
講義ノート

低次元磁性体のスピン相関 —中性子散乱実験を中心として—

東大・物性研 平 川 金四郎

(1981年6月15日受理)

§ 1. 低次元化

相互作用している粒子からなる多体系の物理的現象、特に相転移、外場への応答等は粒子間の相対的な配置…次元性…によって著しく様子が変る。我々が日常接する様々な物理現象は、すべて三次元空間での現象であり、例えば相転移を例にとってみたとき、相互作用をする系ではエントロピー効果が少くなる低温に於ては、ある温度で相転移が起るであろうことは自明なことのよう思われていた。低次元化という思考は、複雑な物理現象を抽象化して、その中味を把握するための一方便にすぎなかったであろう。ところが低次元化という単純化は、それを相転移という現象の説明に用いようとする、思考の簡素化というだけにとどまらず、時には相転移の存在そのものをも否定することがあり得る程に大きい意義をもつことが分って来た。低次元の物理は恐らく、最初は思考の簡素化より出発し、やがて発見的にその重要さが認識されて来たとも言えるであろう。勿論、例えば“一次元系では有限温度で相転移は存在しない”ということが知られたのは古いことであるが、当時はそれが概念上でのみ存在する特殊な系であって、現実の系と結びつけて考えることはなされなかった。しかし二次元 Ising 系での相転移が 1944 年 Onsager^{1), 2)}により厳密に解かれて以来、加速度的に理論的研究が進み、さらに日本の長谷田等³⁾の低次元物質の先駆的発見につづいて、多くの実験的研究が行なわれるようになり、また数値計算技術の発展と相俟って、過去に於て思考上の一方便として取り上げられた低次元化が今ではもっと積極的に凝縮系の物理を理解するための研究の道すじとして登場するようになった。ここでは磁性系に限定して低次元化の意味するものを取扱ってみる。

§ 2. 低次元磁性体

磁性体の自由度

(n) ……次元

0 次元	一次元	二次元	三次元	四次元
(分子)	(鎖)	(面)	(立体)	(立体 + 長距離力)

スピン空間の対称性

Heisenberg (H) 型, XY (XY) 型, Ising (I) 型

下記の(1)式で $\xi = \eta = 1$; $\xi = 1, \eta = 0$; $\xi = \eta = 0$ にそれぞれ対応

低次元化のもたらすもの

(i) 思考の簡素化

例. スピン波等は一次元模型で十分意をつくせる。

(ii) 解析的解法

厳密解, ないし高い近似まで進められた解。

(iii) 計算機実験の可能性

(iv) 三次元結晶でみられる臨界領域が低次元化とともに拡大

温度, 時間的なスケールで

(v) 相転移現象の解明

(vi) 非線型現象の解明

ところで, 低次元化ということは三次元系に潜在する素過程を単純化して取り出してみせるといっただけにとどまらない。低次元化することによって始めて生ずる新しい現象も少なくなく, もっと積極的に意義を持つと思われる。例えば非線型励起等が良い例である。三次元系では生じ得ないような新しい現象が起る。中でも, 共鳴条件の破綻 (後述) それに伴う非エルゴード性の現われ, ソリトン現象などはその良い例であろう。

§ 3. ハミルトニアン

原子のスピンが $\mathbf{S}$ の場合, i 番目と j 番目等の原子に注目すると, その間に存在するすべての電子間に交換相互作用が働くから,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} = & -2J \sum_{\langle ij \rangle} [S_i^z S_j^z + \xi S_i^x S_j^x + \eta S_i^y S_j^y] \cdots \cdots \text{鎖内, 面内 (強い)} \\
 & -2J' \sum_{\langle il \rangle} [S_i^z S_l^z + \xi' S_i^x S_l^x + \eta' S_i^y S_l^y] \cdots \cdots \text{鎖間, 面間 (弱い)} \\
 & + A \sum_i S_i^{z'} + h \sum_i S_i^z, \cdots \cdots \text{異方性, ゼイマン効果} \\
 & \cdots \cdots \cdots (1)
 \end{aligned}$$

但し

g : g 因子

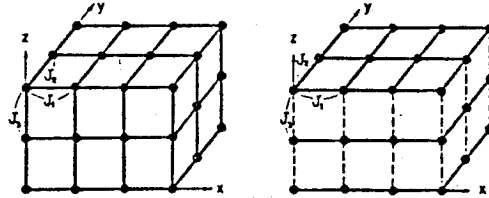
$$h = g\mu H$$

μ : Bohr磁子

H : 外部磁場

J と J' は交換積分, ξ, ξ', η と η' は交換相互作用から生じる異方性, そして A を含む項は結晶場の異方性で $S = \frac{1}{2}$ の時は使えない。

(a) 3次元磁性体 ($J_1 \simeq J_2 \simeq J_3$) (b) 2次元磁性体 ($J_1 \simeq J_2 \gg J_3$)



(c) 1次元磁性体 ($J_1 \gg J_2, J_3$) (d) 分子型磁性体 ($J_1 \gg J'_1, J_2, J_3$)

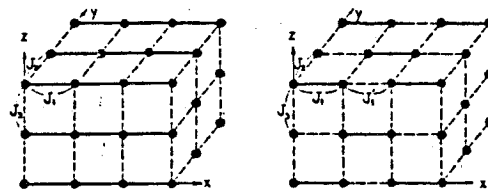


図1. 3次元から低次元へ, 黒丸はスピン格子点を示し, 実線は強い相互作用, 点線は弱い相互作用を示す。

図1における体系の三次元 Heisenberg AF系の比熱, 及び帯磁率の温度依存性を図2に示してある。臨界温度 T_c , 及び Néel 温度 T_N の次元の変化の推定図が図3にある。長距離秩序状態 (LRO) のスピン空間の対称性, 及び次元とのかかわり合での有無は表1の様になる。

表1. LROの有無

	n	1 D	2 D	3 D
$\xi = \eta = 0$	I	$T_c = 0^\circ \text{K}$ Exact	○ Onsager ¹⁾ Exact Solution	○ ?
$\xi = \eta = 1$	H	× $s = \frac{1}{2}, \eta$ $s = \infty$ 8)	×	○
$\xi = \eta \gg 1$	XY	4) 5) 6) × Exact sol	× 9) 10) △ (Top.LRO) Kosleritz Thouleas	○

$S = \frac{1}{2} \sim \infty$ によっても少しちがう。

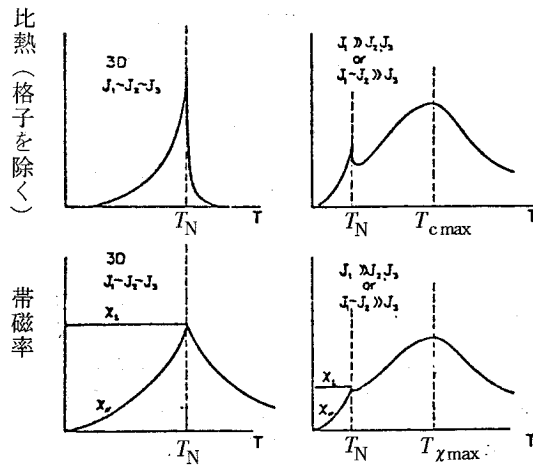


図 2. Heisenberg AF における 3D と低次元との比較
(比熱および帯磁率)

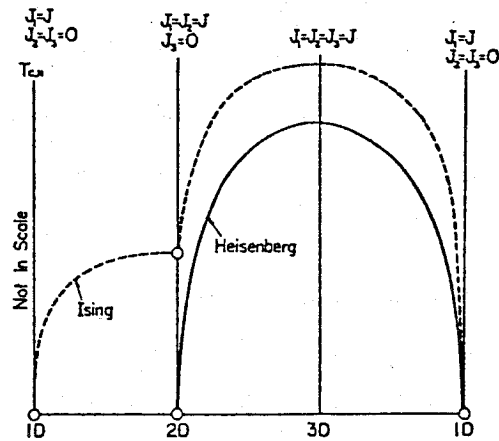


図 3. $T_{c,N}$ の次元による変化の推定図。定量的にはこれからである。厳密な解は○印および 1D-2D 間の Ising しかない。

§ 4. 一次元ハイゼンベルグ系

〔a〕 古典論^{8), 11), 12)}式(1)で $S \rightarrow \infty$ とした系で、スピン対相関々数は

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = U^\ell S^2, \quad U = \coth \left(\frac{2JS^2}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{2JS^2}, \quad \text{厳密解} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わされ、分子場近似での臨界温度 T_{MF} は

$$T_{MF} = \frac{2zJ}{3R} S(S+1), \quad z: \text{最近接分子数} \quad \dots\dots\dots (3)$$

 $T = 0$ の時

$$U^\ell = (\pm 1)^\ell,$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle S_i^\alpha \cdot S_{i+\ell}^\alpha \rangle = U^\ell S^2 = (\pm 1)^\ell \langle S^\alpha \rangle^2,$$

(LRO)

 $T > 0$ の時

$$\langle S_i^\alpha(0) S_{i+\ell}^\alpha(0) \rangle \simeq (\pm 1)^\ell S^2 e^{-\kappa a |\ell|},$$

但し

$$\xi_0 = 1/\kappa, \quad : \quad \text{相関距離}$$

で、 a は格子常数。

従って

$$a\kappa = a/\xi_0 = -\ln U. \quad \dots\dots\dots (4)$$

 T が低い時

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+\ell} \rangle \propto \frac{1}{T},$$

となり、強磁性では、相関々数 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+\ell} \rangle$ は常に正の値をとり、反強磁性では、 ℓ とともに符号を変え図4のようになる。

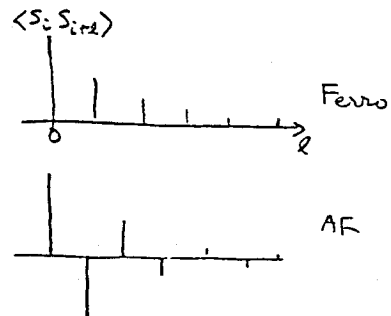


図 4.

一方，帯磁率は

$$\chi^{\alpha\alpha} = \frac{g^2 \mu^2}{N k_B T} \sum_i \langle S_i^\alpha \cdot S_{i+\ell}^\alpha \rangle,$$

$$= \frac{g^2 \mu^2}{k_B T} \langle S_{-K}^\alpha \cdot S_K^\alpha \rangle_{K=0} \quad .$$

強磁性 (F)

$$\chi = \frac{1}{3 k_B T} \frac{1 + \exp(-\tilde{K})}{1 - \exp \tilde{K}} \quad .$$

$$\tilde{K} \equiv \frac{J}{2 k_B T}$$

..... (5)

反強磁性 (AF)

$$\chi = \frac{1}{3 k_B T} \frac{1 - \exp(-\tilde{K})}{1 + \exp \tilde{K}} \quad ,$$

となる。

準弾性中性子散乱法によって同時刻スピン相関を考える。微分散乱断面積 $d\sigma(\mathbf{K})/d\Omega_f$ は

$$\frac{d\sigma(\mathbf{K})}{d\Omega_f} \propto \varphi(\mathbf{K}) = \sum_r e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \langle S_0(0) S_r(0) \rangle,$$

となり，散乱関数 $\varphi(\mathbf{K})$ に関連づけられる。一次元系である TMMC ((TM)MnCl₃) を想定し， κ を $2\pi/2a$ の単位で表わし， $S^2 \rightarrow S(S+1)$ とした¹¹⁾式(2)を用いると，

$$\left. \begin{aligned} \varphi(K^z) &= \frac{B}{\kappa^2 + \frac{2}{\pi} (\cos \pi K^z + 1)} \quad , \\ &\quad \text{(Ornstein Zernike 型)} \\ \kappa &= \frac{1+U}{\pi \sqrt{-U}}, \quad B = \frac{U^2 - 1}{\pi^2 U} S(S+1), \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (6)}$$

と表わされる。

Fisher の古典的最近接ハイゼンベルグ型についての結果は， K^z が奇数の所に強い ridge が出るので図 5 の実験値と良く一致している。極値での巾は相関距離に逆比例することがわかる。

動的性質

$T \approx 0$ の時，LRO はないので LRO 状態からの励起としてスピン波を考えるのは正しくない。しかし $\kappa \ll q^z$ (z 方向の波数) の時，SRO は十分発達するのでその中でスピン波が立つ，図 6 にその例がある。

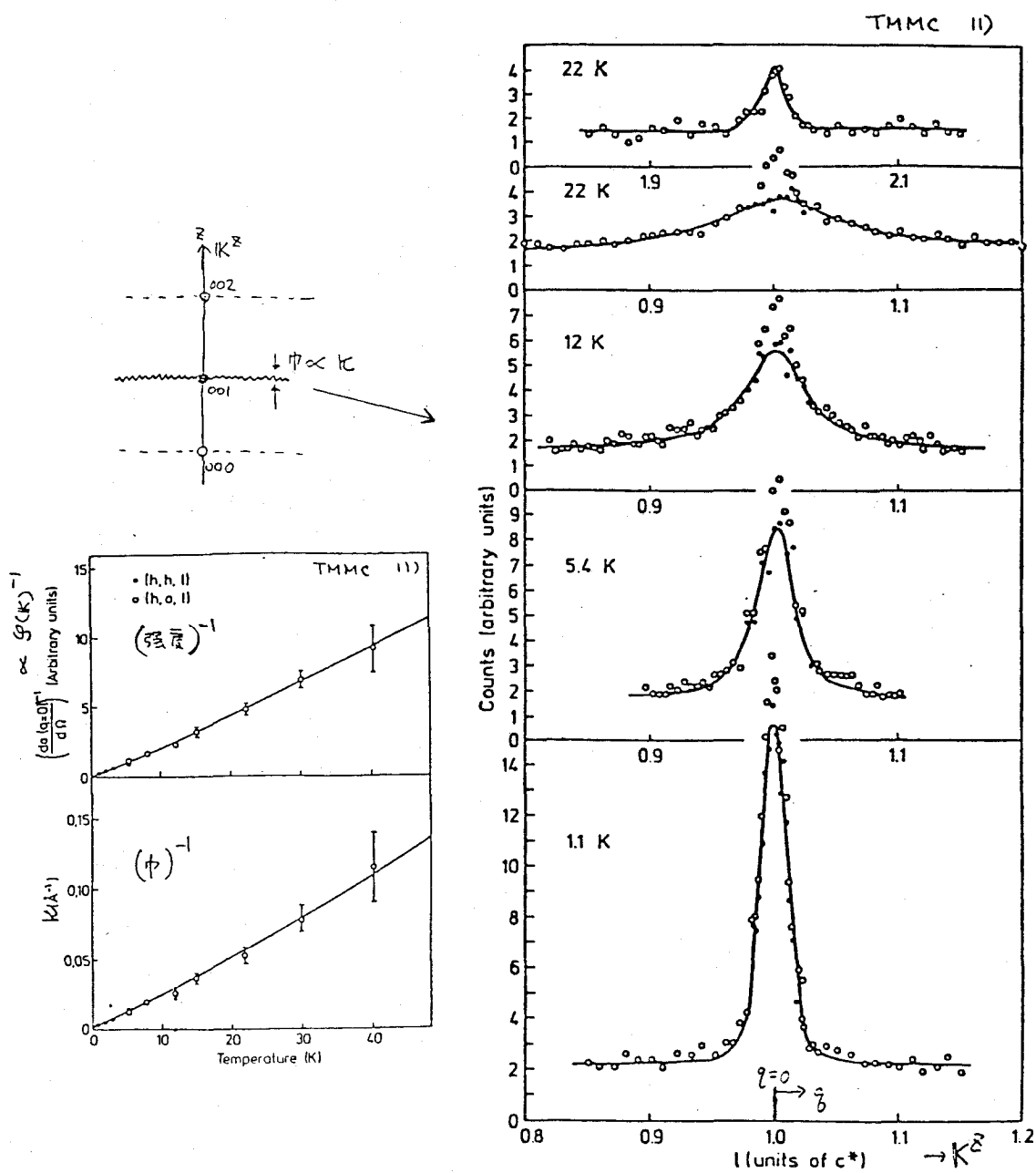
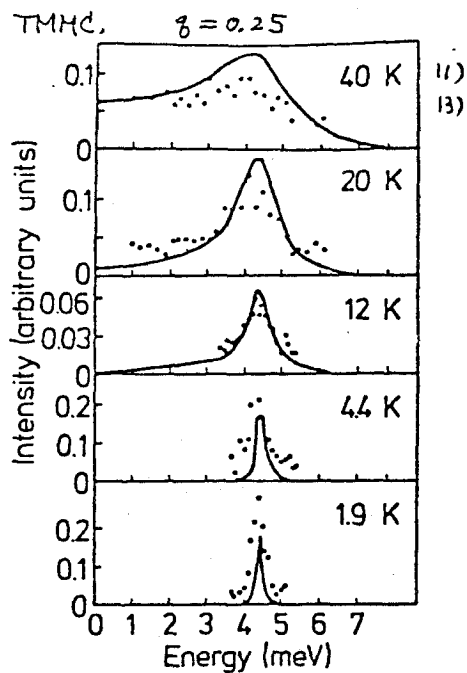
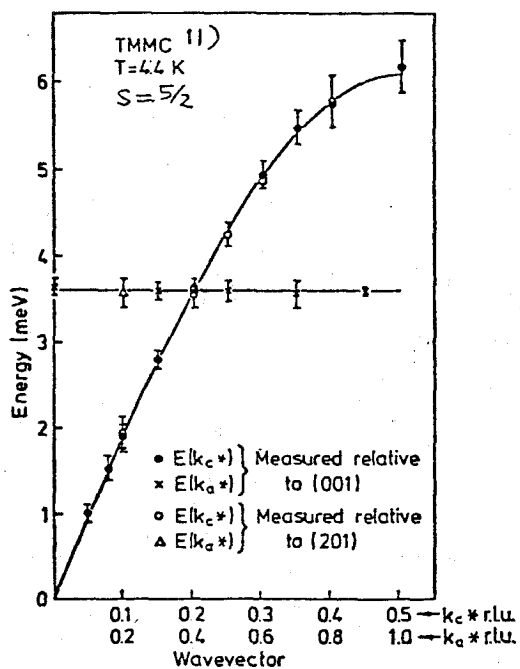


図 5. TMMC の中性子散乱 ($T_c = 0.8 \text{ K}$)¹¹⁾



(実線：富田・増山の理論値)

