

70+.3r の法則 Rule of 70+.3r

山口大学 伊藤 暁
Akira Ito, Yamaguchi University

1. あらまし

表題の法則とは、複利貯金の元金が 2 倍になるまでの期間 y とその利率 $r\% \triangleq 100\alpha$ に関する近似式 $ry \triangleq 72$, いわゆる“72 の法則” [1, 2] を若干修正したものである:

$$(1 + \alpha)^y = 2 \iff \alpha y \triangleq .7 + .3\alpha$$

α が与えられたときの y の近似値, y が与えられたときの α の近似値をそれぞれ $\tilde{y}$, $\tilde{\alpha}$ とすると, 上記の近似関係は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)} \iff \tilde{y} = .7/\alpha + .3 \\ \alpha &= 2^{1/y} - 1 \iff \tilde{\alpha} = .7/(y - .3) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

図 1 に提案公式による近似の相対誤差 $\frac{\tilde{y}-y}{y} \triangleq \delta_{\tilde{y}}$, $\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha} \triangleq \delta_{\tilde{\alpha}}$ (実線) ならびに 72 公式: $= .72$ (細い実線), 3%毎の調整を加えた式: $= .693 + \alpha/3$ (太い点線), E-M 公式: $= .693/(1 - \alpha/2)$ (太い破線), 3 次のパデ近似: $= .693(6 + 4\alpha)/(6 + \alpha)$ (太い実線) の相対誤差を示す [2].

図から分かるように, 既存の近似公式の相対誤差は定義域 ($0 \leq \alpha \leq 1$, $y \geq 1$) のいずれかで $\pm 1\%$ を超えるのに対し, 本公式は全域で $\pm 1\%$ 内に抑えられている ($\lim_{y \rightarrow \infty} \delta_{\tilde{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_{\tilde{y}}$). この誤差保障により, 任意の対数関数・指数関数 [3] が数回の四則演算で精度良く求められる.

2. 適用例

例 2.1 増加率が年 1.33% のとき, 現在の人口が 2 倍になるまでの年数 y : $(1 + .0133)^y = 2 \iff \tilde{y} = .7/.0133 + .3 = 52.9315$ [= 52.4621...]. 以下, 鉤括弧内 [] の数値は真値.

例 2.2 (対数定数) (i) $a = \log_2 3 \iff 3 = 2^a \iff 3/2 = 2^{a-1} \iff (1 + 1/2)^{1/(a-1)} = 2 \iff \widetilde{(a-1)^{-1}} = .7/(1/2) + .3 = 1.7 \iff \tilde{a} = (1.7)^{-1} + 1 = 1.588235$ [= 1.584962...]. (ii) $a = \log_2 5 \iff 5 = 2^a \iff 5/4 = 2^{a-2} \iff (1 + 1/4)^{1/(a-2)} = 2 \iff \widetilde{(a-2)^{-1}} = .7/(1/4) + .3 = 3.1 \iff \tilde{a} = (3.1)^{-1} + 2 = 2.32258$ [= 2.321928...]. (iii) $a = \log_2 10 = \log_2 5 + 1$. (iv) $\phi \triangleq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [= 1.618033...] とおくと, $a = \log_2 \phi \iff 2^a = \phi \iff \phi^{1/a} = (1 + (\phi - 1))^{1/a} = 2 \iff 1/a = .7/(\phi - 1) + .3 = 1.4326256 \iff \tilde{a} = 0.698019$ [= 0.694241...].

例 2.3 (金融) (i) 年利 11.5% の複利貯金が 3 倍になるまでの年数 y : $(1 + 0.115)^y = 3 = 2^{\log_2 3} \iff (1.115)^{y/\log_2 3} = 2 \iff \widetilde{y/\log_2 3} = .7/.115 + .3 = 6.387 \iff \tilde{y} = 1.585 \times 6.387 = 10.123$ [= 10.09249...] (ii) 「トサン」で借りた 1 円の 10 年後の金額 10^b : $10^b = (1 + 0.3)^{365/10} \iff (1.3)^{365} = 2^{b \log_2 10} \iff (1.3)^{365/(b \log_2 10)} = 2 \iff \widetilde{365/(b \log_2 10)} = .7/.3 + .3 = 2.6333 \iff \tilde{b} = 365/(2.6333 \times \log_2 10) = 138.609/\log_2 10 = 41.72557$ [= 41.58932...].

