

Mean values of the Riemann zeta function on arithmetic progressions

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 小林 弘京

Hiroataka Kobayashi

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 序

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ について, その平均値

$$I_k(T) = \int_2^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^k dt$$

の漸近式ないしは upper bound 及び lower bound を求めるという研究がある. 特に, $k = 2$ の場合には次の事実が知られている.

$$I_2(T) = T \log T + (2\gamma - 1 - \log 2\pi)T + E(T)$$

ここで, $E(T)$ は誤差項であって,

$$E(T) \ll T^{1515/4816+\varepsilon}$$

なる評価が現在最良の評価として知られている ([1]). この $E(T)$ は

$$E(T) \ll T^{1/4+\varepsilon}$$

だと予想されている. さらにこの $E(T)$ の平均値も計算されており, 例えば

$$\int_2^T E(t)^2 dt = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} T^{3/2} + F(T)$$

という漸近式が知られている. ここで, $F(T)$ はやはり誤差項であり,

$$F(T) \ll T \log^3 T \log \log T$$

が知られている ([11]).

さて, Dirichlet の約数問題というものがある. $d(n)$ を n の約数の個数としたとき, その平均値

$$\sum'_{n \leq x} d(n)$$

を計算する. ここで, $\sum'_{n \leq x}$ は x が整数の時に和の最終項を半分することを示している. この平均値についても漸近式が知られていて,

$$\sum'_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \frac{1}{4} + \Delta(x)$$

が成立する. ここで, 誤差項 $\Delta(x)$ については

$$\Delta(x) \ll x^{131/416+\varepsilon}$$

が成立する ([4]). この $\Delta(x)$ についても $E(T)$ と同様に

$$\Delta(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$$

と予想されている. さらにこれも $E(T)$ と同様に $\Delta(x)$ の平均値も計算されており,

$$\int_2^X \Delta(x)^2 dx = \frac{1}{6\pi^2} \frac{\zeta^4(3/2)}{\zeta(3)} X^{3/2} + \delta(X)$$

などが知られている. ここで, $\delta(X)$ は

$$\delta(X) \ll X \log^3 X \log \log X$$

を満たす ([11]).

平均値や誤差項の平均値及びその誤差項の評価を眺めてみると類似が見てとれる. 実際, これらは類似性に基づき, しばしば並列して研究が進められてきた. なお, 本稿では扱わないが, Gauss の円問題との類似性も知られている.

ここで, $\zeta(s)^2$ の近似関数等式

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^s} + \chi(s)^2 \sum_{n \leq y} \frac{d(n)}{n^{1-s}} + R(s; x, y)$$

を考える. 実は, この誤差項 $R(s; x, y)$ と $\Delta(x)$ との間にも関係があり, 実際,

$$\chi(1-s)R(s) = -\sqrt{2} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-1/2} \Delta \left(\frac{t}{2\pi} \right) + O \left(t^{-1/4} \right)$$

が成り立つ ([13],[14],[5]). ここで, $\chi(s)$ は $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ を満たす複素関数である. なお, $R(s) = R(s; t/2\pi, t/2\pi)$ である. このことから $\Delta(x)$ の平均値と $R(s)$ との平均値にも類似性が期待でき,

$$\int_2^T \left| R \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt = \sqrt{2\pi} C_0 T^{1/2} + K(T)$$

が成り立つ. ここで

$$C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)^2 h(n)^2}{n^{1/2}}, \quad h(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(y + \pi/4)}{(y + n\pi)^{1/2}} dy$$

であり, 誤差項 $K(T)$ の最良の評価は現在

$$K(T) \ll \log^4 T$$

である ([7]).

