

# Gross-Deligne CM 周期予想の $l$ 進類似と $p$ 進類似

大坪 紀之 (千葉大学)

Noriyuki Otsubo (Chiba University)

## 1 導入

本稿ではアーベル型の CM モチーフに関する Bruno Kahn 氏との現在進行中の共同研究について, Gross-Deligne の周期予想とその  $l$  進類似および  $p$  進類似を中心に解説する.

まず, 虚数乗法 (complex multiplication, 以下 CM) を持つ楕円曲線の周期に関する **Lerch-Chowla-Selberg** 公式を紹介しよう.  $E$  を  $\overline{\mathbb{Q}}$  上の楕円曲線で虚 2 次体  $K$  に CM を持つものとする.  $K$  の判別式を  $-m$  とする時,  $K \subset \mathbb{Q}(\mu_m)$  である.  $\chi: (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \rightarrow \{\pm 1\}$  を  $K$  に対応する Dirichlet 指標とする. この時, 任意の非自明な代数的微分 1 形式  $\omega \in H^0(E, \Omega_{E/k}^1)$  と任意の非自明な位相的 1 サイクル類  $\gamma \in H_1^B(E, \mathbb{Q})$  に対して,

$$\int_{\gamma} \omega = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \prod_{s \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*} \Gamma\left(\frac{s}{m}\right)^{\frac{w}{4h} \chi(s)}$$

が  $\mathbb{C}^*/\overline{\mathbb{Q}}^*$  において成り立つ. ここで,  $w$  は  $K$  に含まれる 1 のべき根の数,  $h$  は  $K$  の類数である. つまり, CM 楕円曲線の周期はガンマ関数の有理数における特殊値の有理数べきの積で表される.

**Gross-Deligne の CM 周期予想** [9] とは, 上の予想を一般のアーベル体 ( $\mathbb{Q}$  上のアーベル拡大) に CM を持つ一般のモチーフに拡張するものである. ガンマ値のどのようなべき積になるかは, モチーフの Hodge 構造から定まる CM 型によって与えられる. 詳しい主張は第 3 節で述べる.

なお, アーベル体とは限らない代数体  $K$  に CM を持つモチーフに対して Gross-Deligne 予想を一般化する予想が, Colmez (1993) と吉田 (1999) によって定式化されている. そこでは, ガンマ関数の特殊値は  $K$  の Artin  $L$  関数の特殊値で置き換えられる.

Gross-Deligne 予想は以下の場合に証明されている (著者が知る限りこれらが全てである):

- アーベル多様体に付随するモチーフたちで生成されるモチーフをアーベル型のモチーフと呼ぶ. アーベル型のモチーフに対しては, Deligne-Anderson [1] によって予想が示されている.
- 非特異射影多様体  $X$ ,  $X$  の自己同形  $g$  で位数が  $m$  のものに対して, モチーフ

$$h^i(X, g) := \det(\mathbb{Q}(\mu_m) \otimes_{\mathbb{Q}[g]} h^i(X))$$

- を考える. Maillot-Roessler [11] によって,  $\dim X = i = 2$  かつ  $m$  が素数の場合に予想が示されている. Fresán [8] によって, 交代積  $\bigotimes_i h^i(X, g)^{\otimes (-1)^i}$  に対して予想が示されている.
- 朝倉-大坪 [3], [4] によって, 超幾何ファイブレーションという構造を持つ多様体に付随するモチーフの場合に予想が示されている. Legendre 楕円曲線族の一般化  $y^m = x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^c$  はその例である.