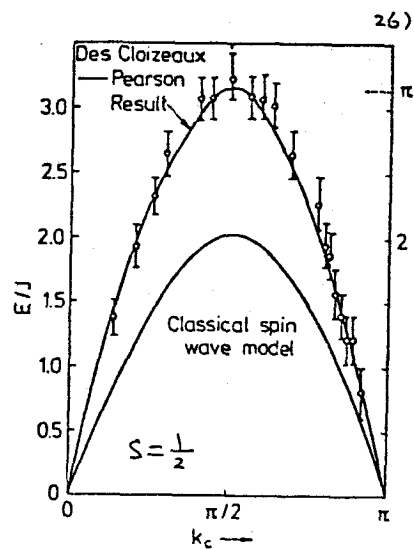
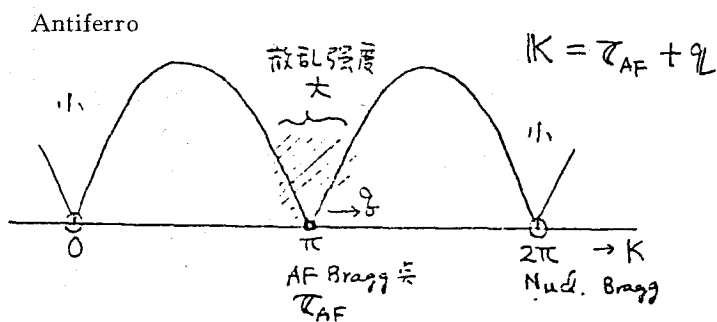
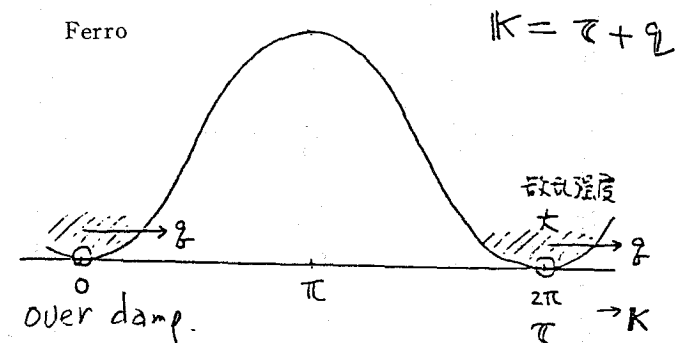


図 6. TMMCのスピンドYNAMICKS

$T = 0$ の時のスピン波の励起エネルギーは、

強磁性

反強磁性

$$\left. \begin{aligned} \hbar \omega_q &= 2JZS(1 - \cos q^z a) \\ \hbar \omega_q &= 2Z|JS \sin q^z a| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

で、 $T \neq 0$ では上述の様に有限サイズの中にスピン波が生じるので q に不確定性が生じ、この為 $\hbar \omega_q$ にも不確定性が出て、鋭いスペクトルがみられなくなる。このことより

$$\Delta \omega_q \sim \frac{d\omega_q}{dq} \kappa \sim \frac{2kT}{S} \cos q^z a,$$

で、 κ^{-1} より長い波長のスピン波はない。又温度の上昇につれ、小さい q の方からスピン波が見えなくなること (over damp) が図 6 からわかる。

$T = 0 \rightarrow \infty$ に向ってスペクトルがどう変わるかは、三次元系なら

S.W. 励起 $\rightarrow$ S.W. 間相互作用 (巾の増大, 振動数シフト) $\rightarrow T \rightarrow \infty$ のスペクトルへ
調和近似 ----- $\rightarrow$ 非調和近似

一次元なら、この様なスペクトルの発展の全貌が解析的に把握出来る¹⁴⁾

[例] 富田, 増山の取扱い¹³⁾ (古典スピンを想定)

時間依存相関々数 $G(K, t)$ を考える

$$G(K, t) = \frac{3}{S^2} \sum_R e^{iKR} \langle S_0^z(0) \cdot S_R^z(t) \rangle \quad \dots\dots\dots (8)$$

同時刻相関々数は

$$G_0(K) = \frac{3}{S^2} \sum_R e^{iKR} \langle S_0^z(0) S_R^z(0) \rangle \quad \dots\dots \chi(K) \text{ に関する。}$$

一般化された減衰定数を求めるのに $G(K, t)$ のラプラス変換された $\phi(K, \omega)$ を考える。

これは森, 川崎の理論¹⁵⁾ による取扱いに従って、

$$\phi(K, \omega) = \frac{1}{i\omega + \frac{a_1^2(K)}{i\omega + \frac{a_2^2(K)}{i\omega + \frac{a_3^2(K)}{i\omega + \dots\dots\dots}}}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

の様に連分数に展開され、スピン波の極シフト、減衰効果等を全部含んでいる。 a_1^2 次の様に $G(K, \omega)$ のモーメントで表わされる。

$$\begin{aligned} a_1^2(K) &= F^{(2)}(K), \\ a_2^2(K) &= F^{(4)}(K)/F^{(2)}(K) - F^{(2)}(K), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

これを適当なところでガウス近似で打切る。一方モーメントは

$$\begin{aligned} F^{(2n)}(K) &= \sum_R (-1)^n \left| \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} G(R, t) \right|_{t=0} e^{iKR} \\ &= \sum_R (-1)^n \frac{3}{S^2} \langle S_0^z S_R^{(2n)z} \rangle \Big|_{t=0} e^{iKR}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

但し

$$S_R^{(2n)z} \equiv \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} S_R^z$$

で、これは直接運動方程式を解いて求める。この様に展開係数を求める時 $G_0(K, t)$ 、即ち $t=0$ での $G(K, t)$ が厳密解として得られているのが強味である。

$$G(K, t) = G_0(K) - G_2(K) \frac{t^2}{2!} + G_4(K) \frac{t^4}{4!} + \dots\dots\dots$$

$\parallel$
 厳密解

$\parallel$
 $F^2(K)$

$\parallel$
 $F^4(K)$

彼らは展開を6次まで行い、図6のTMMCの実験と比較した。図6には、温度と共にスピン波的ピークの中の増大、殆んどシフトしない周波数等がよく出ているが、量子効果が無視出来ない $T \sim 0\text{K}$ 近くでは強度が合っていない。

[b] 量子系

理論的取扱いでは、Bonner と Fisher⁷⁾ は H と I 系に対し、 $n=2 \sim 11$ 迄の鎖での数値計算を、Carboni と Richards¹⁶⁾ は $n=10$ 迄の動的研究を行った。一次元 I 系では $n \rightarrow \infty$ について外場 H と Z 軸が平行の時の厳密解は Onsager 解で $J \asymp J' = 0$ の極限として求まる。しかし H 系では難かしいので、有限系の計算から $n \rightarrow \infty$ へ外挿し式(1)で $\xi = \eta = 0 \sim 1$ について求められている。図7がその例である。但し r は次のハミルトニアンにおける係数である。

$$\mathcal{K} = -2J \sum_{i=1}^n \{ S_i^z S_{i+1}^z + r (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) \} - g\beta \sum_{i=1}^n \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i. \quad \dots\dots\dots (12)$$

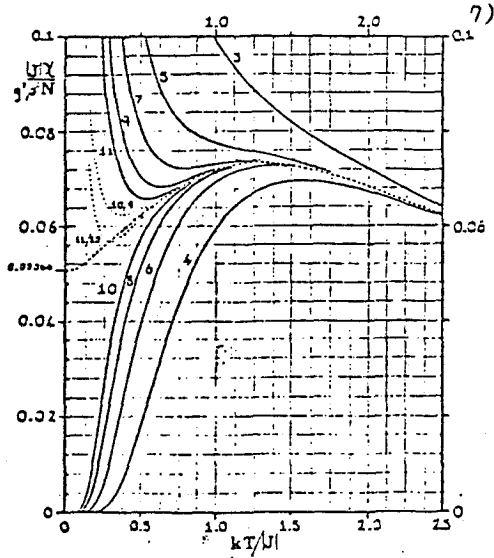


図 7-1

Antiferromagnetic susceptibility versus temperature for finite Heisenberg rings (solid curves) and the estimated limit for infinite rings (dashed curve)が見られる。

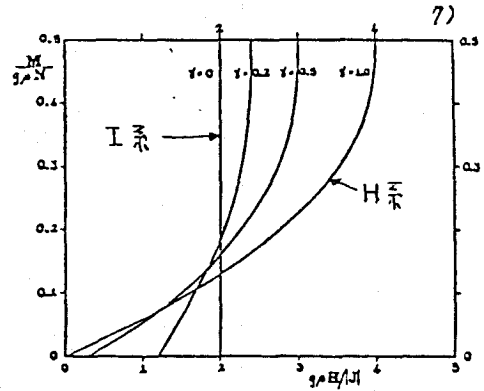


図 7-2

Dependence of zero-temperature magnetization curve on anisotropy.

1DH系では著しい量子効果スピンが ~ 50% も収縮する。¹⁷⁾

図 8 は一次元H系とされている物質の実験結果で、実線が理論計算で臨界点近傍で不一致が見られる。

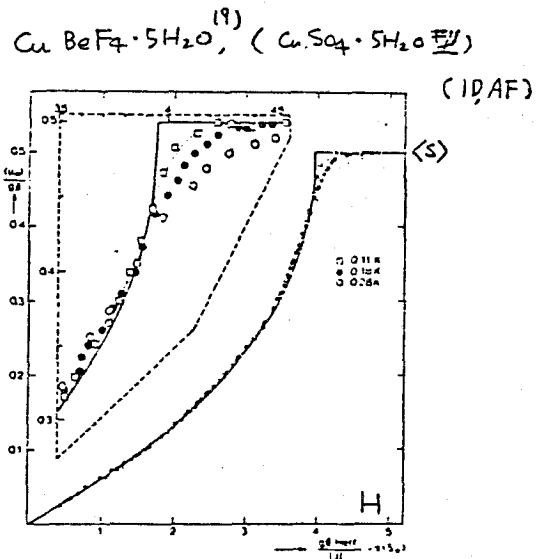
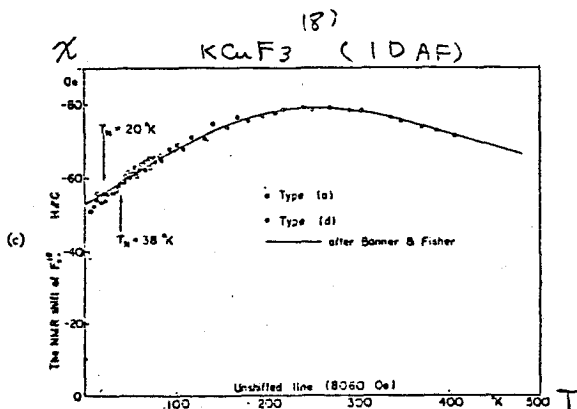


図 8.

要約

H系

$$\left. \begin{array}{l} \text{比} \\ \text{熱} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{F} \cdots \cdots \left\{ \begin{array}{l} C_{\max} / n k_B \simeq 0.134 \cdots \cdots \text{比熱のピーク値} \\ k_B T_{\max} / J \simeq 0.70 \cdots \cdots \text{ピークの起る温度} \end{array} \right\} \\ \text{AF} \cdots \left\{ \begin{array}{l} C_{\max} / n k_B \simeq 0.350 \\ k_B T_{\max} / J \simeq 0.962 \end{array} \right\} \end{array} \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{帯} \\ \text{磁} \\ \text{率} \\ (\chi) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{F} \cdots \cdots T = 0 \text{ に向って単調増大} \\ \text{AF} \cdots \left\{ \begin{array}{l} \chi_{\max} / (g^2 \beta^2 |J|) \simeq 0.07346 \\ k T_{\max} / |J| \simeq 1.282 \end{array} \right\} \end{array} \quad (14)$$

これらの測定から J が推定される。外場 H に対する応答

AF ($T = 0$)

$$\frac{M}{M_{\max}} = 1 - A [1 - (H/H_s)]^{1/2}, \quad (15)$$

ここで,

$$A \simeq \frac{4}{\pi} \simeq 1.2732,$$

$$H_s = 2 |J| / g \beta.$$

スピン波エネルギーの表現式を得る為に、上述の〔例〕とは別の小口²⁰⁾によって求められた古典的動的スピン系の近似解を与えておく。これらは I, H, XY の各系の強磁性に使える。但し使用に当っては注意がいる。詳しくは原論文を参照のこと。ξ, η は式(1)と同じ定義である。

強磁性

低次元性は最近接原子数 z のとり方で表現される。

$$\epsilon_k = 2zJS\sqrt{1 - (\xi + \eta)r_k + \xi\eta r_k^2} \quad (16)$$

ここで

$$r_k = \frac{1}{z} \sum_{\rho} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}$$

で、 ρ は最近接原子との距離。式(16)を I, XY, H 系の各系に適用すると、

$$\epsilon_k = \begin{cases} 2zJS & (\text{I系}) \\ 2zJS(1 - r_k)^{1/2} & (\text{XY系}) \\ 2zJS(1 - r_k) & (\text{H系}) \end{cases}, \quad (17)$$

と表わされ、その分散曲線が図9に示してある。

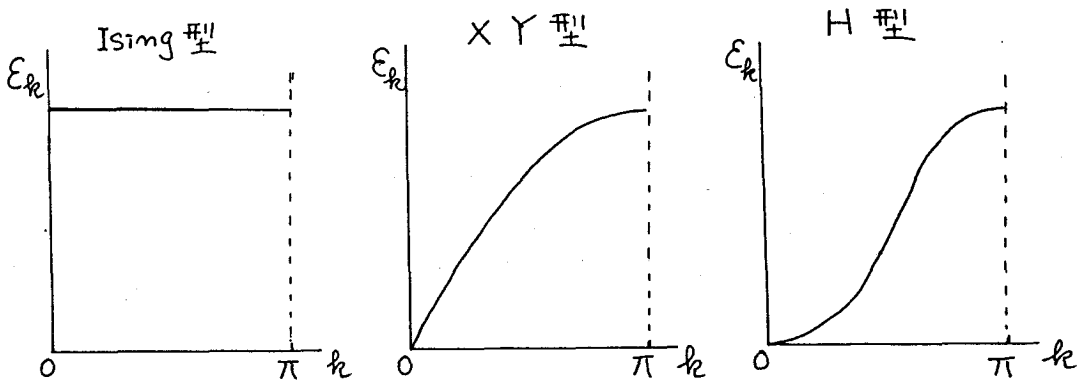


図 9.

反強磁性 (異なる取扱いによる)

—イオンの異方性がある場合の解^{21), 22)}で求められているが、ここでは次の様なハミルトニアンで表現される正方対称格子について式を与えておく。

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle im \rangle} (2J_c \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_m - D_c S_i^z S_m^z) - \sum_{\langle ij \rangle} (2J_a \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - D_a S_i^z S_j^z) \quad (18)$$

但し、 a, c の添字は図10に対応するもの。

容易面(XY)型, すなわち $0 < |D/J| < 1$,
 $D > 0$ の時

$$E_q^2 = S^2 [2z_a J_a (1 - r_a(q)) - 2z_c J_c (1 \mp r_c(q))] \times [2z_a J_a (1 - r_a(q)) - 2z_c J_c (1 \pm r_c(q)) + z_a D_a r_a(q) \pm z_c D_c r_c(q)] \quad (19)$$

となり、 $|J_c| \gg |J_a|$ の時一次元的になり、
 $|J_c| \ll |J_a|$ の時二次元的となる。XY系の

のとき、強磁性のとは違って2つのモードが出る。^{23), 24)} すなわち Out of plane vibration

mode (OPM) In-plane vibration mode (IPM)

ある。図11,及び図17・18を見よ。

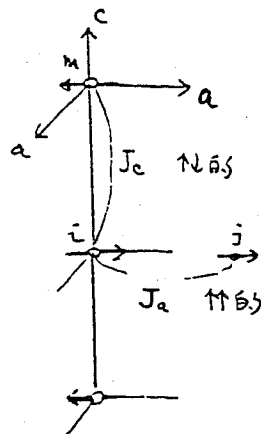


図 10.

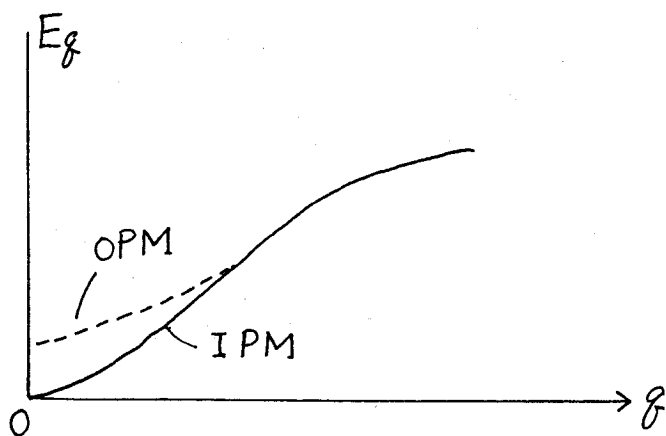


図 11.

量子系のスピンドायナミクス¹²⁾

量子系については、ごく限られた場合しか分っていない。興味の内容は $S = \frac{1}{2}$ で H 系の AF で、第一励起状態 (S.W.) の厳密解が得られている。

1931 年 Beth …… 基底状態の波動関数の導出に成功。²¹⁾ 0 K でも相関々数は r に逆比例して減衰し LRO が無い。

1938 年 L. Hulthen …… 基底エネルギーの導出²¹⁾

$$E = -N|J| \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \quad (20)$$

$$= -0.886 N|J| < -0.5 N|J| \text{ 。$$

(ネール状態でのエネルギー)

1962 年 J. de Cloizeaux and J. J. Pearson …… 第一励起状態の厳密解。²⁵⁾ 第一励起状態は $S_{tot} = 1$ の三重項状態。

$$\hbar\omega_q = \pi |J \sin qa|, \quad (21)$$

但し a は最近接間距離で、従来のスピン波の解は

$$\hbar\omega_q = 2 |J \sin qa| \text{ 。$$

量子系と古典系の注目すべき点

(a) $2 \rightarrow \pi$ の違い。図 12 を見よ。

(b) 古典論 …… ω_+ , ω_- の二重縮退レベル,

量子論 …… 三重縮退レベル

(c) 古典論 …… 0 K で LRO が出来るので格子の周期は $a \rightarrow 2a$ に移る。

量子論 …… 0 K でもそのまま。周期は a の筈で、分散曲線は形が変わって中間がくびれたものになっているとみなせる。図 12 を見よ。

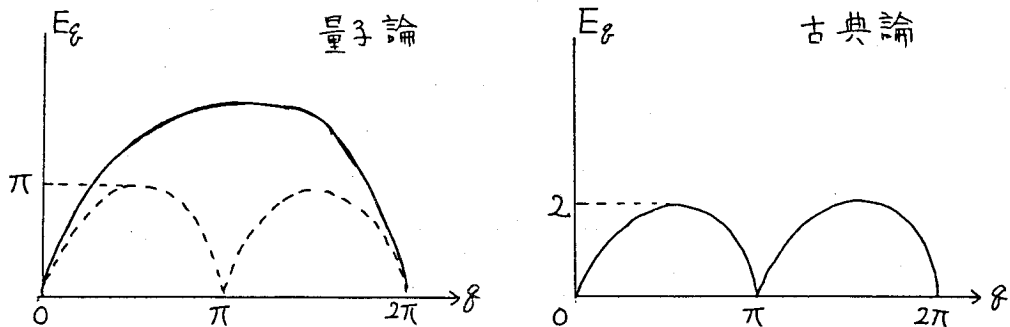


図 12.