以上のように, 誤差項 $E(T)$, $\Delta(x)$, $R(s)$ の積分による平均値が計算されており, その類似性が指摘されている ([8]). さらに $E(T)$, $\Delta(x)$ については離散平均が考えられている. $\Delta(x)$ の場合は

$$\sum_{n \leq x} \Delta(n) = \frac{1}{2}x \log x + \left(\gamma - \frac{1}{4}\right)x + O(x^{3/4})$$

や

$$\sum_{n \leq x} \Delta(n)^2 = \int_1^x \Delta(u)^2 du + \frac{1}{6}x \log^2 x + c_1 x \log x + c_2 x + O(x^{3/4} \log x)$$

が成立する ([3],[15]). これに対し, $E(T)$ の場合はというと

$$\sum_{n \leq x} E(n) = \pi x + O\left(x \log x \exp\left(-C \frac{\log \log x}{\log \log \log x}\right)\right)$$

や

$$\sum_{n \leq x} E(n)^2 = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} x^{3/2} + O\left(x^{5/4} \log^2 x\right)$$

が成立する ([2]). ここで, $C > 0$ はある定数である. 読者諸賢はいよいよ, ちょっと待て, と思われることだろう. そう, main term (らしきもの) πx より誤差項の方が大きいのである. この誤差項は

$$\sum_{1 \leq k < (1/2\pi) \log(T/\pi)} \frac{e^{\pi k}}{k} \sum_{m \leq T e^{-2\pi k}} d(m) e(e^{2\pi k} m) \ll T \log T \exp\left(-C \frac{\log \log T}{\log \log \log T}\right)$$

なる評価から導かれる. ここで, $e(x) = \exp(2\pi i x)$ である. 彼らはこの評価は条件付きで改良可能であると主張している (というより予想を述べている).

では $R(s)$ の離散平均はどうなるだろうか, 実は現在のところ $R(s)$ の離散平均は計算されていない. では計算しようというのが筆者の今回の研究の出発点であった. しかしながらその計算は頓挫する.

2 転

ここでは詳細は述べないが, 近似関数等式の誤差項 $R(s)$ の離散平均の計算はうまくいかなかった. しかしこの問題に関連して筆者にはもう一つ案があった. それこそが本講演で扱った Riemann ゼータ関数の離散二乗平均である. ではどのように話がつながるのか. 近似関数等式を再掲しよう.

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^s} + \chi(s)^2 \sum_{n \leq y} \frac{d(n)}{n^{1-s}} + R(s; x, y).$$

ここで $x = y = t/2\pi$ とし, 両辺に $\chi(1-s)$ をかけると,

$$\zeta(s)\zeta(1-s) = \chi(1-s) \sum_{n \leq t/2\pi} \frac{d(n)}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq t/2\pi} \frac{d(n)}{n^{1-s}} + \chi(1-s)R(s)$$

を得る. ここで, $s = 1/2 + i(an+b)$ とすると,

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(an+b)\right) \right|^2 = 2 \operatorname{Re} \chi\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) \sum_{m \leq (an+b)/2\pi} \frac{d(m)}{m^{1/2+i(an+b)}} \\ + \chi\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) R\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right)$$

を得る. ここで, $\Delta(t) \ll t^{1/3+\varepsilon}$ が成立するから,

$$\chi\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) R\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) = O\left((an+b)^{-1/6+\varepsilon}\right)$$

である. 従って, 本当は漸近式が知りたかった離散平均

$$\sum_{an+b \leq T} \chi\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) R\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right)$$

はとりあえず $\ll a^{-1}T^{5/6}$ と評価できる. 後は,

$$\sum_{an+b \leq T} \chi\left(\frac{1}{2} - i(an+b)\right) \sum_{m \leq (an+b)/2\pi} \frac{d(m)}{m^{1/2+i(an+b)}}$$

が計算できれば, Riemann ゼータ関数の離散二乗平均

$$\sum_{an+b \leq T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i(an+b)\right) \right|^2$$

の漸近式を得ることができるという寸法である.