最後の結果は, レギュレーターに関する研究の過程で示されたものである. モチーフの  $L$  関数の整数点における特殊値に関しては, Birch-Swinnerton-Dyer 予想以来さまざまな予想がある. 臨界点における特殊値は周期を用いて, 非臨界点における特殊値はレギュレーターを用いて (有理数倍を除いて) 記述されるというのが, それぞれ Deligne, Beilinson の予想である. 超幾何ファイブレーションの周期は Gauss 超幾何関数  ${}_2F_1(x)$  の  $x = 1$  における値を用いて書け, それは Euler-Gauss の和公式

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

によりガンマ関数の値の積になる. 一方, 超幾何ファイブレーションのレギュレーターは超幾何関数  ${}_3F_2(x)$  の  $x = 1$  における値を用いて書ける. このような現象は Riemann  $\zeta$  関数や Dirichlet  $L$  関数の特殊値の超幾何表示

$$\begin{aligned} \zeta(n) &= {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} 1, 1, \dots, 1 \\ 2, \dots, 2 \end{matrix}; 1\right), \\ L(\chi, n) &= m^{-n} \sum_{a=1}^m \chi(a) {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} 1, \frac{a}{m}, \dots, \frac{a}{m} \\ \frac{a}{m} + 1, \dots, \frac{a}{m} + 1 \end{matrix}; 1\right) \end{aligned}$$

( $\chi$  は  $m$  を法とする Dirichlet 指標) との比較からも興味深い.

## 2 CM モチーフ

以下では  $k, K$  をともに代数体とし, 埋め込み  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$  を 1 つ固定して  $k$  は  $\mathbb{C}$  の部分体と見なす.  $V(k)$  で  $k$  上の非特異射影多様体の圏を表す. 多様体  $X \in V(k)$  に対して,

$H_{\mathrm{dR}}^*(X)$  を  $X/k$  の代数的 de Rham コホモロジー,  $H_B^*(X)$  を  $X(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{Q}$  係数 Betti コホモロジー,  $H_{\mathrm{ét}}^*(X)$ ,  $H_l^*(X)$  ( $l$  は素数) を  $X \otimes_k \bar{k}$  のそれぞれ  $\mathbb{A}^f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$  係数,  $\mathbb{Q}_l$  係数のエタールコホモロジー, とする.

$\mathcal{M}$  で Deligne [6] が定義した  $k$  上の絶対 Hodge サイクル  $C_{\mathrm{AH}}^*$  に関するモチーフの圏を表す. 反変関手  $h: V(k) \rightarrow \mathcal{M}$  が存在し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(h(X), h(Y)) = C_{\mathrm{AH}}^d(X \times Y) \subset H_{\mathrm{dR}}^{2d}(X \times Y)(d) \times H_{\mathrm{ét}}^{2d}(X \times Y)(d),$$

ここで  $d = \dim X$ ,  $(d)$  は Tate ひねりである. 組  $(t_{\mathrm{dR}}, t_{\mathrm{ét}}) \in H_{\mathrm{dR}}^{2i}(X)(i) \times H_{\mathrm{ét}}^{2i}(X)(i)$  が絶対 **Hodge** とは, 任意の埋め込み  $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$  に対して,  $t_{\mathrm{dR}}$  と  $t_{\mathrm{ét}}$  が Grothendieck-de Rham 比較同形 ( $\mathrm{dR} \leftrightarrow B$ ) および Artin 比較同形 ( $B \leftrightarrow \mathrm{ét}$ ) の下で対応し, かつ  $t_{\mathrm{dR}}$  の  $H_B^{2i}(X, \mathbb{C})$  への像が Hodge である (Hodge 型が  $(i, i)$  かつ  $H_B^{2i}(X, \mathbb{Q})$  の元), というものである. 上記の各実現 (コホモロジー) 関手は  $\mathcal{M}$  に延長される:  $M \mapsto M_{\mathrm{dR}}, M_B, M_{\mathrm{ét}}, M_l$  と表す.  $\mathcal{M}$  は  $\mathbb{Q}$  線形なアーベルテンソル圏であり, Betti 実現関手により半単純な淡中圏になる.

代数的サイクル (のコホモロジー類) は絶対 Hodge サイクルであり, 絶対 Hodge サイクルは Hodge サイクルである. Hodge 予想を認めればこれら 3 つは一致するが,  $\mathcal{M}$  はアприオリには代数的サイクルに関する Grothendieck モチーフの圏よりも多くの射を持つ. 例えば, Künneth 分解

$$h(X) = \bigoplus_i h^i(X), \quad h^i(X)_? = H_{\mathrm{ét}}^i(X) \quad (? \in \{\mathrm{dR}, B, \mathrm{ét}, l\})$$

が  $\mathcal{M}$  においては存在する. Deligne [6] は Hodge サイクルは絶対 Hodge サイクルだろうという予想 (espoir) を提出し, アーベル多様体に対してはそれが正しいということを証明した [7].