(d) 動的構造因子 $S(k, \omega)$ における違い

古典論………スピン波の極が出る

量子系………バンドになるのかまだ厳密解が分っていないので分らない。但し実験は図 15 に示してある。

一方 $S = \frac{1}{2}$ で XY 系の厳密解⁴⁾ によれば, 最低の励起エネルギーは

$$\hbar\omega_q = 2 |J \sin qa| ,$$

で, 古典論と同じである。しかしこの系も $T=0$ で LRO はなく, $\langle S_0 S_r \rangle \propto r^{-\frac{1}{2}}$ で減少する。従って周期は $T=0$ で a で, この XY 系でのスピン波モードは IPM である。XY 系での最低モードが一番直感的な古典論のスピン波に似ている。H 系でのスピン波はもっと異質のもの, (OPM がからんで?) のように見える。

フェルミ液体論²⁷⁾ ($S = \frac{1}{2}$)

この近似はスピンハミルトニアンを effective Fermi-Operator で書けることを利用したもので, これを H 系に用いる。近似法であるが, Bonner と Fisher がやった様な数値計算による C, χ 等の値が比較的簡単に求められ, 物理的像がつかみ易い。ここでは山田²⁸⁾ の理論をのべる。

de Cloizeaux and Pearson の方式に則り, この形のスピン波が 2 ケ以上励起される時のスペクトルを調べた。それによると励起エネルギーは ($2J=1$ とおいて) 図 13 のような連続スペクトルになる。この曲線の下は

$$\epsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin |g| , \quad (\text{deC.p.})$$

で, 上の線は,

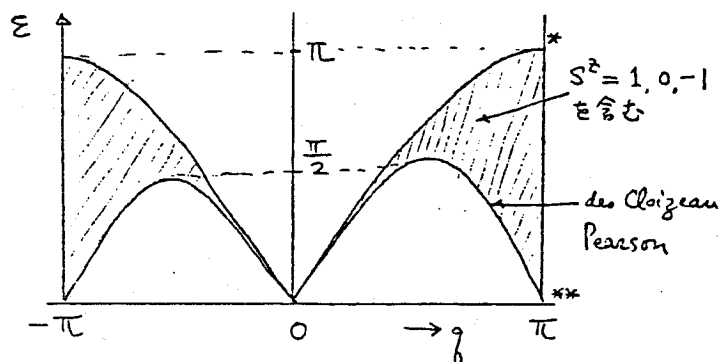


図 13.

$$\varepsilon = \pi \sin \frac{|g|}{2} ,$$

となる。このスペクトルは三重縮退で $S^z = -1, 0, 1$ を含む。このバンドスペクトルは次の様な解釈で出てくる。ハミルトニアンを

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} - \frac{1}{4} \right) ,$$

とにおいて、フェルミ演算子 c_i におきかえる。

$$\begin{aligned} S_i^+ &= c_i^+ \exp \left[i\pi \sum_{j<i} c_j^+ c_j \right] , \\ S_i^- &= c_i \exp \left[-i\pi \sum_{j<i} c_j^+ c_j \right] , \\ S_i^z &= c_i^+ c_i - \frac{1}{2} , \end{aligned} \quad (23)$$

但し

$$c_i^+ c_j + c_j c_i^+ = \delta_{ij} .$$

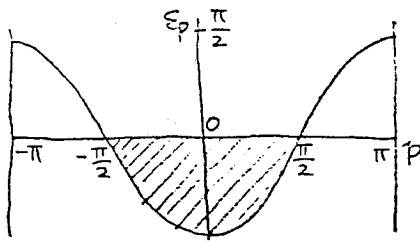
これを用いると、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= - \sum_q (1 + \cos q) c_q^+ c_q - \frac{1}{4n} \sum_{q_1} \sum_{q_2} \sum_{q_3} \sum_{q_4} \overbrace{A(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)}^{\text{momentum conserv.}} \\ &\quad \times (e^{iq_1} - e^{iq_2}) (e^{-iq_3} - e^{-iq_4}) c_{q_1}^+ c_{q_2}^+ c_{q_3} c_{q_4} , \end{aligned} \quad (24)$$

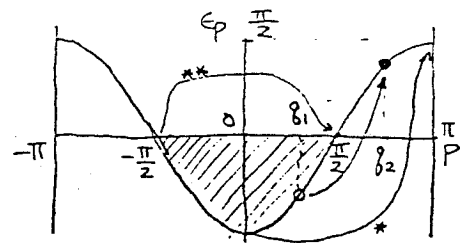
となる。これは強く相互作用しているフェルミ粒子系なので、ランダウの考えに従って、

$$\varepsilon(p) = \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos p ,$$

というエネルギーをもつフルミ準粒子系の立場に直す（波の性質をもつ電子の波とするように²⁹⁾）これは弱く相互作用する自由粒子になる。従って真空状態は $n/2$ 個の準粒子で占められた状態で $S_{\text{tot}}^z = 0$ で、1 個の準粒子励起は $\Delta S_{\text{tot}} = 1$ に当り、これがスピン波励起で、この励起スペクトルのあり方を調べるとバンド的振舞になる。図 14 を見よ。図 15 は一次元軸に垂直方向にそった色々の点での Q をとめた時の実験値で実線は実験値に合うように描いたもので、バンド状励起スペクトルを思わせる。上方に tail をもつスピン波ピークが見られる。tail には $S^z = 0$ の励起が効いているのかどうか今のところ分っていない。



Ground state (Singlet)



various possible excitation

図 14. *, **印が図 13 の *, **印に当る

運動量保存: $q = q_2 - q_1 + 2\pi n$

エネルギー保存: $\varepsilon_q = \varepsilon_{q_2} - \varepsilon_{q_1}$

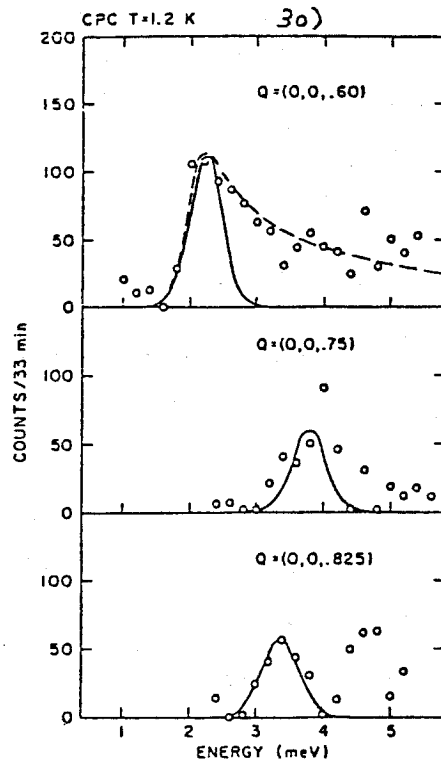
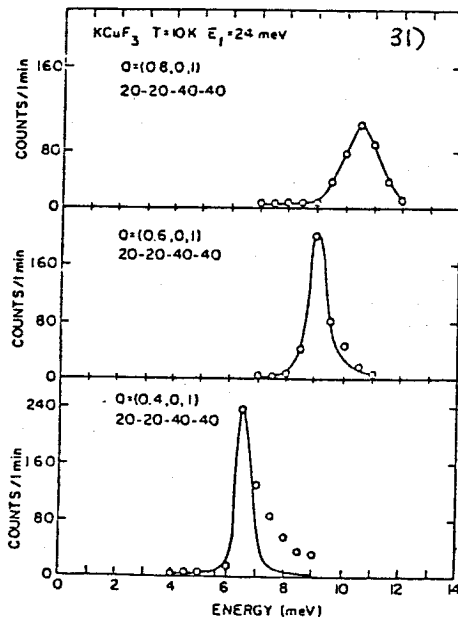
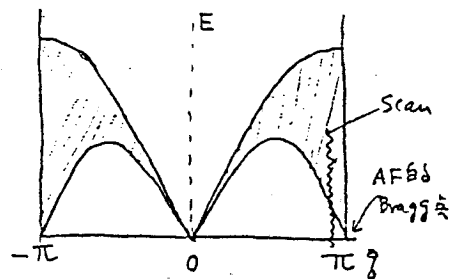


図 15.

§ 5. 一次元 Ising 系¹⁴⁾

ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -2J \sum_n \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z, \quad (25)$$

$$\sigma_n^z = \pm \frac{1}{2},$$

で与えられる。 x, y 成分の自由度は持たせておき、相互作用が z 成分間についてのみ存在するとする。最も簡単な系の 1 つで、厳密解が得られている。

(a) 静的相関々数

$$G_m = \langle \sigma_n^z \sigma_{n+m}^z \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{J}{|J|} \right)^m \exp(-\kappa |m|), \quad (26)$$

ここで

$$\kappa = (\xi_0^{-1}) = -\ln \{ \tanh(|J| / 2k_B T) \}$$

$$\div 2 \exp(-|J| / k_B T), \quad T \rightarrow 0,$$

従って、 $T=0$ で $\kappa=0$ となり LRO が出現する。(H系, XY系と違うところ)。

式(26)の空間についてのフーリエ変換をすると

$$\langle \sigma_{-k}^z \sigma_k^z \rangle = \frac{1}{4} \frac{1 - e^{-2\kappa}}{1 - 2 \left(\frac{J}{|J|} \right) e^{-\kappa} \cos K + e^{-2\kappa}}, \quad (27)$$

但し,

$$K = \tau + q, \quad \text{F に対して}$$

$$K = \tau_{AF} + q, \quad \text{AF に対して}$$

となり、 $q \rightarrow 0, T \rightarrow 0$ の時ローレンツ型に近似される。

$$\langle \sigma_{-q}^z \sigma_q^z \rangle \simeq \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\kappa^2 + q^2}, \quad (28)$$

(Ornstein Zernike 型)

1 原子当りの磁化率は

$$\chi^z = \frac{g^2 M_B^2}{k_B T N} \sum_{\langle mn \rangle} \langle \sigma_n^z \sigma_{n+m}^z \rangle,$$

となり、強磁性体では⁷⁾

$$\chi_{||}^z(T) = \frac{g^2 \beta^2 N}{4 k_B T} e^{J/k_B T},$$

で、反強磁性体では

$$\left. \begin{aligned} \chi_{||}(T) &= \frac{g^2 \beta^2 N}{4 k_B T} e^{-|J|/k_B T} \left\{ \frac{1 - (-\tanh \tilde{K})^N}{1 + (-\tanh \tilde{K})^N} \right\}, \\ \chi_{\perp}(T) &= \frac{g^2 \beta^2 N}{4 |J|} [\tanh \tilde{K} + \tilde{K} \operatorname{sech}^2 \tilde{K}]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

但し

$$\tilde{K} = |J|/2 k_B T,$$

と表わされる。

(b) 動的相関々数

ハミルトニアンに非対角項がないのでスピン系だけに閉じると動的振舞はない。熱浴と接する場合、あるのは exchange field の中でのマルコフ過程による緩和のみ、但し少しでも非対角項 (J_{xx} , J_{yy}) が入ると低温に於いてはこの影響が優越する。(後述)

(a) と同じ量を明記する。

$$\chi(k, \omega) = \frac{N}{4 k_B T} \frac{1}{\cosh(2J/k_B T)} \times \frac{1}{(1 - \tanh(2J/k_B T) \cos k + i\omega\tau)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \chi(k, 0) &= \frac{g\mu_B}{k_B T} \langle \sigma_{-k} \sigma_k \rangle \\ &= \frac{1}{4 k_B T} \frac{N}{\cosh(2J/k_B T) - \cos k \sinh(2J/k_B T)}, \end{aligned} \quad (32)$$

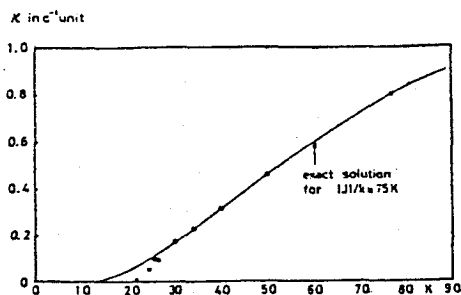
$$\langle \sigma_{-k}(0) \sigma_k(t) \rangle = \langle \sigma_{-k} \sigma_k \rangle e^{-\Gamma_k |t|}, \quad (33)$$

但し

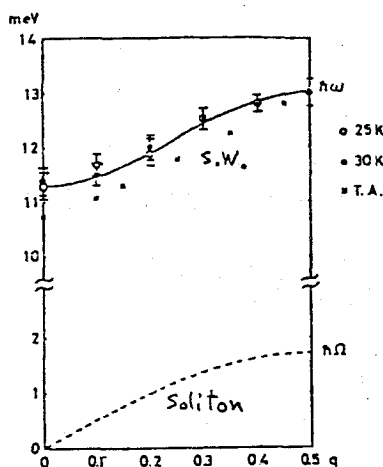
$$\Gamma_k = \frac{1 - \cos k \tanh(2J/k_B T)}{\tau},$$

で、 τ は最近接スピンの配位による温度に依存する常数。

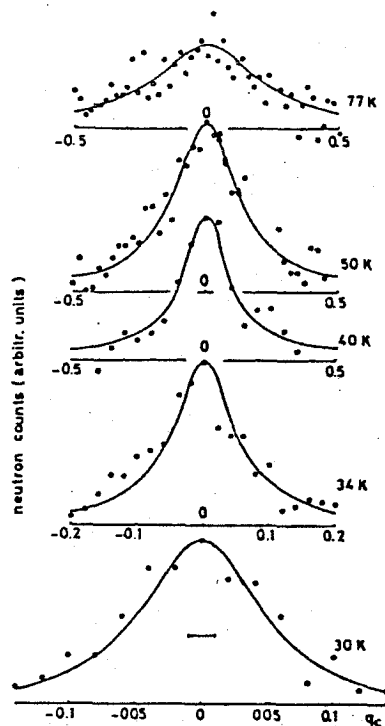
実験例としては一次元 I 系の反強磁性の物質 $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (or D_2O)³⁴⁾ 一次元 I 系の反強磁性の物質 CsCOCl_3 ³⁵⁾ がある。図 16 は CsCOCl_3 の実験値で、実線は厳密解によるもの。スピン波の分散曲線には I 系としての特徴 (9 図) が出ている。但し少し分散があるのは非対角項



(a) The rigorous solution for the temperature dependence of K . The filled circles are the values by which the curves in (b) were calculated.



(c)



(b) The observed neutron scattering intensities for the q_c scan at different temperatures. The curves are the rigorous solutions for the corresponding temperatures. The resolution corrections are negligibly small as indicated by the width in the lowest figure.

図 16. CsCoCl_3 の中性子散乱³⁵⁾

による。

§ 6. 一次元 XY 系

一次元 I 系はスピン演算子がハミルトニアンと交換可能という意味で古典的，その意味では XY 系は量子系と言える。但し $S \rightarrow \infty$ では古典的でこの場合 plane rotator model という。

(a) 古典的 XY 系 (planar anisotropy system)

一般的取扱いとして，低温での調和近似^{36), 37)}を下記のハミルトニアンに適用する。

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle mn \rangle} 2J_{mn} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m + A \sum_n S_n^z, \quad (34)$$

ここで、 A は—イオンの異方性の常数で $A > 0$ では容易面 (XY) 型となる。

$T = 0$ でも LRO がないので、通常のスピン演算子を用いると不便なので図 17 の様にスピン空間の角度 φ_n を導入する。

$$\begin{aligned} S_n^+ &= e^{i\varphi_n} \sqrt{\left(S + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(S_n^z + \frac{1}{2}\right)^2}, \\ S_n^- &= \sqrt{\left(S + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(S_n^z + \frac{1}{2}\right)^2} e^{-i\varphi_n}. \end{aligned} \quad (35)$$

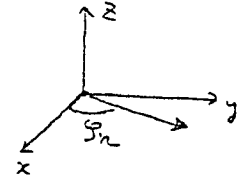


図 17.

$T \rightarrow 0$ でスピンは殆んど xy 面内 ($S_n^z \ll S$)。文献 37) では強磁性・反強磁性系を共に扱っている。ここでは簡単のため強磁性系の場合にかぎると、ハミルトニアンは次の様に対角化される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2S^2 \sum_k [J(0) - J(k)] \varphi_k^* \varphi_k \\ &+ 2 \sum_k \left[\frac{A}{2} + J(0) - J(k) \right] S_{-k}^z S_k^z + C. \end{aligned} \quad (36)$$

これよりスピンの面内成分の角度 φ の相関 (S_x, S_y 成分の相関, すなわち IPC) は

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{-k}^+(0) \varphi_k(t) \rangle &= \frac{1}{S} \sqrt{\frac{A/2 + J(0) - J(k)}{J(0) - J(k)}} \left(\frac{1}{2} e^{i\omega_k t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \omega_k t}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1} \right), \quad \beta \equiv 1/k_B T \end{aligned} \quad (37)$$

となり、面に垂直な成分の相関 (図 18) は

$$\begin{aligned} \langle S_{-k}^z(0) S_k^z(t) \rangle &= S \sqrt{\frac{J(0) - J(k)}{\frac{A}{2} + J(0) - J(k)}} \\ &\times \left(\frac{1}{2} e^{i\omega_k t} + \frac{\cos \omega_k t}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

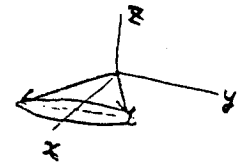


図 18.

但し

$$\hbar \omega_k = 4S \sqrt{(J(0) - J(k)) \left(\frac{A}{2} + J(0) - J(k) \right)}. \quad (39)$$

今のような場合は $\langle \varphi_{-k}^*(0) \varphi_k(t) \rangle \gg \langle S_{-k}^z(0) S_k^z(t) \rangle$ である。

低温 $T \rightarrow 0$ で

$$\langle S_n S_{n+m} \rangle = \left(\frac{J}{|J|} \right)^m S^2 e^{-\kappa|m|}, \quad (40)$$

低次元磁性体のスピン相関—中性子散乱実験を中心として—
 の如く書けるが、XY 系では $\kappa = k_B T / 4 J S^2$ で H 系では $\kappa = k_B T / 2 J S^2$ となっている。式
 (40) のフーリエ変換を行うと

$$\langle S_{-k} S_k \rangle = S^2 \frac{1 - e^{-2\kappa}}{1 - 2 \left(\frac{J}{|J|} \right) e^{-\kappa} \cos \kappa + e^{-2\kappa}} \quad (41)$$

となる。

大局的には、 $\langle S^x S^x \rangle$ の如き面内の相関々数は H 系の場合とほぼにている。しかし $\langle S^z S^z \rangle$ は $T < A/k_B$ の如き低温ではゆらぎが A のためおさえられるために小さい値をとる。SRO が発達するということは Screw-like な配位を作り出す。

$T = 0$ での性質

純粋な XY 系では、式 (34) とは書けない、 $A \sum_n S_n^2$ の代りに $\sum_{nm} A_{nm} S_n^2$ で定義して $2J_{01} = A_{01}$ の場合純粋な XY 系となる。この時

$$\hbar \omega_k = 4S \sqrt{J(0)(J(0) - J(k))} = 8\sqrt{2} S |J \sin \frac{ka}{2}| ,$$

となり、強磁性であり乍ら反強磁性的分散曲線となっている。

$t = 0$ での相関々数の厳密解としては

$$\langle S_n S_{n+m} \rangle = m^{-\frac{1}{\pi S \sqrt{2}}} , \quad (44)$$

for in-plane correlation (Transverse correl.)

$$\langle S_n^z S_{n+m}^z \rangle = -\frac{\sqrt{2} S}{4 m^2 - 1} , \quad (45)$$

for out-of-plane correlation (longitudinal correl.)