概ねこの計算はそれ程難しくない指数和, 及び指数積分の応用で遂行可能だが一か所,

$$\sum_{1 \leq k < (a/2\pi) \log(T/\pi)} e^{\pi k/a} \sum_{m < T e^{-2\pi k/a}} d(m) e(-e^{2\pi k/a} m)$$

なる和を評価せねばならない部分が難所である. さてこの和, 先の $E(T)$ の離散平均で出てきた和とそっくりである. 実は $a = 1$ の場合, この和についても Bugeaud - Ivić の結果から直ちに同じ upper bound

$$\ll T \log T \exp\left(-C \frac{\log \log T}{\log \log \log T}\right)$$

を得ることができる. めでたしめでたし. 筆者はこの和に直面した時, Bugeaud - Ivić の論文の事などすっかり忘れてどうにか計算できないかと思案していた. しかし, 2022 年の 10 月頃であったか, 奥飛騨の温泉地にて静養していた際に突然, 彼らが同じような和を計算していたような気がすると思ひ出したのである. そしてあくる日, 彼らの結果から上記の評価を得ることができると確信した.

当時, 筆者は $|\zeta(1/2 + in)|^2$ の平均という最も基本的な形の等差数列にわたる離散平均しか考えていなかった. そのため, $a = 1$ の場合で十分だったのであり, 筆者はすぐさまその論文を書いた ([9]). この離散平均は

$$\sum_{n \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + in \right) \right|^2 = T \log T + O \left(T \log T \exp \left(-C \frac{\log \log T}{\log \log \log T} \right) \right) \quad (1)$$

となって $E(n)$ の場合と異なり, 誤差項が main term より小さくなる.

これで安心していやあ, 今年も何とか論文を書くことができた, よかったよかった, などと暢気な気分でした. 2022 年度は 2 月に開催予定の第 16 回ゼータ若手研究集会の代表を務めていたこともあり, 一種の焦りもあった. ところが, そのゼータ若手研究集会のためにいらっしゃった Yoonbok Lee 氏に最近の研究について尋ねられ, このプレプリントを見せたところ, この誤差項は改善できるんじゃないか, そのくらいやらなくてはだめだとの言葉を頂戴したのである. そのご指摘はもっともな指摘であった. Riemann ゼータ関数の等差数列にわたる離散平均の研究は多くはなかったがいくつか存在していた. 特に二乗平均については Li - Radziwiłł [12] によって,

$$\sum_n \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + in \right) \right|^2 \cdot \phi \left(\frac{n}{T} \right) = \int_{\mathbb{R}} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \cdot \phi \left(\frac{t}{T} \right) dt + O_A(T(\log T)^{-A})$$

という結果が得られていたのである. ここで, ϕ は閉区間 $[1, 2]$ 上で support された滑らかな関数であり, A は任意の正の実数である. つまりこのくらいまでは誤差を改善せよとのことである. さらに, Li - Radziwiłł は

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(an + b) \right) \right|^2 \cdot \phi \left(\frac{n}{T} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(at + b) \right) \right|^2 \cdot \phi \left(\frac{t}{T} \right) dt (1 + \delta(a, b) + o_{a,b,\phi}(1)), \end{aligned}$$

という, より一般の等差数列 $an + b$ にわたる離散平均についても結果を得ている. ここで $\delta(a, b)$ は

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 0 & e^{2\pi k/a} \text{ が全ての整数 } k > 0 \text{ に対して無理数の時} \\ \frac{2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s)) - 2}{rs + 1 - 2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s))} & e^{2\pi k/a} \text{ がある整数 } k > 0 \text{ に対して有理数の時,} \end{cases}$$