例 2.4 (物理) (i) 絶対温度 T の理想気体を倍の体積に断熱可逆膨張したときの温度 T' : $T'/T = (\frac{1}{2})^{0.7} \Leftrightarrow a \triangleq T/T' = 2^{0.7} \Leftrightarrow a^{1/0.7} = (1 + (a-1))^{1/0.7} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{a-1} = .7/(.7^{-1} - .3) = 0.620253 \Leftrightarrow T' = T/1.620253 = 0.617187 \times T [= 0.6155722 \cdots \times T]$. (ii) 半減期 45 億年のウラン 238 が 1 年間に減少する率 α : $(1-\alpha)^{4500000000} = 2^{-1} \Leftrightarrow (1-\alpha)^{-1 \times 4500000000} = 2 \Leftrightarrow (1 + \frac{\alpha}{1-\alpha})^{4500000000} = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} \triangleq \tilde{\alpha} = .7/(.45 \times 10^{10} - .3) = 1.5556 \times 10^{-10} [= 1.540328 \cdots \times 10^{-10} \because 2^x = 1 + x \ln 2 + O(x^2)]$.

ちなみに, Google 検索の電卓機能で $2^{(1/4500000000)}$ を求めると 1 が返る (単精度では不十分ということ)。

例 2.5 (数値計算) (i) $x \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x^x \triangleq (1 + \alpha)^{(1+\alpha)} = 2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1) = .7 + .3\tilde{\alpha} \Leftrightarrow \tilde{\alpha}^2 + .7\tilde{\alpha} - .7 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} = (-.7 + \sqrt{.7^2 + 4 \times .7})/2 = 0.556917 \Leftrightarrow \tilde{x} = 1.556917 [= 1.55961 \cdots \because \text{ニュートン法による}]$. (ii) $a = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = (1 + (a-1))^2 = 2 \Leftrightarrow \widetilde{a-1} = .7/(2 - .3) = .7/1.7 = 0.41176 \Leftrightarrow \tilde{a} = 1.41176 [= 1.414213 \cdots]$.

上記の近似 $1 + 7/17$ は連分数近似 $1 + 70/169 [= 1.414201 \cdots]$ に似ている。

例 2.6 (ネイピア数) (i) $\alpha y = \alpha \frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)} = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2}\alpha + O(\alpha^2)$ ならびに $\alpha \tilde{y} = .7 + .3\alpha$ より, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{y}{\tilde{y}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{\alpha \tilde{y}} = \frac{\ln 2}{0.7}$. 従って, $\delta \triangleq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}-y}{\tilde{y}} = 1 - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{y}{\tilde{y}} \triangleq 0.01$ とおくと, $\ln 2 = (1 - \delta) \times 0.7 \triangleq 0.7 - 0.007 = 0.6930 [= 0.6931471 \cdots]$. (ii) $e = 2^{\log_2 e} = 2^{1/\ln 2} \Leftrightarrow e/2 = 2^{1/\ln 2 - 1} \Leftrightarrow (1 + (e/2 - 1))^{(1/\ln 2 - 1)^{-1}} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{e/2 - 1} = .7/((1/\ln 2 - 1)^{-1} - .3) = 0.357345 \Leftrightarrow \tilde{e} = 2.71469 [= 2.718281 \cdots]$.

注意 2.1 (i) α, y の値が定義域外の場合には $\pm 1\%$ の誤差限界が保障されない: $\ln 2 < 1$ であるから, 上記の例で “ $(1 + (e-1))^{\ln 2} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{e-1} = .7/(\ln 2 - .3) = 1.781170$ ” とは変形すべきでない. (ii) 自乗演算によって誤差が拡大してしまう変形: $\sqrt{e} = 2^{1/(2 \ln 2)} \Leftrightarrow (1 + (\sqrt{e} - 1))^{2 \ln 2} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{\sqrt{e} - 1} = .7/(2 \ln 2 - .3) = 0.644392 \Leftrightarrow \tilde{e} = (1.644392)^2 = 2.7040$.

3. 三角関数への拡張

指数関数近似式を複素関数化 (ならびに定数 $\ln 2$ を 0.7 で置換) することにより, 正弦関数の近似式 $\sin(\beta) = \frac{(.7)^2 \beta}{(.7)^2 + (.3\beta)^2}$ が得られる. 精度は $0 \leq \beta \leq 1$ の範囲で $\pm 0.5\%$ である. 余弦関数については倍角公式 $\cos(\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$ を用いることで, $0 \leq \beta \leq 1$ の範囲で精度 $+0.5\%$ が保たれる. 上記以外の範囲では, 余角関係 $\sin(\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$ を用いて互いに還元 [4] すれば良い. 正弦近似式の逆関数は逆正弦の近似式 $\arcsin(s) = \frac{(7 - \sqrt{7^2 - 4 \times 3^2 s^2}) \times 7}{2 \times 3^2 s}$ になり, その精度は $0 < s \leq 0.8355 < \sin(1) [= 0.8414 \cdots]$ の範囲で $\pm 0.5\%$ である. 特に, $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi/4$ より, $\pi = 3.15076 [= 3.14159 \cdots]$ を得る.