代数体  $K$  に CM を持つ  $k$  上のモチーフ (以下, **CM モチーフ**) の圏  $\mathcal{M}_K$  は, 圏  $\mathcal{M}$  の  $\mathbb{Q}$  から  $K$  へのスカラー拡大として定義される. この圏の対象は組

$$N = (M, m), \quad M \in \mathcal{M}, \quad m: K \rightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(M) \text{ (環準同形)}$$

である. CM モチーフ  $N \in \mathcal{M}_K$  に対して, 各実現  $N_{\mathrm{dR}}, N_B, N_{\mathrm{ét}}, N_l$  が定義される. アーベル多様体  $A$  のモチーフ  $h^1(A)$  と, 指標  $\theta: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow K^*$  の Artin モチーフ  $h^0(\theta)$  によって生成される  $\mathcal{M}$  の淡中部分圏を  $\mathcal{M}^{\mathrm{ab}}$  と書き, その対象をアーベル型のモチーフと呼ぶ. アーベル多様体の場合以外にも例えば,  $X$  が曲線, K3 曲面, Fermat 多様体ならば  $h(X) \in \mathcal{M}^{\mathrm{ab}}$  であることが分かっている. 関手  $\mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}; (M, m) \mapsto M$  による  $\mathcal{M}^{\mathrm{ab}}$  の逆像を  $\mathcal{M}_K^{\mathrm{ab}}$  と表し, この対象をアーベル型の CM モチーフと呼ぶ.

CM モチーフ  $N \in \mathcal{M}_K$  が階数  $r$  とは,  $\dim_K N_B = r$  ということである. この時, 行列式  $\det(N) = \bigwedge_K^r N \in \mathcal{M}_K$  は階数 1 である. 階数 1 の CM モチーフ  $N$  に対して, (一般) **CM 型**

$$\tau(N) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_K} := \text{Maps}(\Sigma_K, \mathbb{Z}), \quad \Sigma_K := \{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}\}$$

が次で定義される:  $w$  を  $M_B$  の重さとする時, 各  $\sigma \in \Sigma_K$  に対して  $\mathbb{C} \otimes_{K, \sigma} N_B (\simeq \mathbb{C})$  の Hodge 型は  $(\tau(N)(\sigma), w - \tau(N)(\sigma))$  である. この CM 型が階数 1 の CM モチーフの基本的な不変量である. Deligne の結果 [7] より, 次が示せる.

**定理 2.1.**  $\mathcal{M}_K^{\text{ab}}$  の対象で階数 1 のものの同形類がテンソル積に関してなすアーベル群を  $\text{Pic}(\mathcal{M}_K^{\text{ab}})$  と表す. 体  $k$  が  $K$  に対して十分大きい時, 群準同形  $\tau: \text{Pic}(\mathcal{M}_K^{\text{ab}}) \rightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma_K}$  の核は Artin モチーフによって生成される.

上の  $k$  が十分大きいという条件は,  $K$  に含まれる CM 体 (総実体の総虚 2 次拡大) に CM を持つ任意のアーベル多様体は同種を除いて (CM を込めて)  $k$  上で定義される, ということである. 上記 Deligne の espoir が正しければ, 階数 1 の CM モチーフは全てアーベル型, つまり  $\text{Pic}(\mathcal{M}_K^{\text{ab}}) = \text{Pic}(\mathcal{M}_K)$  となる.

