

Sheaf-Theoretical Representation of Concrete Domains¹

倉田俊彦 (Toshihiko Kurata)

法政大学経営学部

東京都千代田区富士見 2-17-1

kurata@hosei.ac.jp

概要

具象領域と呼ばれる特殊な領域構造のクラスとある種の位相空間の上に定義される層のクラスの間に双方向の対応関係を導入することを試みる. こうした変換を通して, 具象領域の定義として要請されている幾つかの技巧的な条件は, 層の断面構造を表現するための要請であることが観察できる.

1. 具象領域

具象領域 (concrete domain) は, 高階の計算体系における逐次評価の意味論を構築するための枠組みとして考案された順序構造である. その詳細は [3, 4, 5] などを確認できるので, 以下では, 今回の考察の中で必要とされる最低限の定義と性質を纏めておく.

具象領域の定義の一つとして, 具象データ構造と呼ばれる基礎的な構造 $\mathcal{M} = \langle C, V, E, \vdash \rangle$ を利用する方法がある. ここで, C と V は可算集合であり, C の要素は cell と呼ばれ, V の要素は value と呼ばれる. E は $C \times V$ の部分集合であり, その要素は event と呼ばれる. 以下の議論では, event e に対して, $c(e)$ でその第一成分の cell を表すこととする. $\vdash \in \mathcal{F}E \times C$ は event の有限集合² からアクセス可能な cell を規定する 2 項関係であり, enabling relation と呼ばれる. そして, 具象データ構造においては, これらの要素について常に以下の 2 つの性質が要求される.

$$(1) \forall c \in C \exists v \in V (c, v) \in E$$

$$(2) < \text{ は well-founded である}$$

但し, $<$ は

$$(1) \exists A \in \mathcal{F}E \exists v \in V ((c_1, v) \in A \ \& \ A \vdash c_2) \implies c_1 < c_2$$

¹本研究は科研費基盤研究 (C)(24500025) の助成を受けたものである.

² E の有限部分集合の集合を $\mathcal{F}E$ と表記する.

$$(2) \ c_1 < c_2 \ \& \ c_2 < c_3 \implies c_1 < c_3$$

を満たす C 上の最小の2項関係とする. また, $c_1 < c_2$ または $c_1 = c_2$ が成り立つ時に $c_1 \leq c_2$ として, C 上の半順序 $\leq$ を定義する.

具象データ構造 $\mathcal{M} = \langle C, V, E, \vdash \rangle$ に対して,

$$(1) \ (c, v_1), (c, v_2) \in x \implies v_1 = v_2$$

$$(2) \ (c, v) \in x \implies \exists A \in \mathcal{F}x \ A \vdash c$$

を満たすような event の集合 $x \in \mathcal{P}E$ は state と呼ばれ, state の集合は $D_{\mathcal{M}}$ と表記される. そして, 特に, $A \vdash c$ となる $A \in \mathcal{F}x$ が存在するような (つまり, c が x からアクセス可能であるような) 任意の $x \in D_{\mathcal{M}}$ と $c \in C$ に対して, この有限集合 A が一意に定まるような特殊な構造は決定性具象データ構造と呼ばれる. 以下では, 通常の考察と同様に, 決定性具象データ構造のみに限定して全ての議論を行う.

具象領域の例として, 型無ラムダ計算における Böhm-like 木の概念 [2, Definition10.1.9] を捉えることができる. 実際に, Böhm-like 木の node の集合 N^* を C に, label の集合

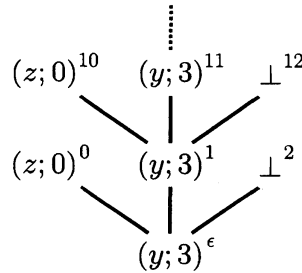
$$\{(\lambda x_1 \cdots x_l.x; m) \mid l, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\perp\}^3$$

を V に採用して, $E = C \times V$ とする. enabling relation について, root に相当する cell $\epsilon \in N^*$ に対しては, $\emptyset \vdash \epsilon$ のみが成立するとする. そして, その他の cell $n_1 n_2 \cdots n_{i+1} \in N^*$ に対しては,

$$A = \{(n_1 \cdots n_j, (\lambda x_{l_1} \cdots x_{l_j}.x_j; m_j)) \mid j = 0, 1, \dots, i\}$$

の形をした event の有限集合が各 $j = 0, \dots, i$ に対して $n_{j+1} \leq m_j - 1$ を満たしている時に限って, $A \vdash n_1 n_2 \cdots n_{i+1}$ が成り立つと定義する.

