

統計空間 (Statistics Space) の 構造について

大阪市立大、理 工 藤弘吉

§ 1. 統計空間の命名 — Introduction.

本講究録の題目「統計的構造」は集合 X , その部分集合の代数 $\mathcal{B}$, および $\mathcal{B}$ 上で与えられる確率測度 P_θ , $\theta \in \Theta$, の族 $\mathcal{P}$ の triplet $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ のことである. この場合 P_θ は母数空間と呼ばれる集合 Θ の元 θ から $\mathcal{P}$ の元への 1 意的な写像 $\theta \rightarrow P_\theta$ を表はしているとも考えられる. Triplet $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ はかつて Blackwell [1], Kudō [2], LeCam [3], Sacksteder [4] 等によつて「統計的実験」(Statistical experiment) と呼ばれたものである. このように同じ triplet $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ が統計的実験と呼ばれたり統計的構造 (Statistical structure, Basu - Ghosh [5], Morimoto [6]) と呼ばれたりすることは用語の混乱であり, 数学研究の障害であるから, この混乱をときほごすことを考えなければならない. (この Symposium が行われた後で入手した LeCam [7] では, 写像 $\theta \rightarrow P_\theta$ を統計的実験と呼んでいる.) 例えば位相空間論では, 集合 X

と開集合族 $\mathcal{G}$ の pair $(X, \mathcal{G})$ を位相空間, $\mathcal{G}$ を位相構造と呼んでいるし, 測度論では, 集合 X , その部分集合の σ -代数 $\mathcal{B}$, その上の測度 μ の triplet $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間, $\mathcal{B}$ をボレル構造と呼んでいる. これらの先例にならって

$(X, \mathcal{B}, \rho)$ を統計空間 (statistics space)

$\mathcal{B}$ を統計的構造 (statistical structure)

と呼んだら如何なものであろうか. X は従来の通り標本空間 (sample space) という.

次に位相空間論における連続関数, 測度論における可測写像に対応するものとして, 統計空間の研究では乱写像 (random mapping) が定義される. この乱写像は, 位相空間論で連続写像が位相の強弱を定義するように, 統計空間の情報の多寡を定義する. この意味で, 位相空間論の homeomorphism と同様に, 統計空間の sufficiency を定義することが出来る.

統計量は乱写像の一種である. 筆者は統計量は英語の statistic の訳であるし, また日常生活で統計と呼んでいるものは我々の云う統計量のとる値であるから, 「統計量」という術語は「統計」に改めるべきであると思っている. (この意見をシンポジウムで表明したところ, これに反対する見解も多かった. これは「統計量は確率変数であり, 統計と云われているものは数値であるから, 統計量と統計は全く異なるものである

ということに基づいているように思われる。しかし単なる数値を何故統計と呼ぶのであろうか、単なる数値を統計と呼ぶ理由はその後統計量と呼ばれる確率変数の概念がひそんでいからではないであろうか。) 統計空間の十分性は十分統計量の概念に結びつく。十分統計量は本講究録の主要関心事の一つである。

統計空間論としての漸近理論は未発展の分野の一つである。あづかに LeCam [7], Kudō [8] がそれぞれこの方面の試みをしている。

統計空間論における先験分布の問題は *mixture* の問題として解体される。事実先験確率は——主観主義の立場に立たない限り——それによる *mixture* を標本分布とする予測問題を引き起すに過ぎない。しかし母数空間にもボレル構造を想定するなら、それは統計的構造との *duality* の問題が起り、これも今後の問題となるであろう。

以上述べた事柄を順を追って概説しよう。

§ 2. 統計空間の性質

集合 X , X の部分集合の σ 代数 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ 上の確率測度の族 $\mathcal{P}$ からなる triplet $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ を 統計空間 と云い, X を 標本空間, $\mathcal{B}$ を 統計的構造 と名づける。統計的構造 $\mathcal{B}$ に関する性質

のうちに最も重要なものは σ -generated ということである。

定義 2.1 B の可算個の元からなる部分代数 B' が存在して、 B が B' を含む最小の σ 代数となる (すなわち B' が B を generate する) とき、 B は σ -generated であるといわれる。