**注 2.2.** 本稿の内容は,  $\mathcal{M}$  を André [2] が定義した動機づけられたモチーフ (motifs motivés) の圏で置き換えても同様に成り立つ.

### 3 周期

モチーフ  $M \in \mathcal{M}$  に対して, Grothendieck-de Rham 比較同形

$$\iota: \mathbb{C} \otimes_k M_{\text{dR}} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} M_B$$

が存在する. 階数 1 の  $N = (M, m) \in \mathcal{M}_K$  に対して,  $\iota$  は階数 1 の自由  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} K$  加群の同形である. よって,  $N$  の周期

$$\text{Per}(N) \in (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} K)^*/(k \otimes_{\mathbb{Q}} K)^*$$

が  $\iota(M_{\text{dR}}) = \text{Per}(N)M_B$  によって定義される. さらに,  $\sigma \in \Sigma_K$  で  $\sigma(K) \subset k$  を満たすものに対して, 周期の  $\sigma$  成分  $\text{Per}(N, \sigma) \in \mathbb{C}^*/k^*$  が  $\text{Per}(N)$  の  $\sigma$  による像として定義される.

$K$  がアーベル体の場合に  $\text{Per}(N)$  を記述するのが Gross-Deligne 予想である. 以下では, 簡単のために  $K = \mathbb{Q}(\mu_m) \subset k$  を仮定する. 標準的な同一視  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \Sigma_K; s \mapsto \sigma_s$  ( $\zeta \in \mu_m$  に対して  $\sigma_s(\zeta) = \zeta^s$ ) を行う.

次数  $m$  の Fermat 曲線

$$C_m : x^m + y^m = 1$$

には群  $\mu_m^2$  が作用し、その指標によって  $\mathcal{M}_K$  におけるモチーフの分解

$$h^1(C_m) \otimes_{\mathbb{Q}} K = \bigoplus_{a,b \in \{1,2,\dots,m-1\}, a+b \neq m} X^{a,b}$$

を得る。さらに  $X^{a,b}$  は階数 1 であり、その CM 型を  $\tau^{a,b} = \tau(X^{a,b})$  と書く。実際、

$$\tau^{a,b}(\sigma_s) = \left\{ -\frac{sa}{m} \right\} + \left\{ -\frac{sb}{m} \right\} - \left\{ -\frac{s(a+b)}{m} \right\}$$

である。ただし、 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  は  $x$  の小数部分を表す。

Iwasawa-Sinnott による Stickelberger 定理により、任意の  $N \in \mathcal{M}_K$  に対して、整数の組  $(n^{a,b})$  が存在し (一意的ではない)、

$$d_m \tau(N) = \sum_{a,b} n^{a,b} \tau^{a,b}$$

が成り立つ。ここで、 $m$  の素因子の数を  $g$  とする時、 $d_m = 2^{\max\{0, g-2\}} h_m^-$ 、ただし  $h_m^-$  は  $\mathbb{Q}(\mu_m)$  の類数のマイナス部分、である。このことと定理 2.1 より次が従う。

**定理 3.1.** 階数 1 の  $N \in \mathcal{M}_K^{\text{ab}}$  に対して、 $n^{a,b}$  を上の通りとする時、ある Artin モチーフ  $h^0(\theta)$  が存在して

$$N^{\otimes d_m} \simeq \bigotimes_{a,b} (X^{a,b})^{\otimes n^{a,b}} \otimes h^0(\theta)$$

が成り立つ。

よく知られているように、Fermat 曲線  $C_m$  の周期はベータ関数で表せる。実際、 $\omega^{a,b} = mx^{a-1}y^{b-m}dx \in H_{\text{dR}}^1(C_m/k)$  とおくと、 $\omega^{a,b} \in (X^{a,b})_{\text{dR}}$  であり、ある一意的な  $\gamma \in H_1^B(C_m, \mathbb{Q})$  に対して

$$\int_{\gamma} \omega^{a,b} = B\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right)$$

となる。ベータ関数の関数等式により、右辺の  $\mathbb{C}^*/\mathbb{Q}^*$  への像は  $a, b \bmod m$  にしかよらないことに注意する。

よって、定理 3.1 と周期の乗法性より次が従う。

系 3.2. 定理 3.1 の仮定と記号の下で, 任意の  $s \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  に対して

$$\mathrm{Per}(N, \sigma_s)^{d_m} = \prod_{a,b} B\left(\left\{\frac{sa}{m}\right\}, \left\{\frac{sb}{m}\right\}\right)^{n^{a,b}} \mathrm{Per}(h^0(\theta), \sigma_s)$$

が  $\mathbb{C}^*/k^*$  において成り立つ. さらに,  $m$  が偶数 (奇数) の時  $m' = m$  ( $m' = 2m$ ) とおくと,  $\mathrm{Per}(h^0(\theta), \sigma)^{m'} = 1$  である.