このように定義される決定性具象データ構造を $\mathcal{B}$ とすると, $\mathcal{B}$ の上に生成される state は Böhm-like 木と同一視することができる. 例えば, $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ とした時, ラムダ式 $(\lambda x.yz(xx)\Omega)(\lambda x.yz(xx)\Omega)$ の Böhm 木は



³ $\perp$ は不定式を表し, m は頭変数 x の引数の数を表している.

のように label 付けされた無限木⁴となる。この中に現れている label と node の組を集めた集合

$$\{(1^n 0, (z; 0)) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1^n, (y; 3)) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1^n 2, \perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

は state の条件を満たしていて、例えば、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $(1^n 0, (z; 0))$, $(1^n 1, (y; 3))$, $(1^n 2, \perp)$ の各 cell にアクセス可能な有限部分集合は $\{(1^n, (y; 3)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ のみに定まる。

一般に、半順序集合 $\mathcal{D} = \langle D, \sqsubseteq \rangle$ に対して

$$\mathcal{D} \simeq \langle D_{\mathcal{M}}, \sqsubseteq \rangle$$

を満たす決定性具象データ構造 $\mathcal{M}$ が存在する時に、 $\mathcal{D}$ は具象領域と呼ばれる。[4] では、通常の表現定理と同様に、具象領域を特別な条件を満たす領域としての特徴付けを与えている。この結果を述べるために、以下では、半順序集合 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ の要素 $x, y \in D$ について、 $x \sqsubseteq y$ であり、 $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$ の時は $x = z$ または $y = z$ のどちらかが保証される時には $x \prec y$ と表記することにする。また、領域に関する記法については [1] に従い、 KD で D 中のコンパクト元の集合を表し、 KD_x を集合 $(\downarrow x) \cap KD$ の略記とする。また、 $x \uparrow y$ で D 中に $\{x, y\}$ の上界が存在することを表す。更に、 D の区間の集合 $\{(x, y) \in D^2 \mid x \leq y\}$ 上に擬順序 $\leq$ を

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 = y_1 \sqcap x_2 \ \& \ y_2 = y_1 \sqcup x_2$$

のように導入して、この擬順序を含む最小の同値関係を $\sim$ と記述する。

定理 1. coherent⁵ な ω 代数的領域⁶ $\mathcal{D} = \langle D, \sqsubseteq \rangle$ が任意の $a \in KD$ と $x, y, z \in D$ に対して

(性質 I) $\#KD_a < \omega$

(性質 C) $x \uparrow y \ \& \ x \sqcap y \prec x \implies y \prec x \sqcup y$

(性質 Q) $\neg(x \uparrow y) \ \& \ x \sqcap y \prec x \implies \exists! t \in D \ (\neg(x \uparrow t) \ \& \ x \sqcap y \prec t \sqsubseteq y)$

(性質 R) $x \prec y \ \& \ x \prec z \ \& \ (x, y) \sim (x, z) \implies y = z$

を満たしている時、またその時に限り $\mathcal{D}$ は具象領域となる。

この事実は、3 節で層から具象領域への変換を与える際に利用される。

⁴各 label の上付添字に node を記入している。

⁵任意の部分集合 $X \subseteq D$ に対して、 X 中の任意の 2 元 x, y が D 中で $x \uparrow y$ を満たしている時には、 X の上限が存在することを意味する。

⁶コンパクト元の濃度が可算であり、任意の元がコンパクト元の有向集合の上限として記述できる完備半順序集合を意味する。

2. 領域から層へ

この節では、決定性具象データ構造 $\mathcal{M}$ から決定される具象領域 $\langle D_{\mathcal{M}}, \subseteq \rangle$ は、常に、ある種の位相空間上に定義される層構造の表現となっていることを示す。

$\mathcal{M}$ 上の state p が、 $D_{\mathcal{M}}$ 中で上に有界な任意の部分集合 X （この時、必然的に $\bigcup X$ も state となる）に対して、

$$p \subseteq \bigcup X \implies \exists x \in X \ p \subseteq x$$

を満たしていれば、 p は prime であると呼ぶ。また、 $D_{\mathcal{M}}$ 中の全ての prime state 集合を $P_{\mathcal{M}}$ で表す。[3] では、各 $c \in C$ に対して、その proofset と呼ばれる state が