文献

- [1] ベントリー, 珠玉のプログラミング, ピアソン・エデュケーション (2006).
- [2] anonymous contributors, Rule of 72, http://en.wikipedia/wiki/Rule_of_72 (Oct. 2007).
- [3] 森敦, 指数・対数のはなし, 東京図書 (2007).
- [4] 一松信, 初等関数の数値計算, 教育出版 (1974).

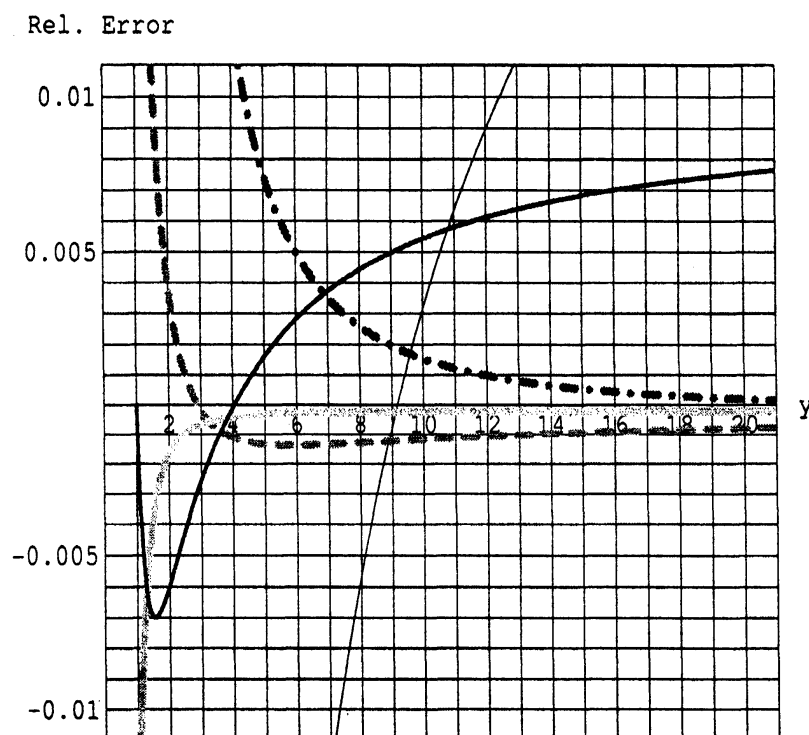
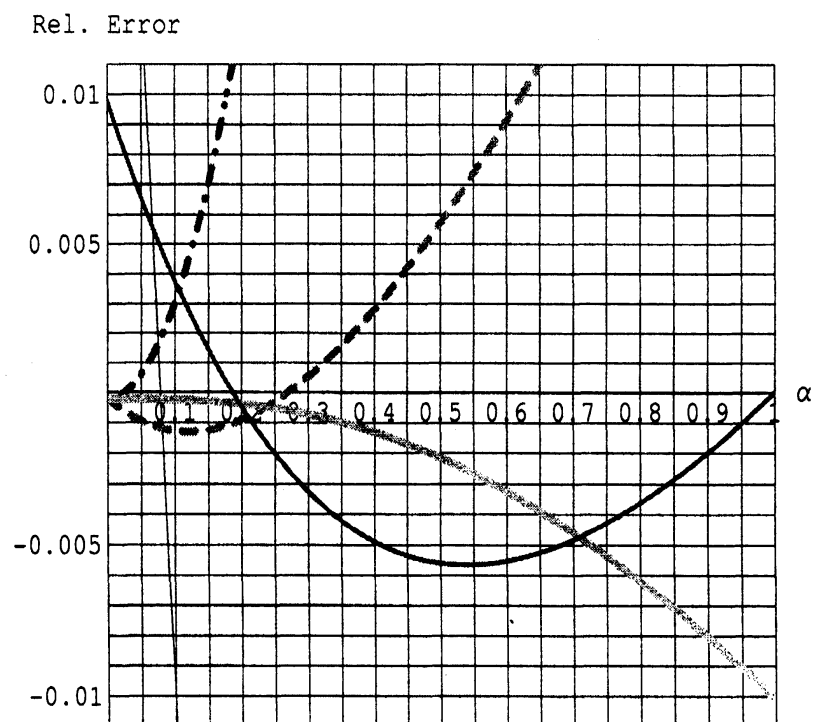


図 1. 近似値 $\hat{y}$ ならびに $\hat{\alpha}$ の相対誤差.