アーベル型とは限らないモチーフ (第 1 節参照) に対しても同じことが成り立つだろうというのが Gross-Deligne 予想である.

予想 3.3 (Gross-Deligne [9]). 系 3.2 の主張が任意の  $N \in \mathcal{M}_K$  に対して成り立つ.

元の予想は  $\mathbb{C}^*/\overline{\mathbb{Q}}^*$  における等式であり, 上の定式化はその精密化になっている. 関数等式  $B(s, t) = \Gamma(s)\Gamma(t)/\Gamma(s+t)$  を用いて右辺をガンマ関数で書き, Artin モチーフの周期を無視し, 両辺の  $d_m$  乗根を取れば, 元の形になる.

## 4 Hecke 指標

CM モチーフ  $N \in \mathcal{M}_K$  は階数 1 とする. 素数  $l$  に対して,  $l$  進実現  $M_l$  は絶対ガロワ群  $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$  が作用する階数 1 の自由  $\mathbb{Q}_l \otimes K$  加群であり, ガロワ表現

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \rightarrow \mathrm{GL}(M_l)$$

の像は  $(\mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Q}} K)^*$  に含まれる. さらに  $N$  がアーベル型ならば, 表現の系  $(\rho_l)_l$  は強整合的 (strictly compatible) になる. すなわち,  $k$  の有限素点  $v$  で  $N$  が良還元を持つ時, ある  $f_v(N) \in K^*$  が一意的に存在して, 任意の  $l$  ( $v \nmid l$ ) に対して

$$\rho_l(\mathrm{Frob}_v) = 1 \otimes f_v(N)$$

となる. ここで  $\mathrm{Frob}_v$  は  $v$  における Frobenius 元である.

代数体  $F$  に対して, トーラス  $T_F = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$  が定まる: 任意の  $\mathbb{Q}$  代数  $R$  に対して  $T_F(R) = (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^*$ . CM 型  $\tau(N)$  は反射ノルムという準同形

$$\mathrm{RN}(\tau(N)): T_k \rightarrow T_K$$

を定める (ただし,  $k$  は  $\tau(N)$  の反射体を含むように取る必要がある). 系  $(f_v(N))_v$  はある代数的 Hecke 指標  $\chi: \mathbb{A}_k^* \rightarrow K^*$  と対応し,  $\chi$  の代数的部分は反射ノルムである:  $\chi|_{k^*} = \mathrm{RN}(\tau(N))$ .

注 4.1. 任意の  $N = (M, m) \in \mathcal{M}_K$  に対して,  $M_B$  の Mumford-Tate 群が反射ノルムの像  $\mathrm{Im}(\mathrm{RN}(\tau(N)))$  と一致するということが示せる. さらに  $N \in \mathcal{M}_K^{\mathrm{ab}}$  ならば,  $\rho_l$  の像の Zariski 閉包の単位元成分が  $\mathrm{Im}(\mathrm{RN}(\tau(N))) \otimes \mathbb{Q}_l$  となることが示され, Mumford-Tate 予想が従う.

以下,  $K = \mathbb{Q}(\mu_m) \subset k$  を仮定する. Fermat モチーフに対しては, Weil より

$$f_v(X^{a,b}) = j_v^{a,b} = \frac{g_v(a)g_v(b)}{g_v(a+b)}$$

となる. ここで  $j_v^{a,b} \in K^*$  は  $k$  の  $v$  における剰余体  $k(v)$  上の Jacobi 和,  $g_v(a) \in K(\mu_p)^*$  ( $p$  は  $k(v)$  の標数) は Gauss 和であり, 以下で定義される:

$$j_v^{a,b} = - \sum_{x,y \in k(v)^*, x+y=1} \chi_v^a(x) \chi_v^b(y), \quad g_v(a) = - \sum_{x \in k(v)^*} \psi_v(x) \chi_v^a(x).$$

ただし  $\chi_v$  は  $v$  を法とする  $m$  乗剰余指標,  $\psi_v$  は  $k(v)$  の非自明な加法指標である.