- (1) $\vdash c$ の時、 $\emptyset$ は c の proofset である
- (2) $(c_1, v_1), (c_2, v_2), \dots, (c_n, v_n) \vdash c$ であり、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して x_i が c_i の proofset の時、 $\bigcup_{i=1}^n x_i \in D_{\mathcal{M}}$ であれば $\bigcup_{i=1}^n x_i \cup \{(c_1, v_1), (c_2, v_2), \dots, (c_n, v_n)\}$ は c の proofset である

という条件から再帰的に定義されている。これについて、 p が prime state であることは、 $p = x \cup \{e\}$ となる $e \in E$ と $c(e)$ の proofset x が存在することに他ならない。実際に、 $p \in P_{\mathcal{M}}$ であれば、集合

$$X = \{(x, e) \in D_{\mathcal{M}} \times E \mid x \cup \{e\} \subseteq p \ \& \ x \text{ は } c(e) \text{ の proofset}\}$$

は上界 p を持ち、 $p = \bigcup \{x \cup \{e\} \mid (x, e) \in X\}$ が成り立っている。従って、prime state の定義から $p \subseteq x \cup \{e\}$ を満たす $(x, e) \in X$ が存在し、 $p = x \cup \{e\}$ が成り立つ。逆に、 x を $c(e)$ の proofset として $p = x \cup \{e\}$ と表すことができた時には、 $p \subseteq \bigcup X$ を満たす上に有界な集合 $X \subseteq D_{\mathcal{M}}$ に対して、 $e \in \bigcup X$ であるので、 $e \in y$ を満たす $y \in X$ が存在する。この y に対して $p = x \cup \{e\} \subseteq y$ であることは state と proofset の定義から明らかである。従って、 p は prime となる。

prime state は必然的に有限集合であり、ある特定の cell を埋めるために本質的に必要とされた event のみを集めて構成された state といえる。この prime state の概念を基本的な部品として目的の層構造が得られる。先ず、

$$X_{\mathcal{M}} = \prod_{p \in P_{\mathcal{M}}} c(p)^7$$

として、 $p \in P_{\mathcal{M}}$ に対して $c(p)$ から $X_{\mathcal{M}}$ への埋め込みを $in_p : c(p) \hookrightarrow X_{\mathcal{M}}$ と記述し、任意の $U \subseteq X_{\mathcal{M}}$ に対して $U_p = \{c \in c(p) \mid in_p(c) \in U\}$ と定義する。その上で、

⁷任意の state x に対して、 $c(x) = \{c(e) \in C \mid e \in x\}$ とする。

$$(1) \forall p \in P_{\mathcal{M}} \quad \forall c_1, c_2 \in c(p) \quad (c_1 \in U_p \ \& \ c_2 \leq c_1 \implies c_2 \in U_p)$$

$$(2) \forall p, q \in P_{\mathcal{M}} \quad \forall c \in c(p) \quad (c \in U_p \ \& \ c \in c(q) \implies c \in U_q)$$

を満たす集合 $U \in \mathcal{P}X_{\mathcal{M}}$ を開集合とみなして位相 $\mathcal{O}X_{\mathcal{M}}$ を定義する. $\mathcal{O}X_{\mathcal{M}}$ が位相となることは容易に確認できて, その基底に関して以下の特徴を示すことができる.

補題 2. $K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})$ は位相 $\mathcal{O}X_{\mathcal{M}}$ の可算基底となる. また, 任意の $W \in K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})$ に対して, $\#K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})_W < \omega$ である.

Proof. 任意の $M \in \mathcal{P}X_{\mathcal{M}}$ に対して, M を含み, 開集合として要請されている2条件について閉じている最小の集合を考え, この開集合を $U(M)$ と表すことにする. すると,

$$B = \{U(M) \in \mathcal{O}X_{\mathcal{M}} \mid M \in \mathcal{F}X_{\mathcal{M}}\}$$

