

不安定プラズマの輸送方程式(続)

Part VI 安定化の過程について

西 川 恭 治 (東大教養)

§ 1 序

このシリーズはPart V まで出す予定にしていたが、Part Vがなかなかまとまらない内に、Part IVまでの所でいろいろ不十分な点が見つかったので、ここに新たにPart VIをつけ加えて先に出す事にした。

ここでは、不安定系が安定化して行く過程を取り扱う方法について、特に2つの問題について考察する。

1つはPines-Schrieffer 方程式についてである。Part III⁽¹⁾で我々は、Rutherford-Frieman の方法を修正発展させて、成長率 $r(k)$ の変化が無視できる範囲でのkinetic equation を導き、その方程式が、適当に定義された $E(k, t)$ との連立方程式の形に書くと、Pines-Schrieffer 方程式と同型になる事を示した。しかし、ここで定義された $E(k, t)$ は初期時刻における二体相関に依存しており、その意味においてこの連立方程式は、その解とは全く独立にきめられるべき初期条件を附加されているのである*)。その結果、この方程式の通用期間は、与えられた初期時刻から始めて

$$\omega_p^{-1} \ll t \ll |r(k) / \frac{dr(k)}{dt}| \quad (1)$$

という時間内に制限されている。ここで、lower limit は微視的衝突過程から区別されるための条件で、upper limit は $r(k)$ の変化が無視できるための条件である。この制限のため、Part IIIで導いたkinetic equation では、安定化の過程を調べることはできなかつた。そこで、§ 2 では、 $E(k, t)$

*) 我々はPart IIIで $E(k, t=0)$ が、実際にプラズマのエネルギーになっている事を示したが、この事は、ここにのべている点に何の変更を与えるものではない。

の定義から初期値に対する依存性を取り除く事を試みる。これによつて、 $f(\underline{v}t)$ と $E(\underline{k}t)$ の連立方程式はそれ自身でclose したものになり、その通用期間も、任意の時刻から始めて(1)の条件をみたす時間に拡張される。従つて又、連立方程式を適当な初期条件でとく事によつて、長い時間にわたる安定化の過程を調べることも可能となる。

この論文で扱う第2の問題は、Part IV⁽²⁾で導いた Non-Markoffian effect をとり入れた方程式についてである。我々は § 3 で、この方程式では安定化のメカニズムが現われないことを示し、この方程式を改良する方法について述べる。

§ 2 Pines-Schrieffer 方程式との対応について

Part III で導いた方程式は次の形をしている。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\underline{v}t) = \frac{e^2}{4\pi m} \int d\underline{k} \frac{\underline{k}}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \delta[\omega(\underline{k}) - \underline{k} \cdot \underline{v}] \{ \omega(\underline{k}) f(\underline{v}) + \frac{E(\underline{k}t)}{m} \underline{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} f(\underline{v}) \} \quad (2)$$

$$E(\underline{k}t) = \frac{16\pi^4 n^2 e^2}{k^2} \omega^2(\underline{k}) \left\{ \frac{e^{2r(\underline{k})t} - 1}{8\pi^2 n r(\underline{k})} \int d\underline{v}' f(\underline{v}') \delta[\omega(\underline{k}) - \underline{k} \cdot \underline{v}'] + e^{2r(\underline{k})t} \tilde{g}(\underline{k}0) \right\} \quad (3)$$

ここに

$$\tilde{g}(\underline{k}0) = \int_{c_-} d\underline{v}_1 \int_{c_+} d\underline{v}_2 \frac{g(\underline{k} \underline{v}_1 \underline{v}_2 0)}{[p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1][p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2]} \quad (4)$$

で、他の notation は Part III と同じである。我々の目的は、(3)で定義された $E(\underline{k}t)$ が

$$E(\underline{k}t) = \frac{16\pi^4 n^2 e^2}{k^2} \omega^2(\underline{k}) \tilde{g}(\underline{k}t) \quad (5)$$

と書かれることを示し、それによつて、 $E(\underline{k}t)$ の定義式から初期値 $\tilde{g}(\underline{k}0)$ に対する依存性をとりのぞく事である。