である. そう言われたらやる他ない. どうせならより一般の離散平均も計算してやれと思った. かくして筆者は誤差項の改善, 及びより一般の離散平均の計算を成し遂げるべく挑戦を新たにしたのである. さて計算すべきは和 (1) である. この和, 特に内側の和をどう計算すべきか, 指数関数の中に指数関数がありちょっといやである. Bugeaud - Ivić は $e^{\pi k}$ の連分数近似などを持ち出して計算を工夫していた. しかしそれでは Li - Radziwiłł の誤差項には到底及ばない. Li - Radziwiłł の論文を眺めながら格闘しひと月ほど経過した頃である. セっかくなのでここに記録するが, あれは我が指導教官松本先生の最終講義の日の朝であった. もっと一般化して, Dirichlet の近似定理を用いては

どうか, と思いついた. すなわち, 一般の実数 α について

$$\sum_{m \leq x} d(m) e(\alpha m)$$

という和を計算するのである. この和は hyperbola method により, 指数和

$$\sum_{m \leq X} e(\alpha m)$$

に帰着される. そしてこのような指数和については, Dirichlet の近似定理を介して得ることができ, upper bound が知られており, 例えば circle method における基本的な事実となっている. 結局, $e^{\pi k/a}$ が全ての整数 $k > 0$ に対して無理数である時, 筆者は次のような評価を得ることができた.

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k < (a/2\pi) \log(T/\pi)} e^{\pi k/a} \sum_{m < T e^{-2\pi k/a}} d(m) e(-e^{2\pi k/a} m) \\ &= \begin{cases} o_a(T \log T) & a \text{ が整数でない時,} \\ O_A(T(\log T)^{-A}) & a \text{ が整数の時.} \end{cases} \end{aligned}$$

実は, Li - Radziwiłł の論文をよく読むと, 彼らも Dirichlet の近似定理を使っている. 従って, 彼らの議論は上記の評価を得るのに大いに役立ったことを述べておく. なお, $a = 1$ の場合を考えると, Bugeaud - Ivić の評価を改善したことになる. 従って, あの main term らしきもの πx は実際に main term であることが示された.

結果として, 以上のことから次の定理を得た ([10]).

定理 1 実数 a を, 全ての整数 $k > 0$ に対して $e^{2\pi k/a}$ が無理数であるようなものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{an+b \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(an+b) \right) \right|^2 = \frac{T}{a} \log T + o_a(T \log T).$$

さらに, a が正の整数であって, $a = o((\log \log T)^\varepsilon)$ を満たすとき, 任意に固定された $A > 0$ に対し, 次が成り立つ.

$$\sum_{an+b \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(an+b) \right) \right|^2 = \frac{T}{a} (\log T + 2\gamma - 1 - \log 2\pi) + O_A(a^{-1} T (\log T)^{-A}).$$

また, $e^{\pi k/a}$ がある整数 $k > 0$ に対して有理数 r/s となる時 (即ち, $a = 2\pi k_0 / \log(r/s)$ の時), 次の定理を得た.

定理 2 整数 r, s は互いに素であって, $r > 2s$ を満たすとする. また, 実数 a がある整数 $k_0 > 0$ に対して

$$e^{2\pi k_0/a} = \frac{r}{s}$$

となんとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{an+b \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(an+b) \right) \right|^2 \\ &= \frac{T}{a} \log T \left(1 + \frac{2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s)) - 2}{rs + 1 - 2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s))} + o_{a,b}(1) \right). \end{aligned}$$

さらに, $k_0 = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{an+b \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i(an+b) \right) \right|^2 \\ &= \frac{T}{a} (\log T + 2\gamma - 1 - \log 2\pi) \left(1 + \frac{2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s)) - 2}{rs + 1 - 2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s))} \right) \\ & \quad - \frac{2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s)) - 2}{rs + 1 - 2\sqrt{rs} \cos(b \log(r/s))} \frac{\sqrt{rs} \log(rs)}{\sqrt{rs} - 1} \frac{T}{a} + o_b(T). \end{aligned}$$

3 結

前節までで, 筆者が如何にして Riemann ゼータ関数の離散平均を考えるに至り, 結果を得たのかという顛末を語った. 離散平均を考えることの数学的意義, ないしは歴史的経緯及び証明の詳細は [10] に譲ることとする. 今後の方向性としては,

1. 誤差項の改良
2. 四乗平均の計算

などといった研究が (安直だが) 考えられる. Bugeaud - Ivić による予想, 及び $\chi(1/2 - it)R(1/2 + it)$ の積分による平均値の結果 ([6]) から, 少なくとも $a = 1$ のときの誤差は $O(T^{1/2} \log^A T)$ 程度になることが予想できる.