よって, 定理 2.1 と  $f_v$  の乗法性より次が従う.

系 4.2. 定理 3.1 の仮定と記号の下で,

$$f_v(N)^{d_m} = \prod_{a,b} (j_v^{a,b})^{n^{a,b}} f_v(h^0(\theta))$$

が  $K^*$  において成り立つ. さらに,  $f_v(h^0(\theta))^{m'} = 1$  ( $m'$  は系 3.2 の通り) である.

次は Gross-Deligne 予想の自然な  $l$  進類似である.

予想 4.3. 系 4.2 の主張が任意の  $N \in \mathcal{M}_K$  に対して成り立つ.

## 5 $p$ 進周期

以下,  $v$  は  $k$  の有限素点で素数  $p$  上にあるもの,  $k_v$  を  $k$  の  $v$  での完備化,  $B_{\mathrm{dR}}$  を  $k_v$  に付随する Fontaine が定義した  $p$  進周期環とする.  $M = h^i(X)$  ( $X \in V(k)$ ) に対して, Falting と辻による  $p$  進 Hodge 理論の比較同形

$$\iota_p: B_{\mathrm{dR}} \otimes_k M_{\mathrm{dR}} \simeq B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_p$$

が存在する. Blasius [5], Ogus [12], Wintenberger らにより, アーベル多様体の絶対 Hodge サイクルは  $\iota_p$  の下でも両立する (つまり, 第 2 章の記号で  $t_{\mathrm{ét}}$  の  $p$  進成分を  $t_p$  と

する時、 $\iota_p(t_{\mathrm{dR}}) = t_p$  である) ので、上の比較同形は任意の  $M \in \mathcal{M}^{\mathrm{ab}}$  に対して存在する。  
したがって、階数 1 の  $N \in \mathcal{M}_K^{\mathrm{ab}}$  に対して、 $p$  進周期

$$\mathrm{Per}_v(N) \in (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} K)^*/(k_v \otimes_{\mathbb{Q}} K)^*$$

が  $\iota_p(k_v \otimes_k M_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{Per}_v(N)M_p$  によって定義される。その  $\sigma$  成分  $\mathrm{Per}_v(N, \sigma) \in B_{\mathrm{dR}}^*/k_v^*$  も第 3 節と同様に定義される。

以下、 $K = \mathbb{Q}(\mu_m) \subset k$  を仮定する。Gross-Deligne 予想の  $p$  進類似を定式化するために、ベータ関数の  $p$  進類似を定義する。 $C_m$  を  $m$  次 Fermat 曲線とし、 $\omega^{a,b}$ ,  $\gamma$  は第 3 節の通り、 $\gamma$  の Aritin 比較同形による  $p$  進エタールホモロジーへの像を  $\gamma_p$  とする。 $B_{\mathrm{dR}}$  に値を取る  $p$  進ベータ関数を

$$\mathcal{B}_p\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \int_{\gamma_p} \omega^{a,b}$$

によって定義する。ここで積分記号は、 $N = X^{a,b}$  の場合に  $\iota_p$  が誘導するペアリングを表すこととする。

**注 5.1.**

- (i)  $\mathcal{B}_p$  は森田  $p$  進ガンマ関数を用いて定義される  $p$  進ベータ関数  $B_p$  とは異なるものである。 $B_p$  は  $\mathbb{Z}_p^*$  値であるが、 $B_{\mathrm{dR}}$  は  $\bar{k}_v$  の完備化を剰余体に持つような大きな体である。 $B_p$  は Gross-Koblitz 公式により Jacobi 和と結びつくものであるから、本稿の文脈では  $l$  進的な対象である。良還元 ( $p \nmid m$ ) の場合には、我々の  $\mathcal{B}_p$  から  $B_p$  を  $\varphi - 1$  ( $\varphi$  はクリスタルフロベニウス) の作用によって得ることができる。
- (ii) 加塩 [10] も  $\mathcal{B}_p$  と同様の  $p$  進ベータ関数を定義しているが、我々のものとは正規化が異なっている。