まず Part III (3)式を使つて整理すると

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\underline{k} t) = & \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_C dp e^{pt} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{dp_1 dp_2}{p - p_1 - p_2} \int_{c_-} dv_1 \int_{c_+} dv_2 \frac{F(\underline{k} \underline{v}_1 \underline{v}_2 p)}{[p_1 + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1][p_2 - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2]} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1} - \frac{1}{\epsilon(\underline{k} p_1)} \int_{c_-} dv'_1 \frac{ne a(\underline{k} \underline{v}'_1)}{(p_1 + i\underline{k} \cdot \underline{v}'_1)(p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}'_1)} \right\} (6) \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2} - \frac{1}{\epsilon(-\underline{k} p_2)} \int_{c_+} dv'_2 \frac{ne a(-\underline{k} \underline{v}'_2)}{(p_2 - i\underline{k} \cdot \underline{v}'_2)(p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}'_2)} \right\} \end{aligned}$$

をうる。ここで次の恒等式

$$\int_{c_-} dv_1 \frac{ne a(\underline{k} \underline{v}_1)}{(p_1 + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1)(p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1)} = \frac{\epsilon(\underline{k}, p_1)}{p(\underline{k}) - p_1} \quad (7)$$

$$\int_{c_+} dv_2 \frac{ne a(\underline{k} \underline{v}_2)}{(p_2 - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2)(p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2)} = \frac{\epsilon(-\underline{k} p_2)}{p(-\underline{k}) - p_2}$$

を使うと

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\underline{k} t) = & \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_C dp e^{pt} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{dp_1 dp_2}{p - p_1 - p_2} \int_{c_-} dv_1 \int_{c_+} dv_2 \frac{F(\underline{k} \underline{v}_1 \underline{v}_2 p)}{(p_1 + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1)(p_2 - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2)} \\ & \left\{ \frac{1}{p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1} - \frac{1}{p(\underline{k}) - p_1} \right\} \left\{ \frac{1}{p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2} - \frac{1}{p(-\underline{k}) - p_2} \right\} (8) \end{aligned}$$

をうる。ここに積分路 c_1, c_2 は $p_1 = p(\underline{k}), p_2 = p(-\underline{k})$ の poles の左側を通る。

さて、(8)式で $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ についての積分を p_1, p_2 の関数として考えると、これは p_1, p_2 両半面の右半分で解析的である。そこで積分路 c_1, c_2 を右半平面に閉じると、その中に現われる poles は $p_1 = p(\underline{k})$ の pair のみである。

その結果は次のように書かれる。

$$\tilde{g}(\underline{k} t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp e^{pt} \frac{e^{pt}}{p - 2r(\underline{k})} \int_{c_-} dv_1 \int_{c_+} dv_2 \frac{F(\underline{k} \underline{v}_1 \underline{v}_2 p)}{(p(\underline{k}) + i\underline{k} \cdot \underline{v}_1)(p(-\underline{k}) - i\underline{k} \cdot \underline{v}_2)} \quad (9)$$

これを更に p について積分すると、 $p = 0$ 及び $p = 2r(\underline{k})$ の poles の寄与が現われ、Part III (26)式を使つてまとめると次のようになる。

$$\tilde{g}(\underline{k} t) = -\frac{e^{2r(\underline{k})t} - 1}{2r(\underline{k})} \frac{1}{8\pi^3 n} \left[\int_{c_+} \frac{d\underline{v}_1}{i\underline{k} \cdot \underline{v}_1 - p(-\underline{k})} - \int_{c_-} \frac{d\underline{v}_1}{i\underline{k} \cdot \underline{v}_1 + p(\underline{k})} \right] f(\underline{v}_1) \quad (10)$$

$$+ e^{2r(k)t} \tilde{g}(k, 0)$$

これに Part III (31) の近似式を代入し、その結果を(3)と比較すると、直ちに(5)式が示される。

かくして我々は $E(k, t)$ の定義から初期値依存を取り除く事に成功した。この $E(k, t)$ が次の方程式

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = 2r(k) E(k, t) + \frac{4\pi^2 n e^2}{k^2} \omega^2(k) \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}) \delta[\omega(k) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] \quad (11)$$

をみたす事は Part III に示した通りである。(2)と(11)は Pines-Schrieffer 方程式と完全に同型であり、それ自身で close したものである。

(2)及び(11)を使つて安定化の過程を調べるには次のようにすればよい。まず考える時間間隔 τ を、(1)の条件をみたすような短い時間間隔に分割し、その各時間間隔毎に(11)をといてその解を次の時間間隔における初期値に使う。