として $\mathcal{O}X_{\mathcal{M}}$ の基底を与えることができる. この時, B に属する開集合がコンパクトとなることは容易に確認でき, 通常の議論に従って $B = K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})$ を示すことができる. また, $M \in \mathcal{F}X_{\mathcal{M}}$ であることと $\{p \mid M_p \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}P_{\mathcal{M}}$ は同値であり, $\mathcal{F}P_{\mathcal{M}}$ が可算集合であり各 $c(p)$ が有限集合であることから, $K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})$ も可算集合となることが分かる. 最後に, 任意の $U(M) \in K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})$ に対して, $\#PM < \omega$ より $\#K(\mathcal{O}X_{\mathcal{M}})_{U(M)} < \omega$ となる. $\square$

次に, この位相空間の上に section の定義を与える. $t \subseteq P_{\mathcal{M}}$ と $x \in D_{\mathcal{M}}$ に対して, $x = \bigcup t$ である時に, t を state x の分解と呼ぶことにする. あらゆる分解を集合の包含関係で順序づけた時に, 任意の昇鎖 $t_1 \subseteq t_2 \subseteq t_3 \subseteq \dots$ に対して, $\bigcup \{p \in P_{\mathcal{M}} \mid \exists i \in \mathbb{N} \ p \in t_i\}$ は state となり, その分解 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} t_i$ は $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ の上界となる. そこで極大な分解の集合を $T_{\mathcal{M}}$ と記述すると, 必然的に $T_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ となる. その上で, 集合の前層 $F_{\mathcal{M}} \in \text{Ob}(\text{Sets}^{\mathcal{O}X_{\mathcal{M}}^{\text{op}}})$ を以下のように定義する. 先ず, 対象に関しては, 任意の $t \in T_{\mathcal{M}}, U \in \mathcal{O}X_{\mathcal{M}}$ と $p \in P_{\mathcal{M}}$ に対して

$$(f_t|_U)(p) = \begin{cases} \{e \in p \mid c(e) \in U_p\} & p \in t \text{ かつ} \\ & \forall q \in P_{\mathcal{M}} \ (q \subseteq p \implies c(q) \cap U_q \neq \emptyset) \text{ の時} \\ \emptyset & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

のように関数 $f_t|_U : P_{\mathcal{M}} \rightarrow D_{\mathcal{M}}$ を定義する. その上で, U 上の section の集合を

$$F_{\mathcal{M}}U = \{f_t|_U \mid t \in T_{\mathcal{M}}\}$$

と定める. 更に, 射に関しては, $U, V \in \mathcal{O}X_{\mathcal{M}}, V \subseteq U$ かつ $t \in T_{\mathcal{M}}$ とした時に, $f_t|_U \in F_{\mathcal{M}}U$ の制限 $(F_{\mathcal{M}})_{V,U}(f_t|_U) \in F_{\mathcal{M}}V$ を $f_t|_V$ として定義する. このような定義の下で, $F_{\mathcal{M}}$ が関手となっていることは容易に確認できる.

補題 3. (1) $(F_{\mathcal{M}})_{U,U} = \text{id}_{F_{\mathcal{M}}U}$.

(2) $W \subseteq V \subseteq U$ の時に, $(F_{\mathcal{M}})_{W,V} \circ (F_{\mathcal{M}})_{V,U} = (F_{\mathcal{M}})_{W,U}$.

更に, section の貼り合わせに関する条件も以下のように確認できる.

補題 4. $p, q \in P_{\mathcal{M}}$ に対して, $c(e_1) = c(e_2)$ となる $e_1 \in p, e_2 \in q$ が存在しているとする. この時, $c(e_3) = c(e_4)$ であり, その proofset が $p \cap q$ に含まれるような $e_3 \in p, e_4 \in q$ が存在する.

Proof. $c = c(e_1) = c(e_2)$ とおき, c の proofset の大きさに関する帰納法による. c が $p \cap q$ に proofset を持つなら補題の主張は明らかである. c の p における proofset x と q における proofset y が異なる時は, $e'_1 \neq e'_2, c(e'_1) = c(e'_2)$ を満たす event $e'_1 \in x, e'_2 \in y$ が存在する. 実際に, 全ての event が共存可能とすると $x \cup y \cup \{e_1\}$ や $x \cup y \cup \{e_2\}$ は, 複数の enabling を持つ event が存在する state となり具象データ構造の決定性に矛盾する. あとは, この e'_1, e'_2 に帰納法の仮定を適用して補題の主張が得られる. $\square$

補題 5. $\langle f_{t_i}|_{U_i} : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} F_{\mathcal{M}}U_i$ として, 各 $i, j \in I$ に対して $f_{t_i}|_{U_i \cap U_j} = f_{t_j}|_{U_i \cap U_j}$ が成り立っている時, 全ての $i \in I$ に対して $f_t|_{U_i} = f_{t_i}|_{U_i}$ を満たす分割 t が存在する.