Euclid 空間の Borel field やその可算直積などはこの性質をもつが、本講究録の森本氏の論文にあらわれる有限母集団におけるすべての集合の作る σ 代数、連続時間をもつ時系列の空間などはこの性質をもたない。

定義 2.2 B 上の確率測度の族 $\mathcal{P}$ が B 上のある σ -有限測度 μ に対して絶対連続な測度 P だけからなるとき、 $\mathcal{P}$ は (μ によつて) dominate されると云われる。

ノンパラメトリックな問題や母集団分布が離散的で連続な位置パラメータをもつ場合などはこの性質を持たない。また Basu-Ghosh [5], Morimoto [6] で formulate された有限母集団においても dominate されない $\mathcal{P}$ を考えている。

$\mathcal{P}$ は様々な方法で位相を入れて位相空間とみなされる。これらの位相による separability は上記 dominatedness と強い関係があることは広く知られている ([9] を見よ)。

$\mathcal{P}$ の完備性 (completeness) も 1 つの重要な性質であろう。しかしさらに重要な性質は次の正則性であろう。

確率空間 (X, B, P) において、 B の部分 σ 代数 A を考え、

任意の P 可積分関数 f に対して, A 可測関数 $E_P[f|A]$ が存在して, $\int_A f dP = \int_A E_P[f|A] dP$ for all $A \in \mathcal{A}$ が成立する. この $E_P[f|A]$ を, A が与えられた f の 条件付平均 という. 特に f が $B (\in \mathcal{B})$ の特徴関数であるとき, $E_P[f|A]$ を $P(B|A)$ とかき, A が与えられた $B (\in \mathcal{B})$ の 条件付確率 という. たとえ P 測度 0 の $A (\in \mathcal{A})$ を除いても, 必ずしも $P(\cdot|A)$ は $\mathcal{B}$ 上の確率測度ではない.

定義 2.3 統計空間 $(X, \mathcal{B}, P)$ は, $\mathcal{B}$ のいかなる部分の代数 $\mathcal{A}$ に対しても, P のいかなる要素 P に対しても, $\mathcal{B}$ 上の確率測度である条件付確率 $P(\cdot|A)$ をもつとき, この統計空間は 正則 (regular) であるといわれる.

LeCam [3; p. 1442] によると, X が完備で可分な距離空間, 局所コンパクト集合の直積空間で, それぞれ Borel 集合族, Baire 集合族の直積族を $\mathcal{B}$ ととり, さらに P が dominated なら, その統計空間は正則である. (cf. [3; p. 1447, Corollary]).

§ 3 乱写像 (Random Mapping)

ある集合 $\Theta (\neq \emptyset)$ から 1 つの統計空間 $(X, \mathcal{B}, P)$ の P の上への写像 $\theta \rightarrow P_\theta (\in \mathcal{P})$ を Θ の上の実験 (Experiment) といい, Θ を 母

数空間という。④の上の実験を (X, B, P, Θ) であらわす。

定義 3.1 1つの母数空間④上の2つの実験 $\mathcal{S} = (X, B, P, \Theta)$, $\mathcal{R} = (Y, \mathcal{C}, Q, \Theta)$ に対して, $\mathcal{C} \times X \rightarrow [0, 1]$ なる写像 $T(\mathcal{C}, x)$ が

- i) $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{C} : T(\mathcal{C}, x)$ は B 可測関数
- ii) $\forall x \in X : T(\mathcal{C}, x)$ は $\mathcal{C}$ 上の確率測度
- iii) $\forall \theta \in \Theta : Q_\theta(\mathcal{C}) = \int_X T(\mathcal{C}, x) dP_\theta$

をみたすとき, $T(\mathcal{C}, x)$ を $\mathcal{S}$ から $\mathcal{R}$ への乱写像という。

乱写像はしばしば *stochastic mapping (or transformation)*, *transition measure*, *Markov kernel*, *randomized mapping* などという名前でも呼ばれることもある。統計空間論における乱写像は位相空間論における連続写像のような役割をはたすものであろう。

(X, B) から $(Y, \mathcal{C})$ への可測写像 $t(x)$ は乱写像の1例である。すなわち $T(\mathcal{C}, x) = 1$ ($t(x) \in \mathcal{C}$); $= 0$ ($t(x) \notin \mathcal{C}$) とおけば, T は乱写像となる。上記の可測写像をしばしば統計(量)という。