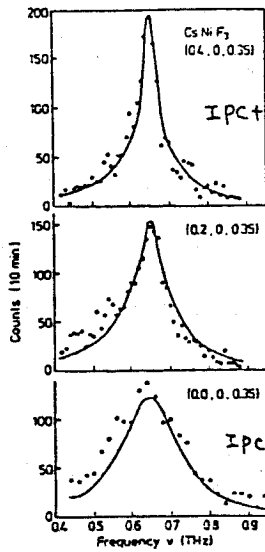
となる。散乱関数 $\varphi(q, \omega)$ に関する詳細は Villain³⁷⁾ 参照して欲しい。

実験例

一次元 XY 系の物質 CsNiF₃ は $S = 1$ で強磁性体で式 (34) のハミルトニアンがあてはまる。
 (planar) 但し、 $J/k_B = 118$ K, $A/k_B = 9$ K としたものである。図 19 が実験値である。外場 H を容易面に平行にかける時

$$E_{q=0} = A \left(1 + \frac{A}{zJ} \right) g \mu H + \left\{ 1 - \left(\frac{A}{8J} \right)^2 \right\} (g \mu H)^2 , \quad (46)$$

であるので実験と一致する。



(a) q_a -dependence of the OPC-component in CsNiF_3 at 4.9 K. Solid-lines are fits of Villain's theory to the experiment.

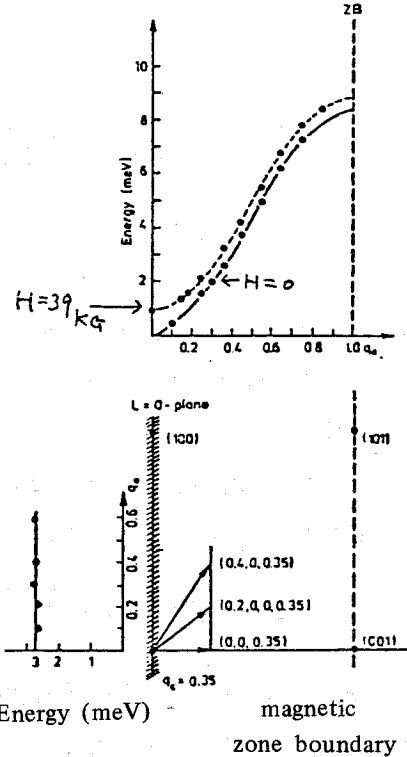


図 19. CsNiF_3

(b) 量子系

厳密解があり、温度が零でも LRO がない。ハミルトニアンは、一般的には

$$\mathcal{H} = \sum_n J \left[(1+r) S_n^x S_{n+1}^x + (1-r) S_n^y S_{n+1}^y \right] - g\mu H \sum_n S_n^z,$$

と表わされるが、 $r=0$ の時、 $T=0$ で、

$$\langle S_n S_{n+m} \rangle \sim m^{1/2}, \quad \text{for in-plane correlation} \quad (47)$$

$$\langle S_n^z S_{n+m}^z \rangle = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{m^2}, \quad \text{for out-of-plane correlation} \quad (48)$$

と表わされる。

尚 $r \neq 0$ ($J_z = 0$) の時も広義の XY 系と呼び、この時は $T=0$ で LRO がある。外場 H が z 軸と平行の時 H_c で相転移がある。又一次元で S に $\frac{1}{2}$ の XY 系 ($T=0, H \neq 0$) が二次元 I 系 ($T \neq 0, H=0$) と等価であり、後者についての厳密解がある。³⁹⁾

縦 (z 成分) の動的スピン相関関数、 χ^{zz} の計算結果を図 21, 22, 23 にて示す。但し $r=0$ の場合である。尚横 (x, y 成分) の動的相関々数はむずかしい。図より $\chi^{zz}(q)$ は J の正負の如

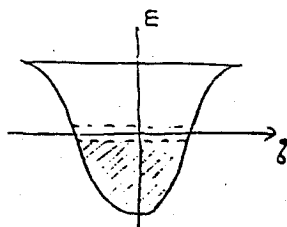


図 20.

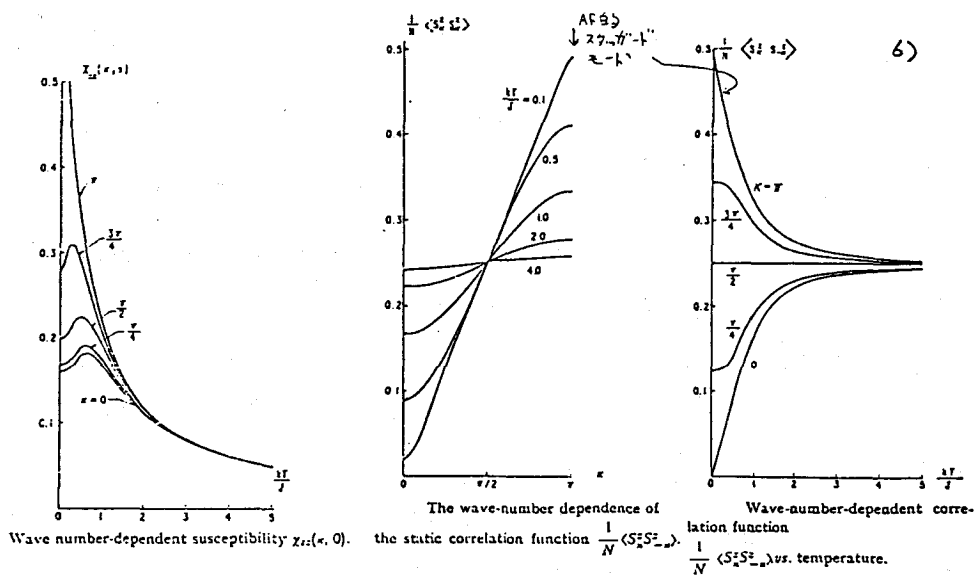


図 21.

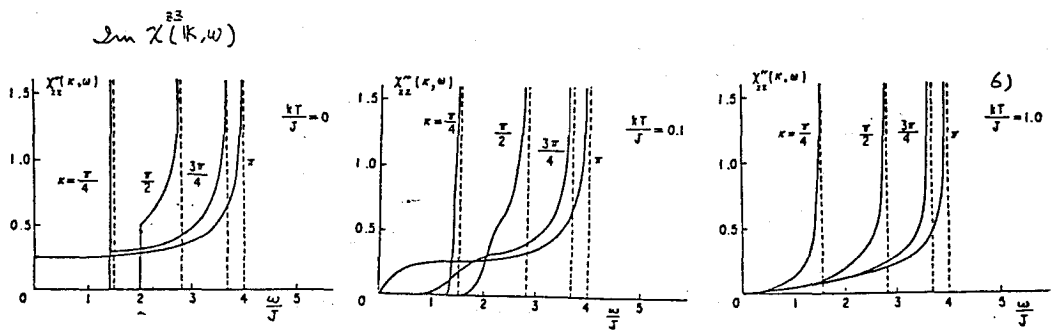


図 22.

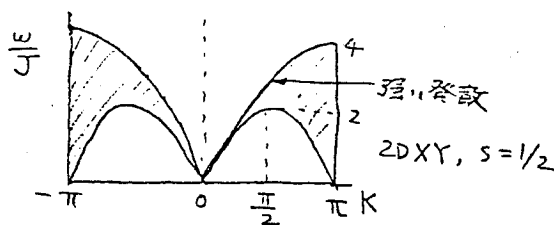


図 23.

何に不拘反強磁性的振舞。

この他の例として, Pincus distortion がある。これは一次元 XY 系で下記の様なハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_n J [(1+r) S_n^x S_{n+1}^x + (1-r) S_n^y S_{n+1}^y] \quad (49)$$

で, $r=0 \rightarrow r \neq 0$ へ移ることにより図 20 の様に, Symmetry breaking distortion を起してエネルギーを下げようとするもので, J ぐらいの力だから弱い。

dimerization (Peierls transition) を起してエネルギーを下げるのもこの種の効果である。³⁸⁾ この実験例は図 25 に示してある。TTF CuS₄C₄(CF₃)₄ は 12 K で二次の相変化を起し, 一重項の基底状態に行く。

実験において, $S = \frac{1}{2}$, XY 系の例はほとんど例がない。Cs₂ Co Cl₄ はその数少ない例の 1 つと言われている。⁴⁰⁾ 図 24 に比熱の測定を示す。

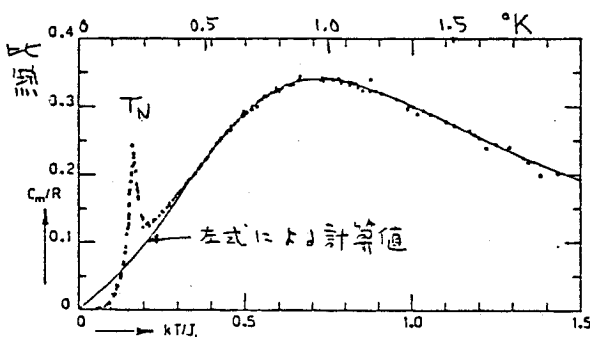


図 24. The magnetic specific heat of Cs₂ Co Cl₄ plotted on a linear scale.

The solid curve is the prediction for $J_{\parallel}/J_{\perp} = 1/4$, $J_{\perp}/k = -1.35$ K.

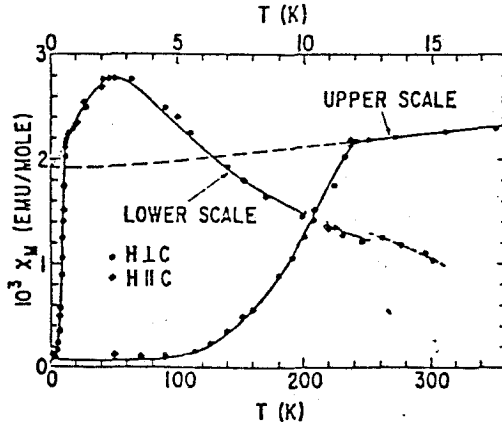


図 25. Magnetic susceptibility of $\text{TTFCuS}_4\text{C}_4(\text{CF}_3)_4$ along two directions. Solid lines are calculated from a spin-Peierls theory, which contains AF chains with uniform exchange above 12 K and temperature-dependent alternating exchange below.

$$J_{\perp} = -1.35 \text{ K.} \quad \text{反強磁性}$$

$$J_{\perp}/J_{\parallel} \simeq 4, \quad (\text{図 24 から推定})$$

$$T_N = 0.222 \text{ K}$$

又

$$\frac{C}{R} = 16 K^2 \int_0^{\pi} d\omega \cos^2 \omega / \pi \cosh^2 (4 \tilde{K} \cos \omega) .$$

但し

$$\tilde{K} \equiv J / k_B T,$$

である。しかし他の物理量の測定は殆んど行なわれていない。

又、一次元 XY 系を次のハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_i (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \rho S_i^z S_{i+1}^z),$$

で書いたとき、任意の ρ についての基底状態とスピン波状態が文献 40') に与えられている。

§ 7. 二次元 Ising 系

厳密解は Onsager (1944), Young (1952)¹⁾。

又見易い形で表現されたものでは小口²⁾

Fisher²⁾を見よ。図 26 で表わされる系で、

$J' = J$ は正方格子、 $J' = 0$ は一次元格子

となる。他の格子については庄司⁴¹⁾を見よ。

臨界温度 T_c は次式から求まる。

$$\sinh\left(\frac{J}{k_B T_c}\right) \sinh\left(\frac{J'}{k_B T_c}\right) = 1. \quad (50)$$

$J = J'$ の時、 $T_c = 1.135 J / k_B$ となる。

磁化率の温度依存性は

$$\frac{M_S(T)}{M_S(0)} = \left(1 - \sinh^4 \frac{2J}{k_B T}\right)^{1/8} \propto [(T_N - T)/T_N]^\beta \quad (51)$$

但し、 $\beta = 0.125$ となり古典的分子場近似での $\beta = 0.5$ とは違っている。

帯磁率は

$$\chi(q) = \frac{A(T)}{(q_a^2 + q_b^2 + \kappa^2)^{1-\eta/2}}, \quad (52)$$

で、スピン相関々数を表わすと

$$\langle S_0 S_r \rangle \propto \frac{e^{-\kappa r}}{r^\eta}, \quad \text{for } r \rightarrow \infty,$$

となる。こゝで $\eta = 1/4$ 。尚

$$\kappa a = \ln \coth \left(\frac{J}{2 k_B T} \right) - \left(\frac{J}{k_B T} \right), \quad (53)$$

但し $T \geq T_N$ ²⁾ である (Fisher の本の $J_x = J_y \rightarrow \frac{J_H}{2}$ に相当する)。他の臨界指数は

$$\left. \begin{aligned} \kappa &\sim \varepsilon^\nu, \quad \nu = 1, \\ \chi &\sim \varepsilon^{-r}, \quad r = 1 \frac{3}{4}, \quad (T_c \text{ 上下で対称的}) \\ C_H &\sim \varepsilon^{-\alpha}, \quad \alpha = 0, \\ H &\sim M^\delta(T_c), \quad \delta = 15, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

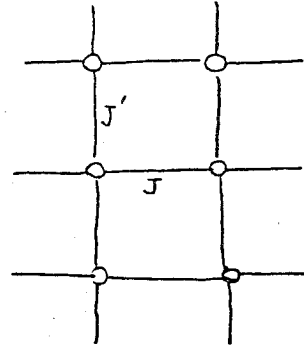


図 26.

となる。但し $\varepsilon = |T - T_c|/T_c$ である。

動的性質は確率的過程 (Kinetic Ising model) のみ存在している。緩和時間 τ は

$$\tau \propto (T - T_c)^{-d}$$

と表わされる。 $d = 2 \pm 0.05$ で、非対角項が入ると緩和過程が大きく変わる可能性がある。

実験

K_2CoF_4 での $M_S(T)$, $\kappa(T)$, η 等は厳密解とよく一致することが池田, 平川⁴³⁾の実験 (図 27) で分った。この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -2J_{\parallel} \sum_{\langle ij \rangle} S_i^z S_j^z + 2J_{\perp} \sum_{\langle ij \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y),$$

と表わされ, $J_{\parallel} \sim 2J_{\perp}$ で $J_{\perp}$ が可成りあるが, universality のため純粋な I 系に近い振舞が出る。従って T_N は殆んど $J_{\parallel}$ で決まる。実験値より, $T_N = 107.85$ K なので $J_{\parallel} = 95$ K となり, 他の臨界指数は

$$\beta = 0.123 \pm 0.008, \quad (0.125)$$

$$\nu = 0.97 \pm 0.05, \quad (1.00)$$

$$r = 1.71 \pm 0.04, \quad (1.75)$$

$$\eta = 0.2 \pm 0.1, \quad (0.25)$$

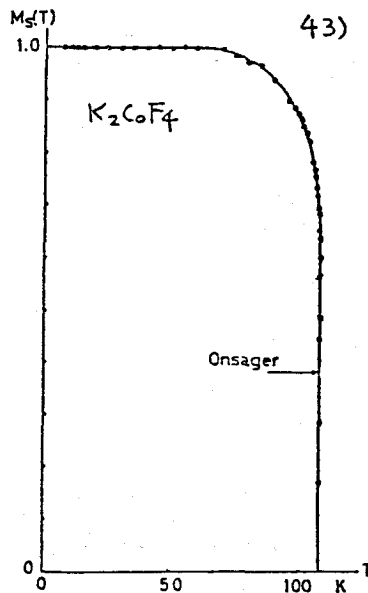


図 27.

と求められている。但し()内は厳密解である。

Rb_2CoF_4 は図28にある。一方 Diluted system の $\text{Rb}_2\text{Co}_{0.575}\text{Mg}_{0.425}\text{F}_4$ の物質で池田等^{45), 46)}が行った実験がある。この物質は $J_{\parallel} = 7.2 \text{ meV}$, $T_N \sim 0$ であって, T_N 以上では SRO が出来, Co のイジング的性質より, Co の濃度に比例した分散のない励起エネルギーが図29の様に得られる。図29の4つのピークは, Co の最近接にある磁性原子数のちがいによるもので

$$E_{\text{exch}} = (0, 1, 2, 3, 4) \times 7.2 \text{ meV},$$

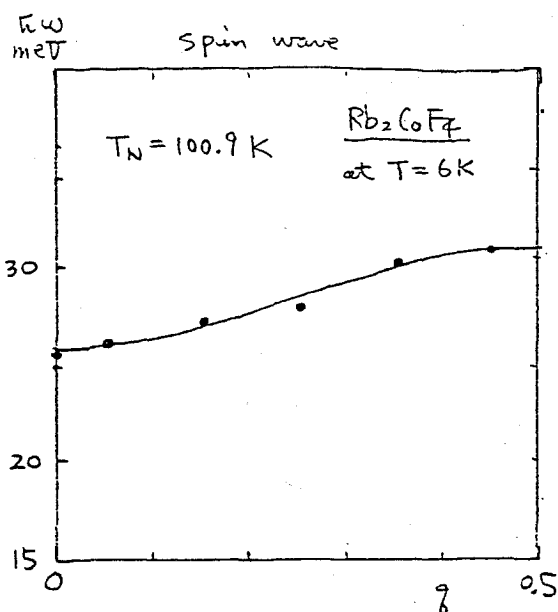


図28. Rb_2CoF_4 , $T_N = 100.9 \text{ K}$.
これより estimate した
 $J_{\parallel} = 88.9 \text{ K}$ 。Spin wave
spectrum からは $J_{\parallel} =$
 89.6 K と一致はよい。
 $J_{\perp} = 49.5 \text{ K}$ 。

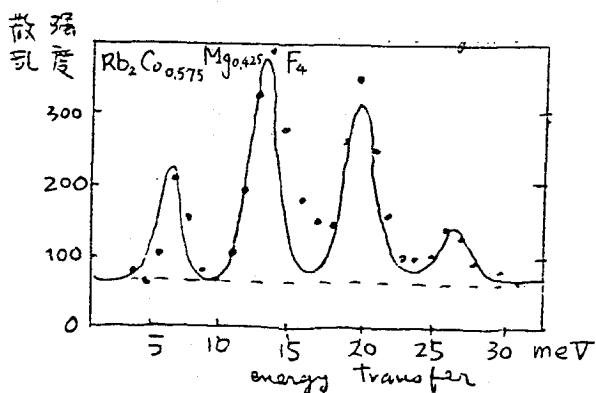


図 29.