このような考え方で安定化の過程を解析する試みはすでになされているので、⁽³⁾ここではこれ以上のべない事にする。

最後に以上の議論は(1)の条件をみたす時間間隔が存在するという仮定に基いている事を注意しよう。実際には、 $r(k)$ が充分小さくなるとこの条件はみたされない。例えば、

$$\frac{dr(k)}{dt} \sim - \frac{r(k) - r_{eq}(k)}{\tau_1} \quad (10)$$

とおいてみると、 $|r_{eq}(k)|$ は通常 ω_p の order であるから

$$|r(k) / \frac{dr(k)}{dt}| \sim \tau_1 \frac{|r(k)|}{\omega_p} \quad (11)$$

となり、(1)の条件は $|r(k)| \sim 1/\tau_1$ となるとみたされない。このような場合には次に述べる Non-Markoffian effect を厳密に取り扱った方法が必要になる。

§ 3 Non-Markoffian effect の取り扱いについて

我々は Part IV で Balescu の方法を発展させて、Non-Markoffian

西川恭治

effect をとり入れた方程式の導出を試みた。その結果は、(3)式第一項で

$$\frac{e^{2r(\underline{k})t} - 1}{2r(\underline{k})} \rightarrow \int_0^t d\tau e^{2r(\underline{k};\tau)(t-\tau)}$$

とおきかえたものになった*。ところが、これでは $E(\underline{k}t)$ は、仮に $r(\underline{k}t)$ が負になつても依然として成長し続ける。そればかりでなく、初期値の寄与は $r(\underline{k}t)$ ($t \neq 0$) の値と無関係に成長しつづける。従つて、Part IV で導いた方程式では安定化のメカニズムは出て来ない。

我々は、これは Part IV における diagram のとり方が不充分であつたためと考える。安定化のメカニズムを解析するには、いはゆる ring 近似の範囲内では不可能で、いわば higher ring approximation とも云うべきものまで拡張しなければならないと思われる。ここで取り上げる diagrams は、図に示すようなものである。この diagram まで取り入れるならば、相互作用の

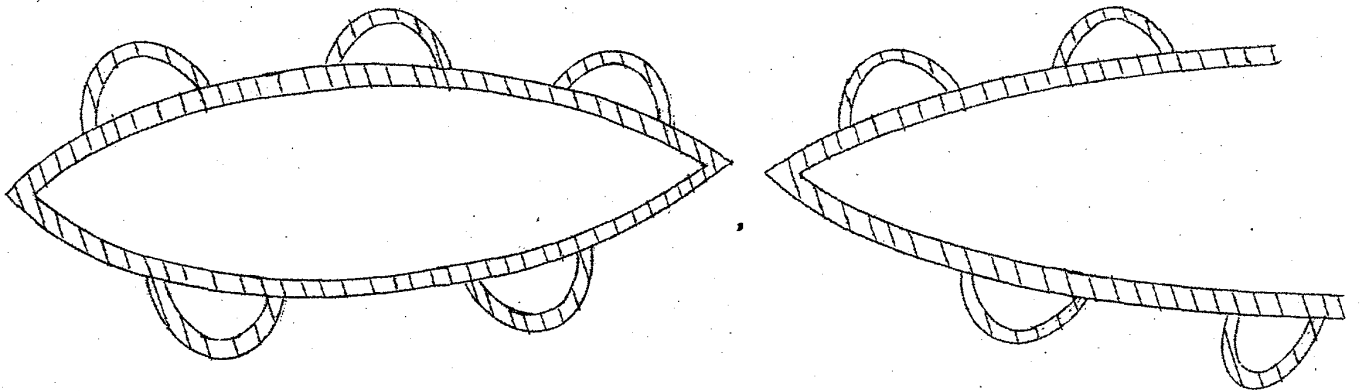


Fig. Higher ring 近似に於ける典型的な diagrams

みならず、propagator もくりこまれ、それによつて $r(\underline{k}t)$ の時間依存性があらたに方程式の中に入つてくると思われる。この問題の解析は目下検討中である。

*) Part IV では求めなかつたが、初期値の寄与は(3)の第2項と全く同じになる。但し $r(\underline{k})$ は $t=0$ に於る値である。

文 献

- 1) 西川, 大阪 : 物性研究 2 (1964) 133
 - 2) 西川 : 物性研究 2 (1964) 148
 - 3) S. Ichimaru : University of Illinois, Air Force Cambridge Research Laboratories Scientific Report No.2, Contract AF 19 (604) -7473 (1962)
- Y. Ichikawa, K. Yamada and M. Watabe, Prog. Theor. Phys. (Letters) 31 (1964) 153.