乱写像 T によつて, 定義 3.1 の iii) の関係にあるとき, $Q_\theta = TP_\theta$ とかく。実験 (X, B, P, Θ) と $(Y, \mathcal{C}, Q, \Theta)$ とに対して, $Q_\theta = TP_\theta$ となる乱写像 T が存在するとき, 実験 $(X,$

$\mathcal{B}, \mathcal{P}, \Theta$) は実験 $(Y, \mathcal{C}, \mathcal{Q}, \Theta)$ に対して 十分 (sufficient) という。

定義 3.3 実験 $\mathcal{S}$ が実験 $\mathcal{R}$ に対して十分であり, 逆に実験 $\mathcal{R}$ が $\mathcal{S}$ に対して十分であるとき, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{R}$ と等価であるという。

実験の等価は位相空間論の同相ということに対応する概念であるだろう。

普通に用いられる十分統計量の概念はここでは次のように定義される。

定義 3.4 実験 $\mathcal{S}$ から $\mathcal{R}$ への乱写像 T が十分であるとは, $\mathcal{S}$ と $\mathcal{R}$ とが等価であることを意味する。

T が特に $(X, \mathcal{B})$ から $(Y, \mathcal{C})$ への可測写像であるとき, 定義 3.4 の十分性は普通の十分性と一致する。何故ならば, 統計量 $T(x)$ の十分性は, 乱写像 $R_1(B|y)$ が存在して,

$$(*) \quad \forall \theta \in \Theta, \forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C}: P_\theta(B \cap T^{-1}C) = \int_C R_1(B|y) P_\theta T^{-1}(dy).$$

一方定義 3.4 の十分性は, 乱写像 $R_2(B|y)$ が存在して

$$(**) \quad \forall \theta \in \Theta, \forall B \in \mathcal{B}: P_\theta(B) = \int_Y R_2(B|y) P_\theta T^{-1}(dy).$$

したがって $(*)$ の $C=Y$ とすれば $(**)$ が成立することは直ちにわかる。逆: $(**) \Rightarrow (*)$ の証明は Le Cam [3; Prop. 9] にあるが, シンポジウムで竹内啓君が, $\mathcal{P}$ が dominated であ

ることを仮定して、この逆の別証明を与えたので、ここではそれを紹介する。この別証明は次の2つの良く知られた定理に基づく。

定理 3.1 統計(量) T に対して $(*)$ をみたす R_1 が存在するためには、 Θ の任意の2つの要素 θ_1, θ_2 の組を母数空間としたとき $(*)$ をみたす $R_{\theta_1, \theta_2} = R_1(B|y)$ が存在することが必要十分である、ただし P は *dominated* とする。

定理 3.2 任意の統計(量) T に対して、 T の値域 Y の σ 代数を $\mathcal{C}$ とするとき、 k を正数とするなら

$$\min_{B \in \mathcal{B}} (P_1(B) - k P_0(B)) \leq \min_{C \in \mathcal{C}} (P_1 T^{-1}(C) - k P_0 T^{-1}(C)).$$

特にすべての正数 k に対して上式の等号がなりたつとき、またその時に限り、 T は $(*)$ をみたす。ただし P_0, P_1 は $\mathcal{B}$ 上の確率測度であり、 $\Theta = \{0, 1\}$ とする。

定理 3.3 P が *dominated* なら、 $(**)$ をみたす R_2 が存在するとき $(*)$ をみたす R_1 が存在する。(注意: R_1 は必ずしも R_2 と一致しない。)

竹内啓氏による定理 3.3 の証明. P が *dominated* であるから、定理 3.1 によつて、 $\Theta = \{0, 1\}$ と仮定する(一般性は失われない). $C_k = \{y : g_1(y) \leq k g_0(y)\}$ とおく、ここで $g_i(y) = dP_i T^{-1} / d(P_0 T^{-1} + P_1 T^{-1})$, $i = 0, 1$. その

とき, $\min_{C \in \mathcal{C}} [P_1 T^{-1}(C) - k P_0 T^{-1}(C)] = P_1 T^{-1}(C_*) - k P_0 T^{-1}(C_*) \leq \int_Y R_2(B|y) \{P_1 T^{-1}(dy) - k P_0 T^{-1}(dy)\}$
 $= P_1(B) - k P_0(B)$, $B \in \mathcal{B}$. したがって $\min_{C \in \mathcal{C}} [P_1 T^{-1}(C) - k P_0 T^{-1}(C)] \leq \min_{B \in \mathcal{B}} [P_1(B) - k P_0(B)]$. 故に定理 3.2 より, (*) をみたす R_1 が存在する.