積分による四乗平均

$$\int_2^t \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^4 dt$$

は漸近式が知られている. では, 離散平均は? と思うわけである. それ自体にどれだけの意味があるかは何とも言えないが, まあ Lindelöf 予想とは関係があるであろう. Li - Radziwiłł のように weight をかけたものを考えるとまた更に色々とわかるかもしれない. 実際, 彼らは同じ論文で, $\zeta(1/2 + i(an+b))$ が $\neq 0$ になる割合だとか, $|\zeta(1/2 + i(an+b))|$ の下からの評価だとかを計算している.

謝辞

本稿は 2023 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」での講演を基に執筆したものです. 講演の機会をくださりました世話人の安福悠先生, 中筋麻貴先生に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] J. Bourgain and N. Watt, ‘Decoupling for perturbed cones and the mean square of $|\zeta(1/2 + it)|$ ’ *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2018), no. 17, 5219–5296.
- [2] Y. Bugeaud and A. Ivić, ‘Sums of the error term function in the mean square for $\zeta(s)$ ’, *Monatsh. Math.* 155 (2008), no. 2, 107–118.
- [3] J. Furuya, ‘On the average orders of the error term in the Dirichlet divisor problem’, *J. Number Theory* 115 (2005), 1–26
- [4] M. N. Huxley, ‘Exponential sums and lattice points. III’, *Proc. London Math. Soc. (3)* 87 (2003), no. 3, 591–609.
- [5] M. Jutila, ‘On the approximate functional equation for $\zeta^2(s)$ and other Dirichlet series’, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 37 (1986), no. 146 193–209.
- [6] I. Kiuchi, ‘On the mean-square for the approximate functional equation of the Riemann zeta-function’, *Tokyo J. Math.* 16, (1993), no. 2, 399–409.
- [7] I. Kiuchi, ‘The mean value formula for the approximate functional equation of $\zeta^2(s)$ in the critical strip II’, *Arch. Math.* 67 (1996), 126–133.
- [8] I. Kiuchi and K. Matsumoto, ‘The resemblance of the behaviour of the remainder terms $E_\sigma(t)$, $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ and $R(\sigma + it)$ ’, in *Sieve Methods, Exponential Sums, and their Applications in Number Theory*, G. R. H. Greaves et al. (eds.), Cambridge Univ. Press, (1997), pp. 255–273.
- [9] H. Kobayashi, ‘A mean-square value of the Riemann zeta function over an arithmetic progression’, arXiv preprint (2022), [arXiv:2212.06520](#).
- [10] H. Kobayashi, ‘Mean-square values of the Riemann zeta function on arithmetic progressions’, arXiv preprint (2024), [arXiv:2401.01892](#).
- [11] Y. K. Lau and K. M. Tsang, ‘On the mean square formula of the error term in the Dirichlet divisor problem’, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 146 (2009), no. 2 277–287.
- [12] X. Li and M. Radziwiłł, ‘The Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions’, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015), no. 2, 325–354.
- [13] Y. Motohashi, ‘A note on the approximate functional equation for $\zeta^2(s)$ ’, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 59 (1983), no. 8, 393–396.
- [14] Y. Motohashi, ‘Lectures on the Riemann-Siegel formula’, Ulam Seminar, Colorado University 1987.
- [15] G. F. Voronoï, ‘Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries’, *Ann. École Normale* 21 (1904), no. 3, 207–267, 459–533.