Proof. 一般に, section $f_t|_U \in F_{\mathcal{M}}U$ に対して $\text{supp}(f_t|_U) = \{p \in t \mid (f_t|_U)(p) \neq \emptyset\}$ と定義する. そして, 任意の $i \in I, j \in I - \{i\}, p \in \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ に対して, p が $\text{supp}(f_{t_j}|_{U_j})$ のどの元とも共存可能であることを以下の場合分けによって確認する.

$$(1) \quad \forall q \in \text{supp}(f_{t_j}|_{U_j}) \quad \forall e_1 \in (f_{t_i}|_{U_i})(p) \quad \forall e_2 \in (f_{t_j}|_{U_j})(q) \quad c(e_1) \neq c(e_2)$$

が成り立つ場合: $q \in t_j$ として, $c(e_1) = c(e_2)$ を満たす $e_1 \in p, e_2 \in q$ が存在すると仮定する. この時, 補題 4 より, $c(e_3) = c(e_4)$ であり, その proofset x が $p \cap q$ に含まれるような $e_3 \in p, e_4 \in q$ を見つけることができる. ここで, $\{e_3\} \cup x$ と $\{e_4\} \cup x$ には cell が等しい initial event⁸ が存在する. それらの一つを $e_5 \in \{e_3\} \cup x, e_6 \in \{e_4\} \cup x$ とすると, $c(e_5) = c(e_6)$ であり $\{e_5\} \subseteq p$ と $\{e_6\} \subseteq q$ は prime state となる. すると, $(f_{t_i}|_{U_i})(p) \neq \emptyset$ から, $\{c(e_5)\} \cap (U_i)_{\{e_5\}} \neq \emptyset$ が得られる. 一方で, 開集合の定義から $\{c(e_5)\} \cap (U_i)_{\{e_5\}} \subseteq c(p) \cap (U_i)_p$ となるので, $c(e_5) \in c(p) \cap (U_i)_p$ が結論づけられる. ここで, $(f_{t_j}|_{U_j})(q) \neq \emptyset$ と仮定すると, 上と同様の議論によって $c(e_5) = c(e_6) \in c(q) \cap (U_j)_q$ が得られ (1) に矛盾することとなる. 従って, $q \notin \text{supp}(f_{t_j}|_{U_j})$ となることが分かる. 以上の議論から,

$$\forall q \in \text{supp}(f_{t_j}|_{U_j}) \quad \forall e_1 \in p \quad \forall e_2 \in q \quad c(e_1) \neq c(e_2)$$

⁸ $\emptyset \vdash c(e)$ であるような event e を initial event と呼ぶ. 特に, $x = \emptyset$ の時は, e_3 と e_4 が initial event となり, 両者の cell は一致している.

が得られ, p は $\text{supp}(f_{t_j}|_{U_j})$ の各元と共存可能となる.

$$(2) \quad \exists q \in \text{supp}(f_{t_j}|_{U_j}) \quad \exists e_1 \in (f_{t_i}|_{U_i})(p) \quad \exists e_2 \in (f_{t_j}|_{U_j})(q) \quad c(e_1) = c(e_2)$$

が成り立つ場合: $e_1 = (c, v_1)$, $e_2 = (c, v_2)$ とする. すると, $e_1 \in (f_{t_i}|_{U_i})(p)$ からは $c \in c(p)$ かつ $c \in (U_i)_p$ が得られ, $e_2 \in (f_{t_j}|_{U_j})(q)$ からは $c \in (U_j)_q$ が得られる. ここで, 開集合の定義から $c \in (U_j)_p$ となり, $c \in (U_i)_p \cap (U_j)_p = (U_i \cup U_j)_p$ であることが分かる. 従って, $e_1 \in (f_{t_i}|_{U_i \cap U_j})(p) = (f_{t_j}|_{U_i \cap U_j})(p)$ であり, $(f_{t_j}|_{U_i \cap U_j})(p) \neq \emptyset$ から必然的に $p \in t_j$ となる. これによつて, p は $\text{supp}(f_{t_j}|_{U_j})$ の各元と共存可能となることが分かる.

