright A}$ を、

$$V^{P \upharpoonright A} = \mathcal{Q} \text{ is a H-gap and } I_{\mathcal{Q}} \text{ is generated by } S$$

となるようにとる。系 3.1 より、

$$V^P = I_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$$

が成り立つ。 ■

参考文献

- [D] E. K. Van Douwen, The Integer and Topology, in Handbook of Set Theoretic Topology.