となり、強度比は Co の濃度を c とすると、 $4c(1-c)^2$, $6c^2(1-c)^2$, $4c^3(1-c)$, c^4 に比例する。

§ 8. 二次元ハイゼンベルグ系

厳密解があって LRO がない⁴⁷⁾しかし高温展開による外挿では臨界温度 T_{SK} があるらしいことが Stanley と Kaplan⁴⁸⁾ によって見い出されたが、二次元 H 系で $S = \frac{1}{2}$ ⁴⁹⁾ の場合は T_{SK} はないと推論されている。一方 XY 系なら $S = \frac{1}{2}$ でも臨界温度はありそうであるが、まだよく分っていない。式(1)の J' があつたり Ising 性が入ると T_c が出る^{20), 21)}

二次元 H 系から三次元 H 系 (正方格子から立方格子) へ拡張してグリーン関数を用い Random phase 近似を用い、式(1)で $J'/J \equiv \varepsilon$ とすると臨界温度 T_c は

$$\frac{J}{k_B T_c} = \frac{1}{n} \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} \frac{1}{(1 - \cos k_x) + (1 - \cos k_y) + \varepsilon (1 - \cos k_z)}, \quad (55)$$

で表わされる。同様に二次元 H 系から二次元 I 系への変形は、Ising を Δ で表わすとハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -2J \sum_{2D} \{ S_i^z S_j^z + (1 - \Delta) (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \}, \quad (56)$$

とおける。この時臨界温度 T_c は

$$\frac{J}{k_B T_c} = \frac{1}{n} \sum_{k_x} \sum_{k_y} \frac{1}{[1 - (1 - \Delta) \cos k_x] + [1 - (1 - \Delta) \cos k_y]}. \quad (57)$$

となる。又一次元 H 系から三次元 H 系となったときの T_c の評価 (K -space での積分を含む) は文献 52 に出ている。

二次元 H 系のスピン対相関

純粋な二次元 H 系はむずかしく、スピン対相関を計算した例は少い。この系に近い物質は沢山あるが式(1)での ε , ξ 等 ((56) や (57) では ε や Δ) に対し T_c や相関が敏感に変化するの、着目する q 空間、磁場、温度等はよく吟味しておかないと本当の二次元 H 系の相関がつかめない (Cross over に注意)。近年はむしろ XY 性の入った planar model が注目をあびている (後述)。中性子散乱を意識した理論は Villain³⁷⁾ が詳しい。実験では K_2NiF_4 , K_2MnF_4 (いづれも少し Ising 性を含む) 等がある^{53), 54), 55)} この実験の臨界指数の修正は文献 55 に述べられており universality を支持している。

§ 9 二次元 XY 系

相互作用の z 成分はないが、スピンの z 成分はあってもよい。従って xy 面内、 z 方向の二つの相関が考えられる。

研究の歴史的発展

i) LRO のないことの厳密な証明。

Mermin, Wagner 1966⁴⁷⁾

ii) 高温展開による有限温度での相転移の可能性。Stanley, Kaplan⁴⁸⁾, Moore^{50), 51)}

$S = \frac{1}{2}$, 二次元 H 系ではないが、二次元 XY 系なら $S = \frac{1}{2}$ でも存在する。

iii) 低温からのアプローチで、二次元 H 系, XY 系ではマグノン数が発散するから LRO はないことは言えるが、調和近似 (LRO はなくても使える) によるスピン波解析は低温では良い近似で成立し、これによると相関々数が

$$\langle S_0 S_r \rangle \sim r^{-\alpha(T)}$$

$$\alpha(T) \propto T$$

の形に求まる。これは通常の指数関数的減少と著しく違う点で、このことは二次元系で $\alpha(T)$ がある値以下で $\chi \rightarrow \infty$ (相転移) を示す可能性を示唆する。Wegner³⁶⁾, Berezinski⁵⁶⁾,

iv) Vortex の概念の導入。これはスピン波理論の高温領域での修正で、非線形励起の 1 つとして考えられる。Berezinski⁵⁷⁾

v) Topological LRO の概念の導入。Vortex pair と free Vortices の間の関係をつける。

Kosterlitz-Thouless⁹⁾。くりこみ群による定式化 Kosterlitz¹⁰⁾。

vi) 摂動の効果。Symmetry breaking field の効果。José et al⁵⁸⁾。三次元的摂動効果⁵⁹⁾。

vii) 計算機実験 (モンテカルロシミュレーション)^{60) ~ 65)}

viii) 実験的な例は殆んどない。但しそれらしいものとしては文献 66, 67, 68 にある。

Kosterlitz-Thouless (K. T.) 転移, 及びそれに関連した現象の解説として文献 69), 70) がある。

古典的スピン系による考察³⁶⁾

SRO の発達した低温で、大きい r についての D 次元スピン相関々数

$$\langle S(r) S(0) \rangle \equiv g_D(r)$$

を考える。planar 型での計算結果は、

一次元系

一次元系

$$g_1(r) = \exp(-C_1 T r) , \quad (58)_I$$

と表わされ、具体的 XY 系では

$$g_r(r) = S^2 \exp(-\kappa r) ,$$

と表わされる。但し

$$\kappa \simeq \frac{k_B T}{4 J S^2} , \quad (59)$$

で、 r は格子常数を単位にして測ってある。

二次元系

$$g_2(r) \sim r^{-C_2 T} \quad (58)_{II}$$

三次元系

$$g_3(r) = \exp(-C_3 T r) , \quad (58)_{III}$$

であるが、よく Ornstein-Zernike 型として書かれるもので

$$g_3(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

となるが、 $r \rightarrow \infty$ では

$$g_3(r) \propto e^{-\kappa r} \quad (60)$$

となる。特に二次元の場合、低温になると $\chi \rightarrow \infty$ となることが次式から分かる。

$$\chi = \frac{1}{k_B T} \sum_{\mathbf{r}}^{2D} g_2(\mathbf{r}) . \quad (61)$$

但し、一次元・二次元では LRO はないことが証明されている。

二次元スピン相関々数 $g_2(r)$ の形の求める略解を書く。二次元 XY 系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) - m H \sum_j S_j^z$$

と書け、これを classical plane rotator で近似すると、

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j) - m H \sum_j \cos \varphi_j , \quad (62)$$

となる。 $(\varphi_i - \varphi_j)$ が小さいとして 2 次までの項で打切る調和近似で書き、 $H = 0$ のスピン相関々数を求めてみよう。

$$\mathcal{K} = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\varphi_i - \varphi_j)^2 . \quad (63)$$

ここで

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}_i} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \varphi_i$$

を用いて、式(63)を書き直す。スピン相関々数は

$$\langle (\varphi_i - \varphi_j)^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle [2 - 2 \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] , \quad (64)$$

で表わされる。

一方対角化されたハミルトニアンは

$$\mathcal{K} = \frac{J}{2} N \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \sum_{\boldsymbol{\delta}} (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}}) , \quad (65)$$

とかける。ここで $\boldsymbol{\delta}$ は最近接原子へのベクターである。このハミルトニアンを用いて

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{k_B T}{NJ} \frac{1}{\sum_{\boldsymbol{\delta}} (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}})}$$

が得られる。これを式(64)に用いて

$$\begin{aligned} \langle (\varphi_i - \varphi_j)^2 \rangle &= \frac{2 k_B T}{J} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{ij})}{k^2} \\ &= \frac{k_B T}{\pi J} \ln R_{ij} , \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ここで $R_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ である。従って

$$\begin{aligned} g_2(r) &= \langle S_0 S_r \rangle = \langle \cos(\varphi_0 - \varphi_r) \rangle \\ &\propto r^{-k_B T / 2\pi J} \\ &\rightarrow r^{-C_2 T} \rightarrow r^{-a(T)} . \end{aligned} \quad (67)$$

となる。但し公式

$$a^x = 1 + x \ln a + \dots$$

を用いた。

このように指数関数的でなく、巾乗で相関々数が R と共にへることが二次元系の著しい特徴である。以上の低温近似をそのまま進めると、二次元系では r^{-2} 即ち $T = 4\pi J / k_B$ 以下の温度では帯磁率が発散し、 T_c が出る。実際にはもっと非調和項による励起が効くのでもっと低い温

度で T_c が出る。又、この様なことが起ることが低温展開以外のアプローチからもうかがえる。但し LRO はない（厳密解）。

ある温度以下のどの温度でも臨界点になっており、そこで磁化 M と外場 H との間に

$$M \propto H^{1/\delta(T)}$$

が成立つ。しかもこの δ と α との間にスケーリング則が成立つ。⁷¹⁾

$$1 + \delta(T) = \frac{4}{\alpha(T)} \quad (69)$$

これは $H=0$ の時のスピン相関を与える $\alpha(T)$ と、isothermal magnetization を与える $\delta(T)$ が関係していることを示す。通常の三次元系では $M \propto H^{1/\delta(T)}$ の関係は T_c のみでしか成立しない。

Topological LRO (Kosterlitz and Thouless 転移)

式(63)を変形し

$$\begin{aligned} \mathcal{K} - E_0 &\approx \frac{1}{2} J \sum_{\langle ij \rangle} (\varphi_i - \varphi_j)^2, \\ &= J \sum_r (\Delta \varphi(r))^2, \end{aligned}$$

を Local minimum E_0 のまわりで展開し、しかも図 30 のような Vortex を考えると、そのエネルギーは

$$\mathcal{K} - E_0 \approx \pi J \ln \frac{R}{a}, \quad (70)$$

となる。これは系の大きさに対し対数発散。つまり 1 個当りのエネルギーは系の大きさを大きくしていくとへる。この事より、 $\Delta \varphi$ はスピン波的励起と Vortex の励起に分けられよう。多分図 31 のような局所的平衡状態（渦）を作り乍ら、スピンはその配置のまわりで、スピン波的運動をする。従って、その時のハミルトニアンは図 31 の変数によって

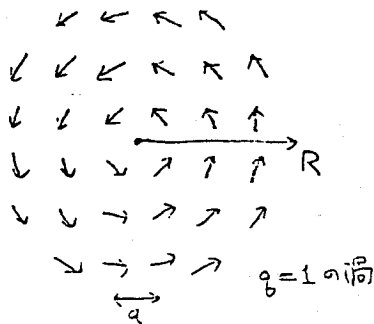


図 30.

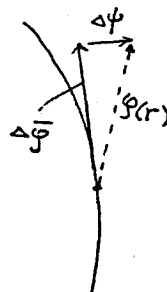


図 31.

$$\mathcal{K} - E_0 \simeq J \sum_r (\Delta \phi(r))^2 + J \sum_r (\Delta \bar{\varphi}(r))^2, \quad (71)$$

スピンの波 vortex

となり，ここで

$$\oint \Delta \phi(r) = 0, \quad \oint \Delta \bar{\varphi}(r) = 2\pi q.$$

但し， $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。 $q = 1$ の渦は図 30 に示すようなありふれたもの。例えば $q = 2$ の渦は図 32 に示すようなもの（恐らくこのように q の大きい渦は出来にくいだろう）。渦は下記に示すようにいろいろな形をとる。いづれもエネルギーは各スピンの uniform rotation に対して不変であるから，下記に示す $q = \pm 1$ の中でのパタンは見掛けは違っても同じもの。

$q = +1$ の時

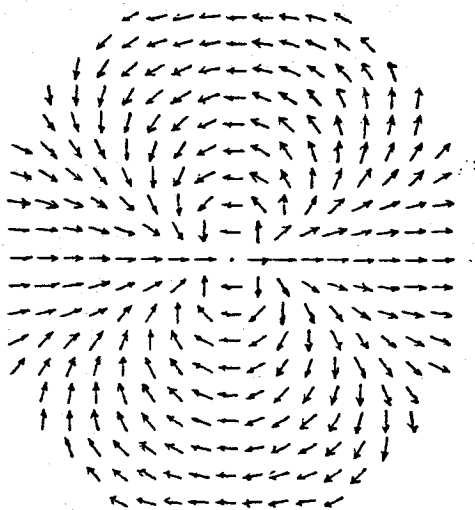
$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \end{array} \downarrow \equiv \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \end{array} \rightarrow \equiv \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \equiv \begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow,$$

$$\Delta \bar{\varphi} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi.$$

$q = -1$ の時

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \leftarrow \equiv \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \uparrow \equiv \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \equiv \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \leftarrow,$$

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \times 4 = -2\pi.$$



$q=2$ の渦

図 32.

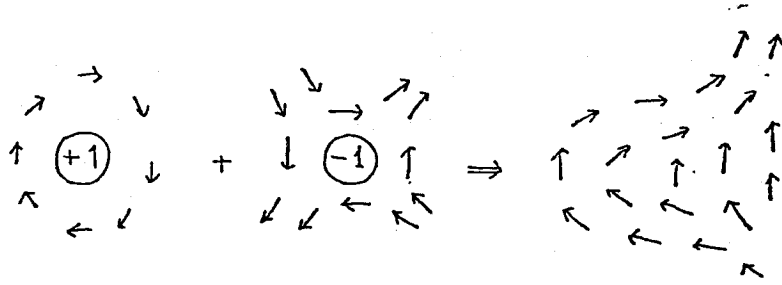


図 33.

又 $+q$ と $-q$ の渦が最近接迄近寄って Vortex pair を作ると、一見渦はきえて、少しくねったスピンプタン (図 33) が出来るようになる。

一個の渦の生成エネルギー (式 (70)) は簡単に導けるが、渦対 ($q_i = +1, q_j = -1$) の間には引力的な次の相互作用が働く。

$$E_{V_{\text{int}}} = -2\pi J \sum_{\langle i,j \rangle} q_i q_j \ln \left| \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{a} \right|, \quad (73)$$

ここで、 $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \equiv R$ は渦間の距離である。

一方、自由な渦が 1 個生じた時のエントロピーは、渦がどこにあってもよいから、

$$S \simeq k_B \ln \left(\frac{R}{a} \right)^2, \quad (74)$$

である。従って、1 個当りのフリーエネルギーは

$$\begin{aligned} F &= E_{V_{\text{int}}} - TS \\ &\simeq \pi J \ln \left(\frac{R}{a} \right) - k_B T \ln \left(\frac{R}{a} \right)^2, \end{aligned} \quad (75)$$

で、これより臨界温度 T_c が求まる。

$$T_c = \pi J / 2k. \quad (76)$$

温度が T_c 以下では渦の対が出来る。

物理量間の定量的関係式の導出を Kosterlitz⁵⁾ は、次のハミルトニアンに、くりこみ群を用いて調べた。

$$\mathcal{K} = -2\pi \sum_{i,j} q_i q_j \ln \left| \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{a} \right| + \mu \sum_i q_i^2 \quad (77)$$

ここで、 μ は $|q| = 1$ の単一渦のもつ化学ポテンシャルであり、これは J で決まり、 T_c の値に関係するが、臨界指数の上では重要ではない。

結果

$$t \equiv (T - T_K) / T_K$$

と定義する。但し T_K は Kosterlitz-Thouless の転移点 (式 (76) の T_c) である。

$T > T_K$ のとき

$$\xi \sim \exp (b t^{-1/2}), \quad b \sim 1.5, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \xi^{2-\eta} \sim \exp \{ (2-\eta) b t^{1/2} \} \\ &\sim \exp (2.63 t^{-1/2}). \end{aligned} \quad (80)$$

$T = T_K$ の時

$$\eta = 1/4 \quad (\text{二次元 Ising 系の場合と同じ}),$$

$$M \propto H^{1/\delta} \quad (\delta = 15).$$

ここで、臨界指数が不連続的に変わる。但しオーダーパラメーターが不連続的に変わるのではないから一次の転移というわけではない。

$T < T_K$ の時

$$\xi = \chi = \infty$$

各温度ですべて $\chi (H = 0)$ が発散するので、すべての温度が臨界点となる。従って $\delta (T)$, $\alpha (T)$ が独得な温度変化を示す。又低温ではスピン波近似が成立つ。

計算機実験 (モンテカルロ法) で、スピン対相関々数 (plane rotator での)

$$\langle S_0 S_r \rangle \sim r^{-\alpha (T)}, \quad (81)$$

の低温 (下記) での $\alpha (T)$ について、鈴木、宮下等^{61), 62), 63)} が調べた。

低温	$T \sim T_K$	
S.W. 近似 OK !	S.W. + Vortex excitation	—
$\alpha (T) = k_B T / 2 \pi J$	$\alpha (T) ?$	
調和近似		

相転移

—————→ para
非線型 (調和近似が成立せず)

仮定

$$k_B T \chi = \frac{\langle M^2 \rangle}{N} \propto N^a(T), \quad (82)$$

とおけるとする。一方磁化率は

$$\begin{aligned} k_B T \chi &\sim \int_0^R \langle S_0 S_R \rangle d^2 R \\ &\sim \int_0^R r^{1-a}(T) dr \\ &\propto R^{2-a}(T) \propto N^{1-a}(T)/2, \end{aligned} \quad (83)$$

となるから、式(83)，(84)より

$$a(T) = 1 - \alpha(T)/2. \quad (84)$$

式(69)を用いると

$$a(T) = 1 - 2/(1 + \delta), \quad (84)'$$

と表わされる。温度が T_K で $a(T) = 0.875$ となる。

二次元系の特徴として、系の大きさと共に物理量が特有な変り方をする（磁場と共に応答が特有な変り方をする）ので、計算機実験で χ の N 依存性を求めると $a(T)$ が求まる。図 34 を見よ。これによると $a(T)$ は低温から線型にスピン波の理論通り減少し温度が T_K 付近で急減する（渦の励起に対応）。従って低温（渦の対）では見掛け上殆んど強磁性体と変らないが、 $\langle M \rangle$ の長時間平均は零で、 $\langle M^2 \rangle$ のみ有限である。

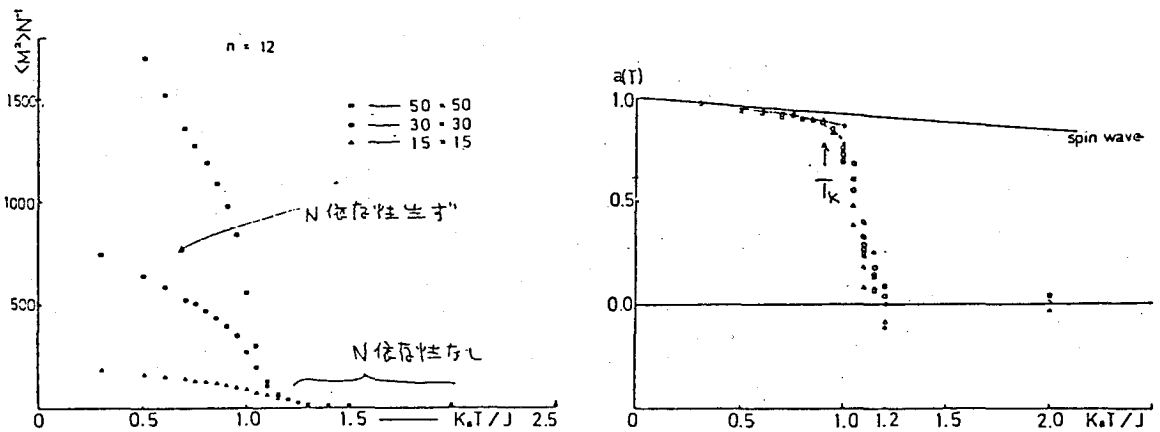


図 34.