以上の考察から $\bigcup_{i \in I} \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ は分割となり, これを含む極大な分割の一つを t として採用すると, 任意の $i \in I$ に対して $f_t|_{U_i} = f_{t_i}|_{U_i}$ を示すことができる. 実際に, $(f_{t_i}|_{U_i})(p) \neq \emptyset$ の場合は, $p \in \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i}) \subseteq t$ となり, $(f_t|_{U_i})(p) = \{e \in p \mid c(e) \in (U_i)_p\}$ が得られる. 一方で, $(f_{t_i}|_{U_i})(p) = \emptyset$ の場合については, 先ず,

$$(3) \quad p \in t \text{ かつ } \forall q \in P_{\mathcal{M}} (q \subseteq p \implies c(q) \cap (U_i)_q \neq \emptyset)$$

を仮定する. すると, 直ちに $p \notin t_i$ となることが分かる. 実際に, $p \in t_i$ とすると $(f_{t_i}|_{U_i})(p) \neq \emptyset$ が導かれ矛盾する. 従って, t_i の極大性から p は t_i と共存できないことが分かる. 一方で, $\{p\} \cup \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i}) \subseteq t$ より, p は $\text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ と共存可能となる. 以上のことから, $e_1 \neq e_2$ かつ $c(e_1) = c(e_2)$ となる $e_1 \in p, e_2 \in q$ が存在するような $q \in t_i - \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ を見つけることができる. そして, 更に, 補題 4 より, $e_3 \neq e_4$ かつ $c(e_3) = c(e_4)$ であり, その proofset x が $p \cap q$ に含まれるような $e_3 \in p, e_4 \in q$ を見つけることができる. この prime state $\{e_4\} \cup x \subseteq q$ は明らかに t_i に属していて, p と共存できないことから $\{e_4\} \cup x \notin \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ であることも分かる. 従って, $c(r) \cap (U_i)_r = \emptyset$ となるような prime state $r \subseteq \{e_4\} \cup x$ が存在する. 一方で, $\{e_3\} \cup x \in \text{supp}(f_{t_i}|_{U_i})$ からは $c(r) \cap (U_i)_r \neq \emptyset$ が得られ, これらは直ちに矛盾する. 以上の考察から, (3) は成り立つことはなく, $(f_t|_{U_i})(p) = \emptyset$ が結論づけられる. $\square$

定理 6. $F_{\mathcal{M}}$ は位相空間上の層である.

Proof. $\langle f_{t_i}|_{U_i} : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} F_{\mathcal{M}} U_i$ として, 各 $i, j \in I$ に対して $f_{t_i}|_{U_i \cap U_j} = f_{t_j}|_{U_i \cap U_j}$ が成り立っているとする. この時, 補題 5 より, $\langle f_{t_i}|_{U_i} : i \in I \rangle = \langle f_{t_i}|_{U_i} : i \in I \rangle$ を満たす分割 t が存在するので, 貼り合わせ $\bigcup_{i \in I} (f_{t_i}|_{U_i})$ を $f_t|_{\bigcup_{i \in I} U_i}$ として定義すればよい. $\square$

3. 層から領域へ

前節の変換とは逆に, 位相空間 $(X, \mathcal{O}X)$ に対して, $K(\mathcal{O}X)$ が可算基底となり, 任意の $W \in K(\mathcal{O}X)$ に対して $\#K(\mathcal{O}X)_W < \omega$ が成り立つ時には, $(X, \mathcal{O}X)$ 上の層の断面構造から具象領域を得ることができる. 実際に, そのような層 F に対して

$$D_F = \coprod_{U \in \mathcal{O}} FU$$

とする. また, 各 $s, t \in D_F$ に対して

$$\exists U, V \in \mathcal{O}X \quad (V \subseteq U \text{ \& } s \in FV \text{ \& } t \in FU \text{ \& } s = t|_V)$$

の時に $s \sqsubseteq t$ と定義して D_F 上に半順序を入れる. この時に, $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ が coherent ω 代数的領域となることは容易に確認できる.

補題 7. $s, t \in D_F, s \in FV, t \in FU, s \prec t$ とする時, 以下が成り立つ.

- (1) 任意の開集合 $W \in \mathcal{O}X$ について, $W \cap (U - V) \neq \emptyset$ ならば $U - V \subseteq W$ である.
- (2) $U - V$ を含む最小の開集合が存在する.