以下においても $\mathcal{P}$ は dominated, λ を dominate 測度と仮定する. そのとき $\mathcal{P} = \{F_\theta(x) \lambda(dx) : \theta \in \Theta\}$ とすると, $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ から $(Y, \mathcal{C}, \mathcal{Q})$ への乱写像 $T(C|x)$ は

$$G_\theta(y) \mu(dy) = \int_X T(dy|x) F_\theta(x) \lambda(dx)$$

をみたす, ここで $\mathcal{Q} = \{G_\theta(y) \mu(dy) : \theta \in \Theta\}$. 乱写像に関する (*) に対応する式は

$$(+) \quad R_1(dx|y) G_\theta(y) \mu(dy) = T(dy|x) F_\theta(x) \lambda(dx)$$

であり, (**) に対応する式は

$$(++) \quad F_\theta(x) \lambda(dx) = \int_Y R_2(dx|y) G_\theta(y) \mu(dy)$$

である. 乱写像に関する Halmos-Savage の定理 (定理 3.1) の拡張は次のようになる.

定理 3.4 乱写像 T に対して (+) をみたす R_1 が存在するためには, Θ の任意の 2 つの要素 θ_1, θ_2 の組を母数空間として

それに関して $R_{\theta, \theta_2} = R_1(B|y)$ が存在することが必要十分である。

この定理は直ちに証明出来る。

定理 3.5 (†) をみたす乱写像 R_1 が存在するためには (††) をみたす R_2 が存在することが必要十分である。

証明 可測空間 $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ 上の確率測度 $\nu_\theta(dx, dy) = T(dy|x) F_\theta(x) \lambda(dx)$, $\theta \in \Theta$, の全体は統計空間を作り, $f(x, y) = y$ は $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \nu_\theta, \theta \in \Theta)$ から $(Y, \mathcal{C}, G_\theta(y) \mu(dy), \theta \in \Theta)$ への統計(量)である。しかも (††) を用いると, $\bar{R}(A|y) = \int_X T(A_x|x) R_2(dx|y)$, $A \subset X \times Y$, $A \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$, とおけば

$$\int_A \nu_\theta(dx, dy) = \int_Y \bar{R}(A|y) G_\theta(y) \mu(dy)$$

が成立する。これは f が定義 3.4 の意味で十分であることを示めている ($\bar{R}$ は (**) の R_2 の役割をしている)。したがって定理 3.3 が使えて

$$\nu_\theta(A \cap f^{-1}(C)) = \int_C \bar{R}(A|y) G_\theta(y) \mu(dy), C \in \mathcal{C},$$

をみたす $(Y, \mathcal{C}, q)$ から $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \nu, \Theta)$ への乱写像 $\bar{R}$ が存在する。この $\bar{R}(A|y)$ は $y \notin R_x$ に対しては 0 で,

$y \in A_x$ に対しては A_x の測度となるから, $R_2(B: y) = \bar{R}(B \times Y: y)$ とおくと, R_2 は乱写像で (++) をみたす. 逆は明らかである.

次の定理は乱写像に関する Neyman の因子分解定理の拡張である.

定理 3.6 $T(C|x)$ が $(X, B, F_\theta \lambda(dx), \theta \in \Theta)$ からある統計空間 $(Y, \mathcal{C}, G_\theta(y) \mu(dy), \theta \in \Theta)$ への十分乱写像であるためには, λ 可積分関数 $f(x)$ と, 各 θ に対し, $\mathcal{C}$ 可測関数 $K_\theta(y) \geq 0$ が存在して, 直積可測空間 $(X \times Y, B \times \mathcal{C})$ 上で確率測度 $T(dy|x) F_\theta(x) \lambda(dx)$ に対して殆んど常に

$$F_\theta(x) = K_\theta(y) f(x)$$

がなりたつことが必要十分である.