摂動の効果

$$\mathcal{K}_0 = -J \sum_{\langle ij \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \quad \text{intra plane} ,$$

$$\mathcal{K}_1 = -J' \sum_{\langle i \ell \rangle} (S_i^x S_\ell^x + S_i^y S_\ell^y) \quad \text{inter plane} ,$$

$$\mathcal{K}_2 = -J_A \sum_{\langle ij \rangle} S_i^x S_j^x \quad \text{Ising like anistropy} ,$$

$$\mathcal{K}_3 = -h_p \sum_i \cos (p \theta_i) \quad \text{symmetry breaking field}$$

P回対称性の異方性磁場。

但し $p = 2, 4, 6, \dots$ である。

上記のハミルトニアンによって、通常の LRO が T_k でなく T_c で起る、それらの効果による T_c を表 2 にまとめている。ハミルトニアン $\mathcal{K}_3$ の $p > 6$ では T_k と T_c が分離する。⁵⁸⁾ $p = 4$ ではきわどい所で、多分だきこみが起って 1 つだけになる。上記のハミルトニアの他に Symmetry non breaking field ^{2), 72)} を表わすハミルトニアン ($H \perp$ 容易面) の効果は Critical line (図 35) すなわち T_c の降下が起る。

表 2.

	T_c
$\mathcal{K}_1$ によるもの	$\sim \sqrt{J J'}$
$\mathcal{K}_2$ "	$\sim \frac{J}{\ln(\frac{J}{J_A})}$
$\mathcal{K}_3$ "	$\sim \frac{J}{p^2} \text{ or } \frac{J}{p}$

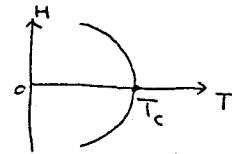


図 35.

Graphite intercalated ⁶⁶⁾ は
上記ハミルトニアン $\mathcal{K}_3$ の
 $p = 6$ の摂動に対応する物
質で、この実験結果が図 36
に示してある。これによる
と T_c らしいものが 2 つ出る。

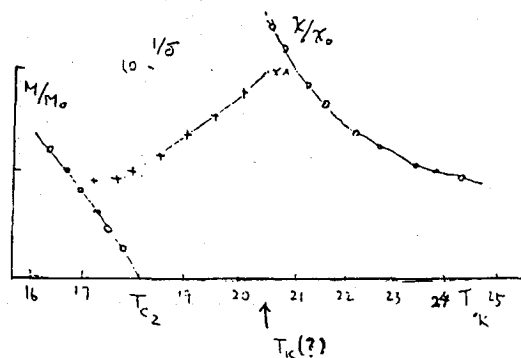


図 36.

K_2CuF_4 ⁶⁸⁾ は上記ハミルトニアンで $J = 11.4 \text{ K}$ ($\xi = \eta \simeq 1.01$), $J_A \simeq 0.1 \text{ K}$, $J' \simeq 0.06 \text{ K}$ ($J'/J \sim 6 \sim 8 \times 10^{-4}$) の物質で $T_c = 6.25 \text{ K}$ で三次元の LRO を持つ。 $T > T_c$ で χ は, $T_k = 5.5 \text{ K}$ として Kosterlitz の式 (80) とよくあう。又 $\delta(T)$ は Kosterlitz–Thouless の理論, 鈴木, 宮下等のモンテカルロによる計算 (式 (84)) とあい, $T = 5.5 \text{ K}$ で $\delta = 15$ で $\alpha(T) = 0.875$ となる。Symmetry non breaking field をかけると T_c が下降することも認められた。

ダイナミクスは未解決であるが, $\langle M(T) M(0) \rangle \sim t^{-\Delta(T)}$ において長時間後の振舞をスピン波近似を用いて $\Delta(T)$ を求めると,

$$\Delta(T) = k_B T / 4\pi J \sim \alpha(T) / 2 \quad (85)$$

となり T に依存する。又温度が T_{KT} 近傍でのダイナミクスの変化については Huber⁸¹⁾ の考え方もある。

二次系 H 系 + XY 系のダイナミクス

Villan は K_2CuF_4 のダイナミクスを念頭において, 調和近似内で, 理論を立てている。要約すれば, 異方性 (XY 性) の少い ($\sim 1\%$), 二次元 H 系強磁性では, 通常中性子散乱で扱えるような q の範囲ではダイナミクスは殆んど H 系のように振舞う。XY 性は q のごく小さい所に出る。ダイナミクスで重要な IPM の line shape は次の様になる。

(i) $T \ll T_c$ の時

散乱関数 $\varphi(\mathbf{q}, \omega)$ は

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) \simeq \langle M \rangle \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) \quad , \quad (86)$$

となり, スピン波の極の位置に δ 関数的に鋭いピークを生じ, その強さは自発磁化 $\langle M \rangle$ に比例する。

(ii) $T \sim T_c$ の時

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) \simeq 1 / |\omega - \omega_{\mathbf{q}}|^{1-\alpha} \quad , \quad (87)$$

で, $\alpha = k_B T / 4\pi J S^2$ である。

(iii) $T > T_c$ の時

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) \sim \left(\frac{2\xi}{v_{\mathbf{q}}} \right)^{1-\eta/2} \times \left(\frac{2(1-\eta/2)}{[1 + (\frac{\hbar\omega - \hbar\omega_{\mathbf{q}}}{v_{\mathbf{q}}/2\xi})^2]^{1-\eta/4}} + \frac{(\eta/2)\pi}{[1 + (\frac{\hbar\omega - \hbar\omega_{\mathbf{q}}}{v_{\mathbf{q}}/2\xi})^2]^{1/2-\eta/4}} \right) \quad , \quad (88)$$

で、この形は大体ローレンツ型に近く、又 $0 \leq \eta \leq 1/4$ だろうから第一項が主である。見掛上の減衰定数は ξ の有限性と $v_q = \partial \omega_q / \partial q$ できまる。実験的にはこれを支持しており、ブリリアンゾンの中心と境界では $v_q \approx 0$ だから巾が小さいことを示している。⁹¹⁾

§ 10 一次元系における非線型励起 (ソリトンを中心として)¹⁰⁸⁾

一次元系は $T \neq 0$ で LRO はないが、適当に低い温度では LRO 状態と殆んど変わらないような素励起 (スピン波) がみられることは先に述べた。素励起の密度の高い温度では何が起るか、マグノンの相互作用は如何にして行なわれるかは興味深い。相互作用をさせるためにはスピン間に非調和的相互作用が必要。非調和項は $-2JS_i \cdot S_j = -2JS^2 \cos \phi_{ij}$ の ϕ_{ij} が大きい所から必然的に生じる、そうすると q_1 と q_2 のマグノンが衝突して q_3 というマグノンが作られるかというと、そうは行かない。一次元系では、共鳴条件の破れ (運動量保存 $q_3 = q_1 + q_2$, エネルギー保存 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ は一次元系では同時に満足される場合は殆んどない) の為、非エルゴード的になったり、再帰現象が現れたりする。ソリトンの出現もそのようなことが背景にあると思われる。⁹²⁾ 一次元磁性体でも最近磁場下での TMMC 等で非線型励起 (multi-magnon process) が中性子で観測されているが、^{93), 94)} ここではソリトンだけについて述べる。ソリトンは非線型媒質ないし格子を伝わる特徴的な粒子的性格を持つ波束。一定の速度を持ち、衝突してもすりぬける。但し振巾の大きい局所励起を一般にこう呼ぶことも多い。

ここで取り上げるのは次の三つの例である。いずれも Hexagonal 結晶で鎖と c 軸が平行な物質である。図 37 に具体的に示してある。

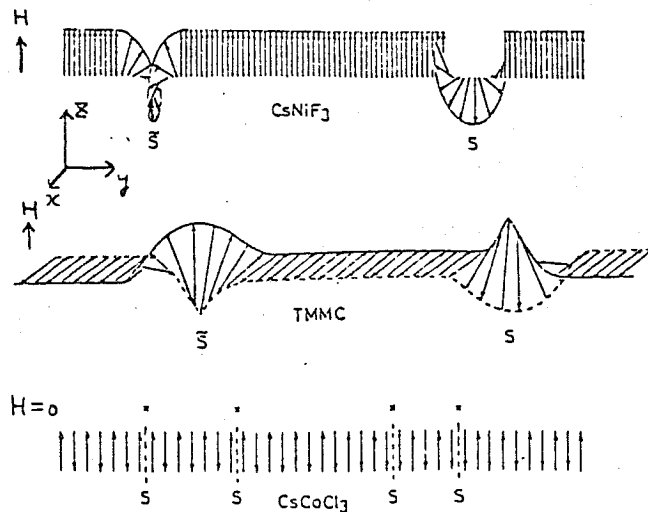


図 37.

*但し以下にのべる CsNiF₃ や TMMC のソリトンは磁場に対するスピン磁気モーメントの非調和的振動に基づいている。

(i) CsNiF_4

一次元 $[\text{H} + xy]$ 系で $S = 1$ の強磁性体, $J = 11.8 \text{ K}$, $A = 9.5 \text{ K}$, $g = 2.4$, $T_N = 2.7 \text{ K}$.

(ii) TMMC

一次元 $[\text{H} + xy]$ 系で $S = 5/2$ の反強磁性体, $J = 6.8 \text{ K}$, $\xi = \eta = 1.016$, $g = 2$.

(iii) CsCoCl_3

一次元 $[\text{I} + xy]$ 系で $S = 1/2$ の反強磁性体, $J = 75 \text{ K}$, $\xi = \eta = 0.14$.

(i), (ii) は共に容易面内に Symmetry breaking field をかけた時現われるソリトンで, 古典的連続体近似で Sine-Gordon 方程式に還元され, Kink solution の解として出たもの^{(95), (99)} を中性子散乱で観測したもの。(iii) は (ii) の場合の異方性が極度に大きくなった状態に対応し, そのためソリトン壁の厚みが原子間距離になったものに相当する。壁の伝播は Ising 性に加えて, 少し存在する非対角項によるもので量子的効果によるものである。(i) は Steiner, Kjems⁽⁹⁷⁾ 等が, (ii) は Boucher⁽⁹⁸⁾ 等が, (iii) は Yoshizawa⁽⁹⁹⁾ 等が観測に成功した。但し (i) は, 観測された散乱が本当にソリトンによるものか否かについては, 若干疑がもたれている^{(100), (101)} これらについての解説は文献 102) から 104) を参照のこと。

(i) CsNiF_3 の場合

この物質のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -2J \sum_n \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1} + A \sum_n S_n^y{}^2 - g \mu_B H \sum_n S_n^z, \quad (89)$$

と表わされる。温度を下げて, $T \ll \sqrt{AJ}$, 又は $T \lesssim AS^2(\xi/a)/k_B$ ではスピンの平均的方向は殆んど面内に限られ XY 系的に振舞う, 量子効果を無視する極限, $A/2JS(S+1) \ll 4\pi$ で座標位置 n でのスピン演算子は図 38 の座標で表わすと

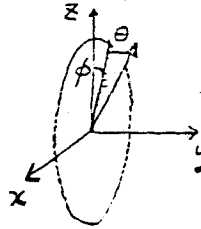


図 38.

$$S_n = S (\cos \theta_n \cos \phi_n, \cos \theta_n \sin \phi_n, \sin \theta_n), \quad (90)$$

と表わされる。いま容易面内の一方向に対称性を破るように磁場をかけ, 磁場の強さが有限温度のスピン系にスピン波が生ずるぐらいにすると, $|\theta_n| \ll 1$ としてよく, 式 (89), (90) を用いて

$$\mathcal{K} = -2JS^2 \sum_n \cos(\phi_n - \phi_{n+1}) + AS^2 \sum_n \theta_n^2 - g\mu_B HS \sum_n \cos \phi_n, \quad (91)$$

となる。外場 $H = 0$ なので $\phi_n = 0$ のまわりの扇型才差運動となり，式 (91) を連続体近似でかくと

$$\mathcal{K} = -2JS^2 \cos(\phi'_a) + AS^2 \theta^2 - g\mu_B H \cos \phi$$

$$= -2JS^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 a^2 \right\} + \dots,$$

となり，これを $2JS^2 a^2$ の単位で書き直すと

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} + m^2 (1 - \cos \phi), \quad (93)$$

で，ここで

$$c^2 = a^2 S^2 (2AJ), \quad m^2 = g\mu_B H / (JSa^2), \quad (94)$$

である。この式から Sine-Gordon の式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \sin \phi, \quad (95)$$

が得られる。共役運動量の組は $S\theta$ と $\dot{\phi}$ である。式 (95) の特殊解として

$$\cos \phi(y, t) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 m r (y - ut - y_0), \quad (96)$$

が得られる。但し u は， $u < c$ で制限された，ソリトンの速度，又

$$r = 1 / \sqrt{1 - u^2 / c^2}, \quad (97)$$

で，解 (96) の振舞は図 39 の様である。このソリトンのエネルギーはソリトンの壁の厚さに反比例した $8mr$ で表わされる。低温で $r \rightarrow 1$ で，高温で $r > 1$ となり相対的補正が必要，又低温ではソリトンの密度はマックスウェル分布し，その密度 n は

$$n = 4m (\beta m / \pi)^{1/2} e^{-8/3m}, \quad (98)$$

と表わされる。

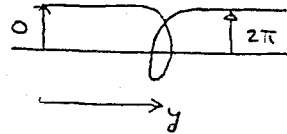


図 39.

ソリトンによる磁場方向のスピン成分の散乱関数 $\mathcal{S}_{\parallel}^{\text{sol}}$ は

$$\mathcal{S}_{\parallel}^{\text{sol}}(q, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt dy e^{i(qy - \omega t)} \langle \cos \phi(0, 0), \cos \phi(y, t) \rangle, \quad (99)$$

と表わされ、最初川崎¹⁰⁵⁾によって計算された。これをソリトンガスモデルとして解いた、

Mikeska⁹⁵⁾の結果を明記すると

$$\mathcal{S}_{\parallel}^{\text{sol}}(q, \omega) = (1 - 8n/m)^2 \delta(q) \delta(\omega) \quad \text{Bragg 散乱} \quad (100)$$

$$+ \frac{\beta}{2cq} e^{-8\beta m} \left[\frac{16}{\pi} e^{-2\beta m \omega^2 / (cq)^2} \frac{\pi q / 2m}{\sinh(\pi q / 2m)} \right],$$

強度を支配する部分 ソリトンの form factor

となる。 ω 空間での巾 $\Delta\omega$ は

$$\Delta\omega = \frac{cq}{(4\beta m)^{1/2}} \propto q \propto \sqrt{T} \propto \sqrt{H}^{-1}, \quad (101)$$

と表わされることがわかる。式(100)を q 空間の一点で ω について積分した強度、すなわち、instantaneous correlation function はソリトン壁の形状に関係する。式(100)の第2項、すなわち、

$$\text{第2項} = 64 \pi^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\beta}{m}} e^{-8\beta m} \left[\frac{\pi q / 2m}{\sinh(\pi q / 2m)} \right]^2 \quad (102)$$

この q 依存性を測ると m 、即ち壁の厚みが分る。この散乱は $8m/c^2$ という質量を持つガスの散乱と同じである。一方磁場に垂直な成分は式(100)で $\sinh \rightarrow \cosh$ に変えればよい。

実験

外場 H を図40の z 軸方向に強くかけるとBragg散乱とスピン波散乱が観測される。しかし H を次第に弱めていくとマグノン数は増え、非線型的ソリトンモードが図39の様に現われてくる。 $\mathcal{S}_{xx}^{\text{sol}} (= \mathcal{S}_{\perp}^{\text{sol}}) + \mathcal{S}_{zz}^{\text{sol}} (= \mathcal{S}_{\parallel}^{\text{sol}})$ が測定にかかるか、 $\mathcal{S}_{xx}^{\text{sol}}$ は差引いて除く、図41のように、 $T < 10$ Kでスピンはほぼ c 面内(容易面)にあり、 $\mathcal{S}_{zz}^{\text{sol}}$ は $\omega \approx 0$ のセントラルピークとして現われる。その強度、巾の T, H 依存性の実験・理論との比較をする。

式(100)より積分強度は

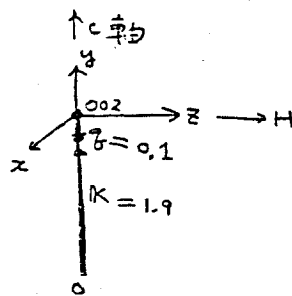
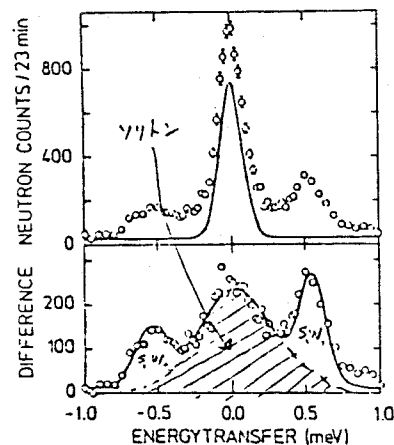
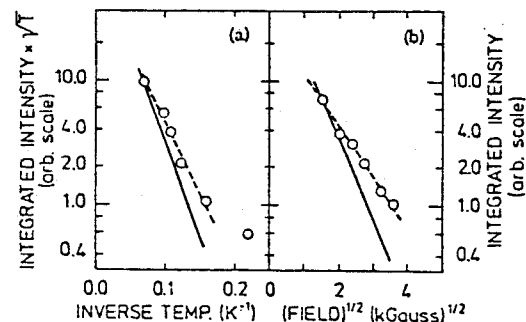


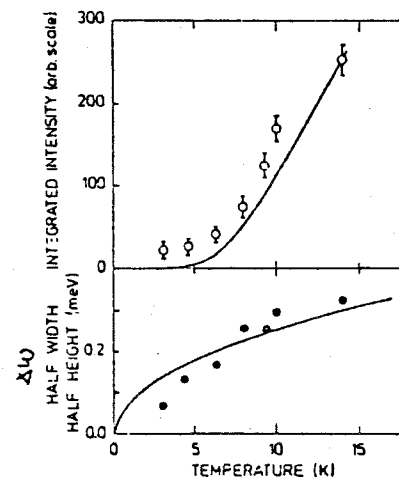
図 40.