Proof. (1) 仮定より $c \in W \cap (U - V)$ となる $c \in X$ が存在する. この時, $d \in (U - V) - W$ となる $d \in X$ が存在すると仮定すると, 開集合 $O = (U \cap W) \cup V$ に対して $c \in O - V$ かつ $d \in U - O$ である. 従って, $s \sqsubseteq t|_O \sqsubseteq t$ となり $s \prec t$ に矛盾する.

(2) $c \in U - V$ とすると, $U - V \subseteq U = \bigcup^\uparrow K(\mathcal{O}X)_U$ より, $c \in W \subseteq U$ を満たすコンパクト開集合 W が存在する. この W に対して, (1) と $c \in W \cap (U - V)$ より $U - V \subseteq W$ であり, 位相に要請されている性質から

$$0 < \#\{W' \in K(\mathcal{O}X) \mid U - V \subseteq W' \subseteq W\} \leq \#K(\mathcal{O}X)_W < \omega$$

が成り立つ. そこで, $O = \bigcap \{W' \in K(\mathcal{O}X) \mid U - V \subseteq W' \subseteq W\}$ と定義すると, O は $U - V$ を含む最小の開集合となる. 実際に, $U - V \subseteq P \in \mathcal{O}X$ とすると, $U - V \subseteq W \cap P \in \mathcal{O}X$ であり, $U - V \subseteq Q \subseteq W \cap P$ を満たすコンパクト開集合 Q が存在する. 従って, $O \subseteq Q \subseteq P$ である. $\square$

系 8. $s, t \in D_F, s \in FV, t \in FU$ に対して, 以下は同値である.

- (1) $s \prec t$.
- (2) $O \cap (U - V) \neq \emptyset$ を満たす任意の開集合 O に対して $W \subseteq O$ であり, $U = V \cup W$ を満たす開集合 W が存在する.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 補題 7 (2) のように $U - V$ を含む最小の開集合 W を考えればよい. 実際に, 任意の $O \in \mathcal{O}X$ に対して, $O \cap (U - V) \neq \emptyset$ とすると, 補題 7 (1) より $U - V \subseteq O$ であるから $W \subseteq O$ となる. また, $U - V \subseteq U$ より $W \subseteq U$ が成り立つので $U = V \cup W$ が保証される.

(2) $\Rightarrow$ (1): $s \sqsubset t|_O \sqsubseteq t$ と仮定すると, $O \cap (U - V) \neq \emptyset$ であるから $W \subseteq O$ となる. 従って, $U = V \cup W \subseteq O$ なので $U = O$ であり, $t = t|_O$ が成り立つ. このことから $s \prec t$ が結論づけられる. $\square$

$s \prec t$ の時, 上の系における開集合 W は必然的に非空集合であり唯一に定まる. そこで以降では, 必要に応じて, この開集合 W に基づく t の制限 $u = t|_W$ を明示して, $s \prec_u t$ と表記することを行う. 例えば, $s \prec_u t$ の時に, $s \sqcup u = t$ が成り立つことなどは明らかである.

補題 9. $s, t \in D_F, s \in FV, t \in FU$ に対して, $s \uparrow t$ の時, $s \sqcap t \prec_u s$ と $t \prec_u s \sqcup t$ は同値である.

Proof. $s \sqcap t \prec_u s, u \in FW$ と仮定する. この W に対して, $V = (U \cap V) \cup W$ から

$$U \cup V = U \cup ((U \cap V) \cup W) = U \cup W$$

が成り立つ. また, $(U \cup V) - U = V - (U \cap V)$ であるから, 任意の開集合 O に対して, $((U \cup V) - U) \cap O \neq \emptyset$ とすると $W \subseteq O$ が成り立つ. 従って, 系 8 より, $t \prec s \sqcup t$ となり, $(s \sqcup t)|_W = s|_W = u$ であるから $t \prec_u s \sqcup t$ が得られる.