定理 2.1 と  $\mathrm{Per}_v$  の乗法性より次が従う。

**系 5.2.** 定理 3.1 の仮定と記号の下で、任意の  $s \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  に対して

$$\mathrm{Per}_v(N, \sigma_s)^{d_m} = \prod_{a,b} \mathcal{B}_p\left(\left\{\frac{sa}{m}\right\}, \left\{\frac{sb}{m}\right\}\right)^{n^{a,b}} \mathrm{Per}_v(h^0(\theta), \sigma_s)$$

が  $B_{\mathrm{dR}}^*/k^*$  において成り立つ。さらに、 $\mathrm{Per}_v(h^0(\theta))^{m'} = 1$  ( $m'$  は系 3.2 の通り) である。

次は Gross-Deligne 予想の自然な  $p$  進類似である。

**予想 5.3.** 系 5.2 の主張が任意の  $N \in \mathcal{M}_K$  に対して成り立つ。

## 6 問い

最後に、非常に漠然とした問いを二つ述べたい。

CM モチーフの複素周期  $\text{Per}(N)$  は Deligne 予想により、 $L$  関数の臨界整数点における特殊値を表すという数論的に重要な不変量であった。それでは、 $p$  進周期  $\text{Per}_v(N)$  はどのような数論的な重要性を持つのだろうか？ 何らかの新しい  $p$  進  $L$  関数と関係があるのだろうか？

$L$  関数の特殊値に関する Deligne 予想が Beilinson 予想に一般化されたように、CM モチーフの周期（複素および  $p$  進）に関する Gross-Deligne 予想を、レギュレーターを記述する予想に一般化できないだろうか？ そこでガンマ・ベータ関数の特殊値の役割を果たすのは何だろう。超幾何関数  ${}_{n+1}F_n(x)$  またはその一般化の特殊値だろうか？

## 謝辞

講演後に有益なコメントを下さった伊藤和広氏と越川皓永氏、および本原稿を読んで有益なコメントを下さった Bruno Kahn 氏に感謝する。本研究は日本学術振興会科学研究費 18K03234 の助成を受けている。

## 参考文献

- [1] G. W. Anderson, Logarithmic derivatives of Dirichlet  $L$ -functions and the periods of Abelian varieties, *Compositio Math.* **45**, Fasc. 3 (1982), 315–332.
- [2] Y. André, Pour une théorie inconditionnelle des motifs, *Publ. Math. IHÉS* **83** (1996), 5–49.
- [3] M. Asakura and N. Otsubo, CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, I, *Canad. J. Math.*, **70** (2018), 481–514.
- [4] M. Asakura and N. Otsubo, CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, II, *Math. Z.*, **289** (2018), 1325–1355.
- [5] D. Blasius, A  $p$ -adic property of Hodge classes on abelian varieties, in: *Motives*, Part 2, U. Jannsen, S. Kleiman, and J-P. Serre, eds., *Proc. of Symp. in Pure Math.*, Vol. 55, American Mathematical Society, 1994, 293–308.
- [6] P. Deligne, Valeurs de fonctions  $L$  et périodes d'intégrales, in: *Automorphic*

- forms, representations and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1979), Part 2, 313–346.
- [7] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K. Shih, Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, LNM **900**, Springer-Verlag, 1982.
  - [8] J. Fresán, Periods of Hodge structures and special values of the gamma function, Invent. Math. **208** (2017), 247–282.
  - [9] B. H. Gross (with an appendix by D. E. Rohrlich), On the periods of Abelian integrals and a formula of Chowla–Selberg, Invent. Math. **45** (1978), 193–211.
  - [10] T. Kashio, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, J. reine angew. Math. **741** (2018), 255–273.
  - [11] V. Maillot and D. Roessler, On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross–Deligne, Ann. Math. **160** (2004), 727–754.
  - [12] A. Ogus, A  $p$ -adic analogue of the Chowla–Selberg formula, in: *p-adic analysis, Proceedings, Trento, 1989*, F. Baldassari, S. Bosch and B. Dwork, eds., Lecture Notes in Mathematics **1454**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 319–341.