Upper: Observed inelastic spectrum at $(0,0,1.9)$ at $T=9.3$ K and $H=5$ kG (circles). The full line is the observed profile at $T=3.1$ K and 30 kG which is assumed to be the background. Lower: Difference between the two spectra in the upper part of the figure. The full line is the result of a least-squares fit as described in the text.



Semilog plots of the integrated quasielastic intensity at $(0,0,1.9)$ vs inverse temperature at $H=5$ kG and (b) vs the square root of the field at $T=9.5$ K. The solid lines are calculated from the Mikeska theory.



Temperature dependence of the integrated intensity (upper) and energy half-width at half-maximum (lower) of the quasielastic component at $H=5$ kG and $q=(0,0,1.0)$. The values are derived from the least-squares fitting procedure described in the text. The full lines are the results predicted by Mikeska with no adjustable parameter for the energy width and only a scale factor for the intensity.

$$\omega_{||}^{\text{sol}} d\omega \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{A}{T}\right) \propto \exp\left(-B\sqrt{H}\right).$$

又、 $\Delta\omega$ は式 (101) より $\Delta\omega \propto \sqrt{T}$ となっている。図 41 の実線は Mikeska の理論である。従って H, T 依存性の理論と実験との一致はかなり良く、これでソリトンが観測されたとした。一方 $T > 6.3 \text{ K}$, $H = 5 \text{ kG}$ で $q = 0.1$ の所のソリトンのエネルギーは

$$8 m_{\text{exp}} = 27 \text{ K} ,$$

$$8 m_{\text{Theory}} = 34 \text{ K} ,$$

となり一致、又ホームファクターの実験では 69K と出る。

問題点として次の点がある。

(1) 高温になると XY 系から H 系へ移る。(2) 相対論的補正の重要性。(3) キンクソリトン以外にパルスソリトンもあるのではないか。(4) フリーガスモデルの破綻が起る。(5) 通常のスピン波の多重散乱がソリトン散乱とされていた強度の中に入っている (特に高温側はあぶない)¹⁰¹⁾。

(ii) TMMC の場合

外場 $H = 0$ で、 $T_N \approx 0.83 \text{ K}$ であり、 $T < 5 \text{ K}$ で XY 系的に振舞う。この場合も (i) と同じく容易面型であるが H は容易面内にある。この時一つの副格子を取上げてみると形式的には強磁性の場合と似た取扱いが出来る。⁹⁸⁾ 従ってハミルトニアンは次の様になる。

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_p \left\{ -|\tilde{J}| \mathbf{S}_{2p} \cdot \mathbf{S}_{2p+2} + 4\tilde{D} (S_{2p}^z)^2 + \frac{\tilde{H}^2}{8\tilde{J}} (S_{2p}^y)^2 \right\} \quad (103)$$

但し反強磁性体であるから、スピンは磁場に対し垂直な方向へむき、その力は $\chi_{\perp} \propto \tilde{J}^{-1} H^2$ に比例する。ここで H^2 が強磁性と異なる点であり、もう一つの違いは、強磁性体では $\pm 2\pi$ のキンクソリトンが生ずるが、反強磁性体では $\pm \pi$ のソリトンであることである。定式化は前と同様であるが位相のちがう A, B 2種の domain が等量 $T \neq 0$ では出てくるから、 H で倒されて水平に揃っても、均一モードの振巾は零となり、ブラッグ散乱は出ない。体系は密度 n をもったソリトンの壁で仕切った分域から出来ているとすると、 ξ 又は κ はそれらの平均長 (又は逆平均長) と言える。

今考えるのは反強磁性体の低温状態であるので、隣り合うスピンはほぼ逆方向に揃っている。そこで鎖の偶数番目、奇数番目のスピンの y 軸となす角 θ を導入して、前と同様に行うと、式 (103) は次の様になる。

$$\mathcal{K} = \text{const} + JS^2a \int dy \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial t}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - m^2 \sin^2 \phi \right]. \quad (104)$$

但し $c = 4JSa$, $m = g\mu_B H / 4JSa$ である。

π ソリトンの寄与として最も重要なのは、容易面内で磁場に垂直方向の散乱関数 $\mathcal{S}_\perp(K, \omega)$ である。これは

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\perp(K, \omega) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \sin \phi(y, t) \sin \phi(0, 0) \rangle \\ & \times \exp i(q^* y - \omega t) dt dy, \end{aligned} \quad (105)$$

と表わされる。但し $q^* \equiv K - \tau_{AF}$ である。

外場 H が、 $H < |J|$ の範囲で、強くなるとソリトン数は減り、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 、又は $-\frac{\pi}{2}$ で揃う。但しソリトンは $T \neq 0$ では多少あるから分域は $1/n$ の長さである。このためボケた Bragg 散乱が出る。又壁が運動すると分域は有限の寿命をもつから動的にもボケが出る。このボケの効果をも Γ_D とすると、式 (105) は

$$\mathcal{S}_\perp(K, \omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma_D}{\omega^2 + \Gamma_D^2} \cdot \frac{\Gamma_s}{q^* + \Gamma_s^2}, \quad (106)$$

と表わされる。但し $\Gamma_s = 2n$ である。又

$$\Gamma_D = \Gamma_s U_0 = 2v_0 n, \quad (107)$$

で Γ_D と Γ_s が関係づいている。ここで

$$v_0 = 4JS / \sqrt{4\pi\beta m},$$

で速度を表わしている。この $\mathcal{S}_\perp(K, \omega)$ はソリトンで仕切られた分域のスピン相関を表わしていて、壁がうすいため、ソリトン自信の寄与は少ない。しかし n を通じて間接的にソリトンの存在が分る。磁場に平行な $\mathcal{S}_\parallel(K, \omega)$ の方は直接ソリトンを見ているが、スピン波からの寄与もみている。図 37 を見れば、強度は $\mathcal{S}_\perp \gg \mathcal{S}_\parallel$ であることが分る。 n は NMR の T_1 の測定によっても知ることが出来る。⁹⁸⁾ NMR の角周波数より Γ_D がずっと大きければ

$$T_1^{-1} \propto 1/\Gamma_D.$$

と表わされる。実験値は図 42, 43 から

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= 3.8 \times 10^{-3} H \exp[-0.27 H/T], \\ \Gamma_s &= 2.7 \times 10^{-3} H \exp[-0.28 H/T], \end{aligned} \quad (108)$$

が得られる。ガスモデルでの理論値は Γ_D , Γ_s は $\exp[-0.34 H/T]$ となって、ぎりぎりの線だが大体妥当の様に思われる。

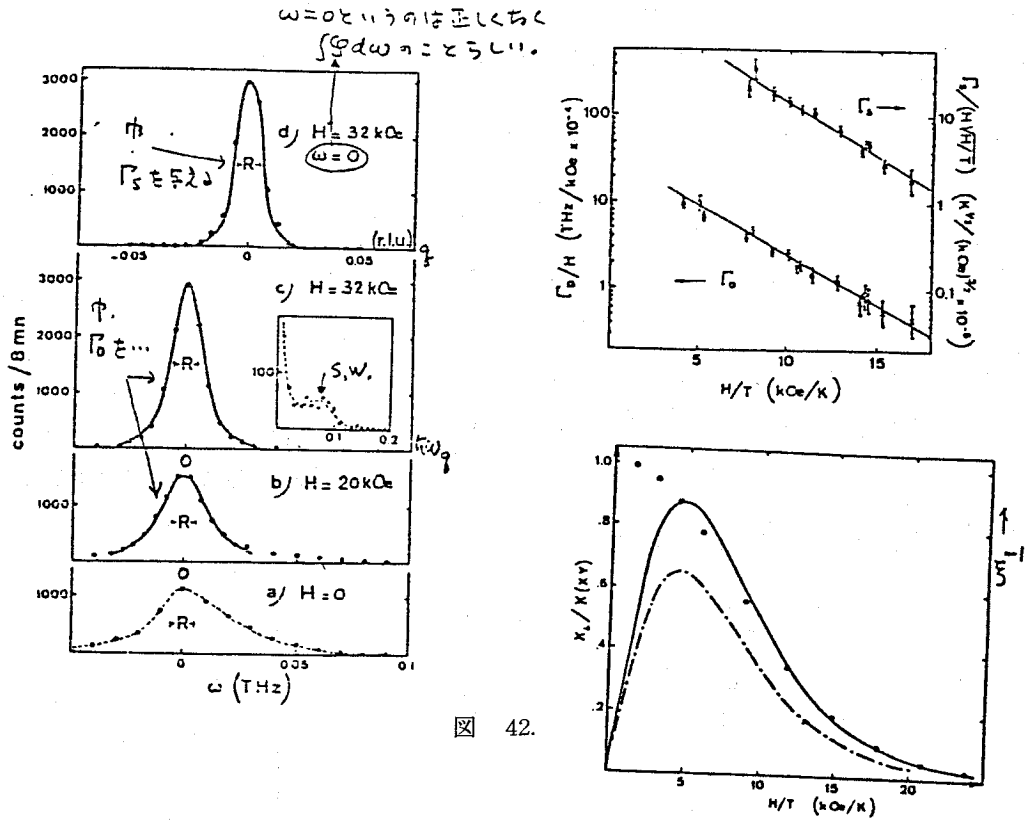


図 42.

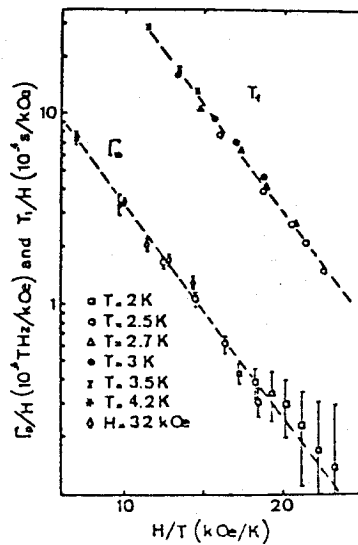


図 43.

(iii) CsCoCl_3 の場合

前述の例とは違って静磁場を用いない。その代りに、イジング性と $S = 1/2$ の量子効果のために、その系の中に含まれる僅かな非対角項によって熱的に励起された磁壁が伝播するもので、この物質（一次元 $[I + XY]$ 系の反強磁性体）のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= 2J \sum_n \{ S_n^z S_{n+1}^z + \epsilon (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y) \} \\ &= 2J \sum_n S_n^z S_{n+1}^z + \epsilon J \sum_n (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) \\ &= \mathcal{H}_{zz} + \mathcal{H}_{XY},\end{aligned}\tag{109}$$

と表わされる。但し $J > 0$, $0 < \epsilon \ll 1$ とする。

この系の理論的取扱いは Villain³³⁾, 斯波, 石村¹⁰⁹⁾ によってなされた。

純イジング系 ($\epsilon = 0$) では基底状態はネール状態で、第一励起状態は基底状態より $2J$ だけ上にある。図 45 より第一励起状態は

$$\left. \begin{aligned}\phi_1(K) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j e^{ikR_j} S_j^+ \bar{\phi}'_{\text{Neel}}, \\ \phi_3(K) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j e^{ikR_j} S_j^+ S_{j+1}^- S_{j+2}^+ \bar{\phi}'_{\text{Neel}}, \\ \phi_5(K) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j e^{ikR_j} S_j^+ S_{j+2}^- S_{j+2}^+ S_{j+3}^- \bar{\phi}'_{\text{Neel}}\end{aligned}\right\}\tag{110}$$

以上, $\epsilon = 0$ の時は多重縮退 (図 44)。

$\mathcal{H}_{XY}$ が加わると

$$\langle \phi_{2\nu-1}(K) | \mathcal{H}_{XY} | \phi_{2\nu+1}(K) \rangle = \epsilon J (1 + e^{-2ika}) \neq 0,\tag{111}$$

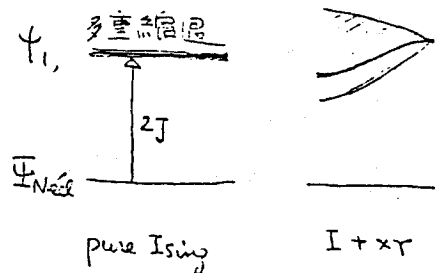


図 44.

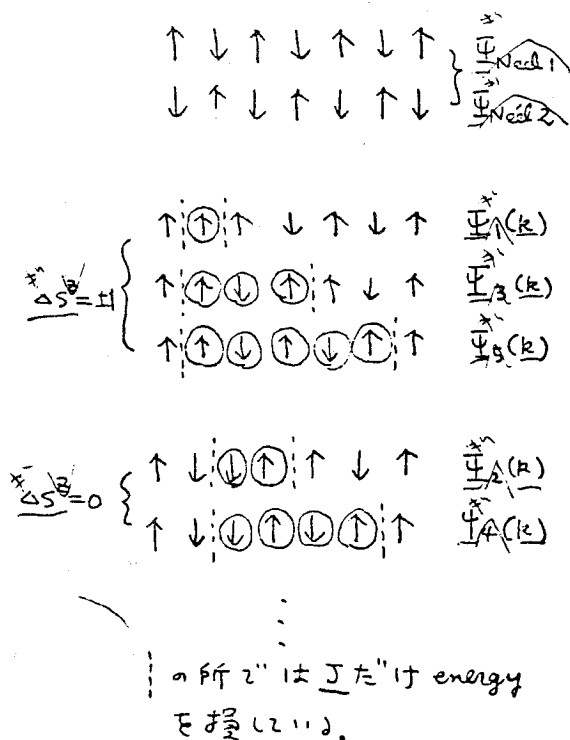


図 45. : の所では J だけ energy を損している

となって、磁壁の運動の効果によるバンド巾を作る。従って式 (109) のエネルギーは

$$E(K) = 2J(1 - 2\epsilon \cos ka \cos \phi), \quad (112)$$

となる。散乱関数 $\mathcal{S}(K, \omega)$ のピークは

$$E_{\text{peak}} = 2J(1 - 8\epsilon^2 \cos^2 ka), \quad (113)$$

に生ずる。これは $\Delta S^z = \pm 1$ でスピン波振舞の見れる $\mathcal{S}_{xx}, \mathcal{S}_{yy}$ に現れる。この他に $\Delta S^z = 0$ の励起エネルギー ($\sim 2J$) が $\mathcal{S}_{zz}$ に見られる。 $\omega \approx 0$ の附近で磁壁の運動効果も入れたエネルギーは

$$E_{\text{DW}}(K) = J + 2\epsilon J \cos 2ka, \quad (114)$$

と表わされる。中性子がこの磁壁と衝突して、そのエネルギーをかえる (ラマン過程に似ている)。このような散乱が起りうるので、Villan は運動量・エネルギーを授与する過程の与える散乱関数 $\mathcal{S}_{zz}(\theta, \omega)$ を求めた。

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{S}_{zz}(Q, \omega) &\propto \frac{2\kappa}{\kappa^4 + 4 \cos^2 \frac{1}{2} Qa} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2} \beta \hbar \omega}}{(\Omega_Q^2 - \omega^2)^{1/2}} \\
 &\times \cosh \left[\frac{1}{2} \beta \hbar (\Omega_Q^2 - \omega^2)^{1/2} \cot Qa \right], \quad |\omega| < \Omega_Q, \\
 \mathcal{S}_{zz}(Q, \omega) &= 0, \quad |\omega| > \Omega_Q,
 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

式 (114) より，運動量授与 Q が一定の時最大エネルギー授与は

$$\hbar \Omega_Q = 4 \varepsilon J |\sin Qa|, \quad (117)$$

となる。 $Q \rightarrow 0$ では式 (116) はローレンツ型となり， $Q \rightarrow Z.B.$ ではエネルギースペクトルに極（又は肩）が出る。 $\mathcal{S}_{zz}(Q, \omega)$ は壁の励起ではなく熱励起されている磁壁と中性子の相互作用による散乱が見られ，磁壁の数は $e^{-2J/\hbar T}$ に比例して励起されるから散乱強度はそのような温度依存性をもつ。図 46 を見よ。

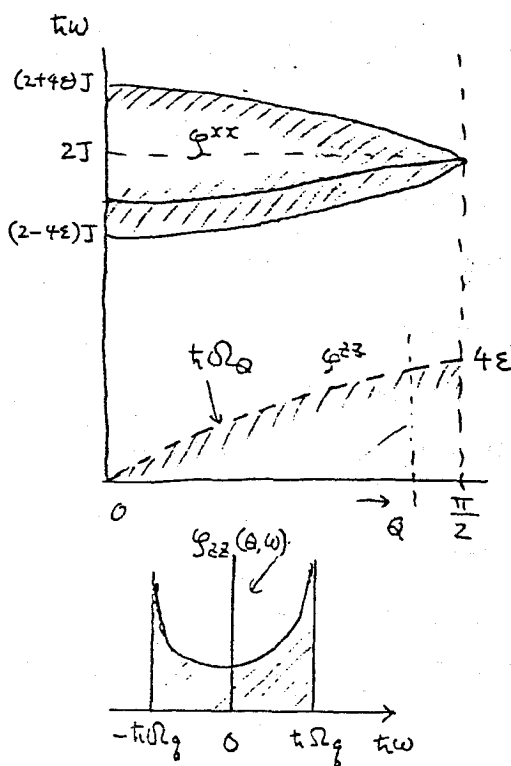


図 46.