逆に, $t \prec_u s \sqcup t, u \in FW$ と仮定する. この時, $((U \cup V) - U) \cap V \neq \emptyset$ から $W \subseteq V$ であり,

$$\begin{aligned} (U \cap V) \cup W &= (U \cup W) \cap (V \cup W) \\ &= (U \cup V) \cap (V \cup W) \quad (\text{仮定より}) \\ &= V \end{aligned}$$

が成り立つ. また, 上と同様に, 任意の開集合 O に対して $(V - (U \cap V)) \cap O \neq \emptyset$ とすると, $W \subseteq O$ を示すことができる. 従って, 系 8 より, $s \sqcap t \prec s$ となり, $s|_W = (s \sqcup t)|_W = u$ であるから $s \sqcap t \prec_u s$ が得られる. $\square$

この補題から, 領域 $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ に対して, 直ちに (性質 C) が保証される. 更に,

$$(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2) \text{ もしくは } (s_2, t_2) \leq (s_1, t_1)$$

の時に, $s_1 \prec_u t_1$ であれば $s_2 \prec_u t_2$ となることが分かる. このことから, $s \prec_u t_1$ かつ $(s, t_1) \sim (s, t_2)$ の時に, $s \prec_u t_2$ であり $t_1 = s \sqcup u = t_2$ が成り立つ. 従って, (性質 R) も保証されていることが分かる. 更に, 以下の補題により, 残りの (性質 Q) も確認することができる.

補題 10. 領域 $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ は (性質 Q) を満たす.

Proof. $s, t \in D_F, s \in FV, t \in FU, s \sqcap t \in FW$ として, 更に, $\neg(s \uparrow t), s \sqcap t \prec_u s, u \in FO$ を仮定する. また, $v = t|_V$ のように $v \in D_F$ を定義する. $s \uparrow v$ と仮定すると, $\{s, v\}$ の上界 w に対して $s = w|_V = v$ となる. 従って, $s = v \sqsubseteq t$ が成り立つこととなり, $\neg(s \uparrow t)$ に矛盾する. 以上から $\neg(s \uparrow v)$ が得られる. 更に, $s \sqcap t \prec_u s$ と $s, v \in FV$ より, $s \sqcap t \prec v$ であることが系 8 から保証される. また $v \sqsubseteq t$ も定義から明らかである.

次に, 上で導入された v の一意性を確認するために, $V' \in \mathcal{O}X, v' = t|_{V'}$ に対して, $\neg(s \uparrow v')$ かつ $s \sqcap t \prec_{u'} v' \sqsubseteq t, u' \in FO'$ と仮定する. この時, $O \cap O' \subseteq W$ であれば

$$s|_{O \cap O'} = (s \sqcap t)|_{O \cap O'} = t|_{O \cap O'}$$

となり, 貼り合わせ $(s|_O) \sqcup (t|_{O'}) \in D_F$ が存在することとなる. 従って, $\{s, v'\}$ は上界 $(s \sqcap t) \sqcup (s|_O) \sqcup (t|_{O'})$ を持つこととなり矛盾する. これによって $(V - W) \cap (O \cap O') \neq \emptyset$ が得られ, $s \sqcap t \prec_u s$ と系 8 から $O \subseteq O \cap O' \subseteq O'$ が結論づけられる. また, これと同様に, $s \sqcap t \prec_{u'} v', (V' - W) \cap (O \cap O') \neq \emptyset$ から, $O' \subseteq O \cap O' \subseteq O$ が得られる. 以上から $O = O'$ となるので $v = v'$ が結論付けられる. $\square$

定理 11. $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ は具象領域となる.

今回は, 初期段階の考察として, 具象領域と層の間に自然な形で双方向の変換を導入することのみを行った. これは, それぞれの圏の対象に関する対応のみを与えたことに相当していて, 射に関する対応については現時点で考察を与えていない. 具体的に, 具象領域の間に定義される射は逐次アルゴリズムと呼ばれ, 逐次アルゴリズムの概念と今回の考察で注目した層の間に定義される準同型写像 (自然変換) との対応を調べる必要があり, その上で, 2つの圏の同値性を示すことが今後の課題となる.

参考文献

- [1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.

- [2] H .P. Barendregt, *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Volume 103, North-Holland, 1984.
- [3] G. Berry and P.L. Curien, Sequential algorithms on concrete data structures, *Theoretical Computer Science* 20, pp. 265–321, 1982.
- [4] G. Kahn and G.D. Plotkin, Concrete domains, *Theoretical Computer Science* 121, pp. 187–277, 1993.
- [5] C. H. L. Ong, Correspondence between operational and denotational semantics: the full abstraction problem for PCF, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 4 Semantic Modeling*, Oxford Science Publications, 1995.