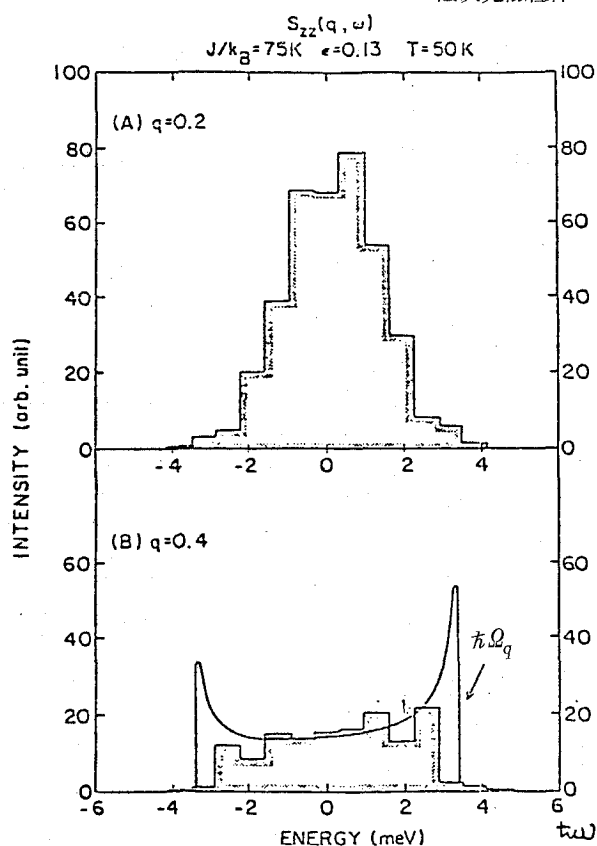


図 48-1 central peak の q 依存性。
step function は斯波・石村による $N=10$ ケの数値計算。

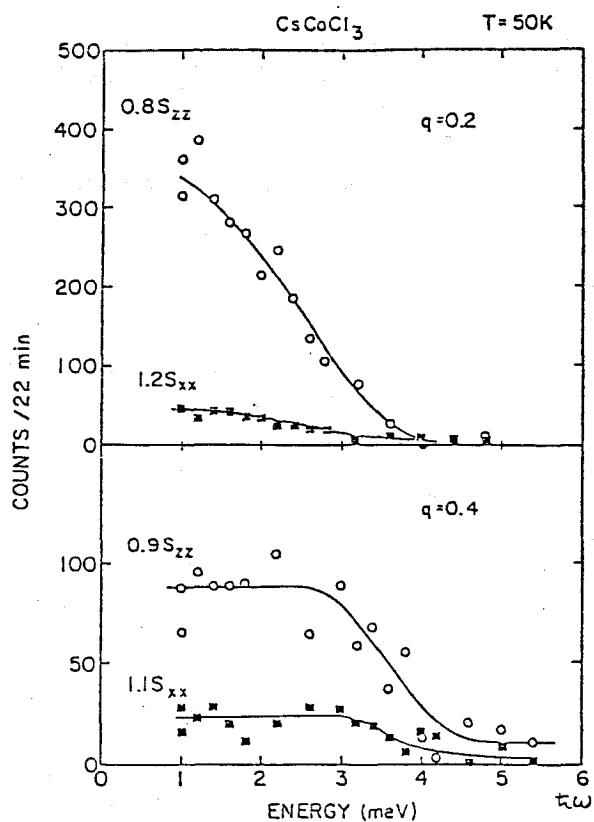


図 48-2 実測された profile. 図 48-7 の右半分 $\hbar\omega > 0$ に対応する。

$S_{zz} : \Delta S_z = 1$
 $S_{xx} : \Delta S_z = 1$ } による散乱

純イジング系ではローレンツ型の $\omega \simeq 0$ のまわりの一つのピークが $\pm \hbar \Omega_Q$ のように割れる。
 しかも $\hbar \Omega_Q$ は磁壁 (ソリトン) の運動を反映している。

吉沢等⁹⁹⁾ によって実験された結果, 及び理論値との比較を図 47, 48 に示してある。尚表 3 に
 上記のソリトンの特性をまとめてある。

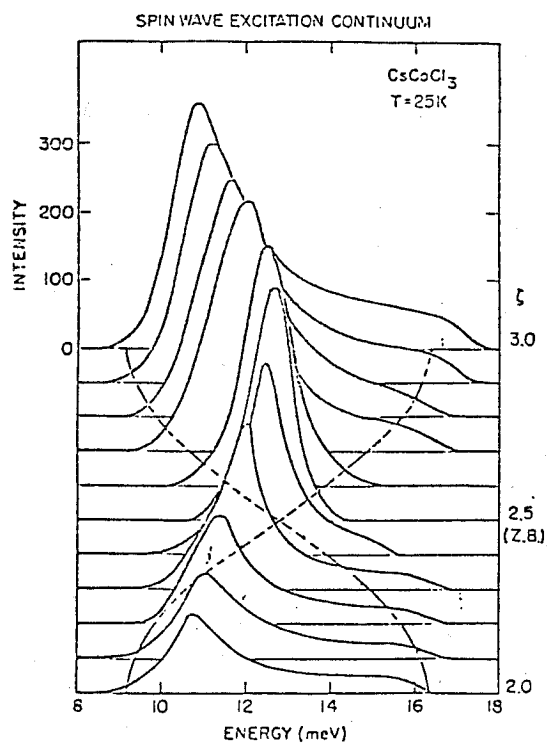


図 47-1 点線は計算されたバンド状スペクトル
 実線は中性子散乱強度, 峯が従来の
 spin wave ピーク。

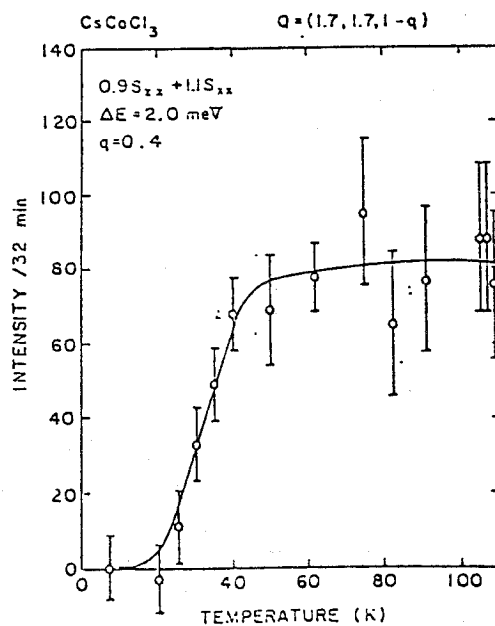


図 47-2 soliton による散乱強度の温度変化

表 3.

	CsNi F ₃	TMMC	CsCoCl ₃
	Ferro H+XY	Antiferro H+XY	Antiferro I+XY
non-linear mode の空間的広がり, (a 単位) (実測)	$\sim (J/H)^{1/2}$ 5.4 at 5 KG, 10 K	J/H 20 at 25 KG, 2.5 K	1 $\frac{1}{2} \quad H=0$
分域の大きさ	120 "	135	20 at 40 K
励起ソリトン数 n	$\sim 4m \sqrt{\beta m / \pi} e^{-8\beta m}$	$2 \times \textcircled{5}$	$\sim 2 e^{- J /kT}$
性 格	Sine-Gordon (一応 classical)	" "	Quantum mechanical

附 記

去る昭和56年2月京大理学部で行った講義のノートを馬淵真人氏がまとめて原稿を作って下さった。同氏の労に対し心から御礼申上げる。又拙講には思いちがいや誤謬も多々あると思われる。御指摘下されば幸である。

6月12日

平川記

参考文献

- 1) L. Onsager, 厳密解. 分配関係 for 2D-I 系 P. R. 65 (1944), 117.
T. D. Lee and C. N. Young, $M_s(T)$ for 2D-I 系. P. R. 87 (1952), 410.
A concrete form for $M_s(T)$ and critical exponents are given in 2).
- 2) M. E. Fisher, The Theory of Equilibrium Critical Phenomena: Rep. Progr. Phys. 30 (1967), 615.
- 3) T. Watanabe and T. Haseda, J. Chem. Phys. 28 (1958), 323.
- 4) E. Lieb, T. Schultz and D. Mattis, 1D-XY 系. Ann. of Phys. 16 (1961), 407.
- 5) S. Katsura, 1D-XY 系. P. R. 127 (1962), 1508; erratum: P. R. 129 (1963), 2835.
- 6) S. Katsura, T. Horiguchi and M. Suzuki, Physica 46 (1970), 67.
- 7) J. Bonner and M. E. Fisher, Linear Mag. Chains with Anisotropic Coupling: P. R. 135 (1964), A640.

- 8) M. E. Fisher, Amer. J. Phys. **32** (1964), 343.
- 9) J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. **C6** (1973), 1181.
- 10) J. M. Kosterlitz, J. Phys. **C7** (1974), 1046.
- 11) M. T. Hutchings, G. Shirane, R. J. Birgeneau and S. L. Holt, P. R. **5** (1972), 1999.
- 12) R. J. Birgeneau and G. Shirane, Magnetism in 1D: Phys. Today (1978), Dec.
- 13) K. Tomita and H. Mashiyama, Prog. Theor. Phys. **48** (1972), 1133.
- 14) See, M. Steiner, J. Villain and C. G. Windsor, Theor. and Exp. Studies on 1D Mag. Sys. Adv. Phys. **25** (1967), 87–209.
- 15) H. Mori and K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. **27** (1962), 529.
- 16) F. Carboni and P. M. Richards, P. R. **177** (1969), 889.
- 17) See for instance, C. Kittel, Quantum Theory of Solids, Wiley, 1963.
- 18) K. Hirakawa and Y. Kurogi, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. **46** (1970), 147.
- 19) T. O. Klaassen, L. S. J. M. Henkens and N. J. Poulis, Proc. Int. Conf. Mag. (1976), Amsterdam, p. 634.
- 20) T. Oguchi, Critical Behavior of the Spin System with Anisotropic Exchange I: J. Phys. Soc. Japan **30** (1971), 988.
- 21) 小口武彦, 磁性体の統計理論
- 22) S. W. 全般については F. Keffer, in *Handbuch der Physik*, ed. by Flügge, Springer-Verlag, Berlin (1966), p. 135.
- 23) H. Yoshizawa, K. Kozukue and K. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980), 42.
- 24) H. Yoshizawa, Thesis (1981).
- 25) J. des Cloizeaux and J. J. Pearson, P. R. **128** (1962), 2131.
- 26) Y. Endoh, G. Shirane, R. J. Birgeneau, P. M. Richards and S. L. Holt, Phys. Rev. Lett. **32** (1974), 170.
- 27) D. C. Mattis, The Theory of Magnetism (Harper & Bow, N.Y.) chap. 3.
- 28) T. Yamada, Fermi-Liq. Theory of 1D AF Chain: Prog. Theor. Phys. **41** (1969), 880.
- 29) 例えば C. Kittel, Quantum Theory of Solid, p. 84.
- 30) I. U. Heilmann, G. Shirane, Y. Endo, R. J. Birgeneau and S. L. Holt, Phys. Rev. **B18** (1978), 3530.
- 31) S. K. Satija, J. D. Axe, G. Shirane, H. Yoshizawa and K. Hirakawa, S. W. in KCuF_3 : P. R. **B21** (1980), 2001.
- 32) M. Suzuki and R. Kubo, Dynamics of 1D, Ising Model: J. Phys. Soc. Japan **24** (1968), 51.

- 33) J. Villain, Propagative Domain Walls in 1D, Ising-like System: *Physica* **79B** (1975), 1.
- 34) J. K. Kjems and J. Als-Nielsen, S. W. in $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{D}_2\text{O}$: P. R. B12 (1975), 5190.
- 35) H. Yoshizawa and K. Hirakawa, Neut. Scatt. of CsCoCl_3 . I, II: *J. Phys. Soc. Jpn* **46** (1979), 448, 455.
- 36) F. Wegner, *Z. Physik* **206** (1967), 465.
- 37) J. Villain, *J. de Phys.* **35** (1974), 27.
- 38) J. W. Bray, et al., *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975), 744; *Sol. State Comm.* **19** (1976), 377; *J. Mag. Magn. Mater.* **15** (1980), 332.
- 39) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **34A** (1971), 94.
- 40) H. A. Algra, Thesis (1977).
H. A. Algra et al., *Physica* **82B** (1976), 239; *Proc. Int. Conf. Mag.*
- 40') J. des Cloizeau and M. Gaudin, *J. Math. Phys.* **7** (1966), 1384.
- 41) I. Syozi, *Phase Trans. and Crit. Phenomena 1*, Domb, Green, ed. (1972), p. 270.
- 42) H. Yahata and M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn* **27** (1969), 1421.
- 43) H. Ikeda and K. Hirakawa, 2D Ising Nature of K_2CoF_4 : *Solid State Comm.* **14** (1974), 529.
- 44) H. Ikeda and M. T. Hutchings, S. W. in Rb_2CoF_4 : *J. Phys.* **C11** (1978), L529.
- 45) H. Ikeda and G. Shirane, Inelast. Scatt. of Neutrons from $\text{Rb}_2\text{Co}_c\text{Mg}_{1-c}\text{F}_4$: *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** (1979), 30.
- 46) R. A. Cowley, R. J. Birgeneau, G. Shirane, H. J. Guggenheim and H. Ikeda, P. R. B21 (1980), 4038.
- 47) N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966), 1133.
- 48) H. E. Stanley and T. A. Kaplan, High Temp. Expansion: P. R. Letters **17** (1966), 913.
- 49) K. Yamaji and J. Kondo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **35** (1973), 25.
- 50) M. A. Moore, *Phys. Rev. Letters* **23** (1969), 861.
- 51) D. D. Betts, C. J. Elliott and R. V. Ditzian, *Can. J. Phys.* **49** (1971), 1327.
- 52) T. Oguchi, *Phys. Rev.* **133** (1964), A1098.
- 53) J. Als-Nielsen, R. J. Birgeneau, H. J. Guggenheim and G. Shirane, *J. Phys. C* (1976), L121. P. R. B12 (1975), 4963.
- 54) R. J. Birgeneau, H. F. Guggenheim and G. Shirane, P. R. **1** (1970), 2211.
- 55) G. Shirane and R. J. Birgeneau, *Proc. Int. Conf. Magnetism* (1976), p. 639.
- 56) V. L. Berezinski, *Sov. Phys. JETP* **32** (1971), 493.
- 57) V. L. Verezinski, *Sov. Phys. JETP* **34** (1972), 610.

- 58) J. V. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick and D. R. Nelson, P. R. **B16** (1977), 1217.
- 59) S. Hikami and T. Tsuneto, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 387.
- 60) C. Kawatata and K. Binder, Sol. State Comm. **22** (1977), 705.
- 61) M. Suzuki, S. Miyashita and A. Kuroda, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1377.
- 62) S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1669.
- 63) S. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 797. (Field effect)
- 64) J. Tobochnik and G. V. Chester, P. R. **B20** (1979), 3761. (Vortex pair dissociation)
- 65) M. A. Klenin, P. R. **B19** (1979), 4733.
- 66) Yu. S. Karimov and Yu. N. Novikov, JETP Lett. **19** (1974), 159. NiCl_2 インターカレーションこれに関連して, Yu. S. Karimov, JETP **38** (1974), 129; **39** (1974), 547; **41** (1976), 772.
- 67) K. Hirakawa and H. Yoshizawa, K_2CuF_4 : J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1979), 368,
K. Hirakawa, G. Shirane and J. D. Axe, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981).
- 68) K. Hirakawa, K. Itai and K. Ubukoshi, Tech. Rep. ISSP. No. 1107.
K. Hirakawa and K. Ubukoshi, J. Phys. Soc. Jpn. to be published.
- 69) 鈴木増雄, 固体物理 **14** (1979), 679; Phase Trans. of 2D XY Model: Proc. Kyoto Summer School (1979), 39.
- 70) 恒藤敏彦, 日本物理学会誌 **35** (1980), 500.
- 71) J. Zittartz, Z. Phys. **B23** (1976), 55, 63.
- 72) T. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. **16** (1956), 569.
- 73) S. Miyashita, Thesis (1981).
- 74) F. Moussa and J. Villain, S. W. Line Shape in 2D K_2CuF_4 , Neutron Exp. and Theory: J. Phys. **C9** (1976), 4433. この中には可成り一般論として 2DH+XY の dynamics が論じられている。
- 75) 小口武彦, 二次元強磁性体: 固体物理 **4** (1969), 679.
- 76) M. E. Lines, 2D 系 Green fun. Decoup. による理論 P. R. **3** (1971), 1749.
- 77) H. J. Mikeska, On the Theory of Quasi 2D H Ferromagnet: Z. Physik **261** (1973), 437.
- 78) A. Luther and D. J. Scalapino, Crit. Prop. of 2D Planar Model: P. R. **B16** (1977), 1153.
- 79) D. R. Nelson and D. S. Fisher, Dynamics of Classical XY Spins in 1D & 2D: P. R. **B** (1977), 4945.
- 80) R. Savit, Vortices and the Low Temp. Structure of the XY Model: P. R. **B17** (1978), 1340.

- 81) D. L. Huber, Dynamics of Vortices in 2D, Planar Magnets: Phys. Lett. **76A** (1980), 406.
- 82) M. V. Feigelman, Dipole Forces and Phase Trans. in a 2D Ferro. Mag: J.E.T.P. **76** (1979), 784.
- 83) K. A. Penson, R. Jullian and P. Pfeuty, Zero Temp. Renorm. Gr. Method for Quantum System $S=1/2$, XY Model in a Transverse Field in 2D & 3D: P.R. **B22** (1980), 380.
実験の方は低次元磁性体リストの文献参照のこと。Review 的なものとしては
- 89) L. J. de Jong and A. R. Miedeme, Experiments on Simple Magnetic Model Systems: Adv. in Phys. **23** (1974), 1. に沢山のデータが集録されている。但し疑わしいデータも随分沢山入っている。これ以後の重要な発展に関しては、55) 参照
- 90) M. Steiner, Neutron Scatt. in Low-Dim. Systems: J. Mag. Mag. Mater. **14** (1979), 142–151.
- 91) K. Hirakawa, G. Shirane, J. D. Axe, to be published.
- 92) 戸田盛和編, 計算機実験: 新編物理学選集 54, 日本物理学会 (1973), 解説をみよ。
- 93) I. U. Heilmann, J. K. Kjems, Y. Endo, G. F. Reiter, G. Shirane and R. J. Birgeneau, to be published.
この理論として
- 94) K. Osano and H. Shiba, ISSP. Tech. Rep. No. 1109.
- 95) H. J. Mikeska, J. Phys. **C13** (1980), 2913.
- 96) K. Maki, to be published in J. Phys. C.
- 97) J. K. Kjems and M. Steiner, Phys. Rev. Letters **41** (1978), 1137.
- 98) J. P. Boucher, L. P. Regnault, J. Rossat-Mignod, J. P. Renard, J. Bouillot and W. G. Stirling, Solid State Comm. **33** (1980), 171; Ann. Conf. m.m. Mater, Dallas (1980).
J. P. Boucher and J. P. Renard, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 486.
- 99) H. Yoshizawa, K. Hirakawa, S. K. Statija and G. Shirane, to be published in P. R. B.
- 100) J. M. Loveluck, T. Schneider, E. Stoll and H. R. Jauslin, Soliton Features in Easy Plane Ferromagnet? P. R. Letters **45** (1980), 1505.
- 101) G. Reiter, Have Solitons Been Observed in CsNiF_3 ? Conf. Mag. Mag. Mater. Dallas (1980).
- 102) H. J. Mikeska, 上記 95) 及び Ann. Conf. Mag. Mag. Mater. Dallas (1980).
- 103) 吉沢英樹, 平川金四郎, 固体物理 **14** (1979), 47.
- 104) 吉沢英樹, 斯波弘行, 平川金四郎, 1次元磁性体に於けるソリトン: 日本物理学会誌発表予定
- 105) K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), 2029.

- 106) K. Kakurai, J. K. Kjems and M. Steiner, *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter System*, Ed. by Riste, Plenum Press (1979), p. 91.
- 107) N. Ishimura and H. Shiba, *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980), 743.
- 108) 小林, 斯波編, 固体中のソリトン: 物理学会論文選集昭 56 参照 —— 尚低次元磁性体一覧表が近く “固体物理” に掲載される予定。