証明. T が十分乱写像であれば, 定理 3.5 から (+) が成立する $R_1(B|y)$ が存在する. しかるに Halmos-Savage [10] によれば, $\{F_{\theta_i}(x) \lambda(dx)\}$ はその可算要素の凸結合 $\lambda_0(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_{\theta_i}(x) \lambda(dx)$ で同等 (互いに絶対連続の意味で) なものが存在する. このとき $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_{\theta_i}(x)$, $g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i G_{\theta_i}(y)$ とおくと

$$T(dy|x) f(x) \lambda(dx) = R_1(dx|y) g(y) \mu(dy).$$

したがって (+) から, 測度 $T(dy|x)f(x)\lambda(dx)$ で 0 の集合を除けば $F_0(x)/f(x) = G_0(y)/g(y)$ が成立し, 我々の条件が必要であることが証明された. 次にわれわれの条件がみたされると仮定して T が十分乱写像であることを証明する. $k = \int_X f(x)\lambda(dx)$, $\bar{f}(x) = f(x)/k$, $\bar{K}_0(y) = kK_0(y)$ とおき, 改めて $\bar{f}$, $\bar{K}_0$ を f , K_0 と書くことにする. このとき $\mu(dy) = \int_X T(dy|x)f(x)\lambda(dx)$ とおけば, 測度 $\int_X T(dy|x)F_0(x)\lambda(dx)$ は μ に関して絶対連続となるから, その Radon-Nikodym 微分 $G_0(y)$ が定義される. 次に任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $\int_B T(dy|x)f(x)\lambda(dx)$ は μ に関して絶対連続であるから, $R(dx|y)\mu(dy) = T(dy|x)f(x)\lambda(dx)$ が成立する条件付確率 $R(dx|y)$ が存在する. これらのことを用いて計算すると

$$\begin{aligned} \int_Y R(dx|y)G_0(y)d\mu &= \int_Y R(dx|y) \int_X T(dy|\bar{x})F_0(\bar{x})\lambda(d\bar{x}) \\ &= \int_Y R(dx|y) \int_X T(dy|\bar{x})K_0(y)f(\bar{x})\lambda(d\bar{x}) \\ &= \int_Y R(dx|y) \int_X K_0(y)R(d\bar{x}|y)\mu(dy) \\ &= \int_Y R(dx|y)K_0(y)\mu(dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Y K_\theta(y) f(x) T(dy|x) \lambda(dx) \\
&= \int_Y F_\theta(x) T(dy|x) \lambda(dx) = F_\theta(x) \lambda(dx)
\end{aligned}$$

となつて、 R は $(++)$ の R_2 の役目をはたし、 T は十分乱写像であることがわかる。

§ 4 統計空間の表現

本節では P は σ 有限な測度 λ で *dominate* されると仮定し、 $f_\theta(x)$ をその一般密度関数 $dP_\theta/d\lambda$ とする。そのとき

$$\tilde{f}_x(\theta) = f_\theta(x)$$

とおくと、 $\tilde{f}_\cdot$ は X から R^Θ の中への写像 $x \rightarrow \tilde{f}_x(\cdot)$ とみなされ、 $\tilde{f}_\cdot$ による X の像 $Y = \{\tilde{f}_x : x \in X\} (\subset R^\Theta)$ は統計(量) $\tilde{f}_\cdot$ の値域である。 R^Θ に各点収束位相を導入して、 Y を R^Θ の部分位相空間とみなすことができるから、そのボレル集合族またはベール集合族を $\mathcal{C}$ とすると、 $\tilde{f}_\cdot$ は $(X, \mathcal{B})$ から $(Y, \mathcal{C})$ への可測写像となる。

$u \in R^\Theta$ に対して $u(\theta) \in R$ を対応させる写像を φ_θ とすると、

$$\varphi_\theta(\tilde{f}_x) = f_\theta(x)$$

かつ

$$P_\theta(B) = \int_B p_\theta(\tilde{f}_x) \lambda(dx)$$

がなりたつ。したがって Neyman の因子分解定理により, $\tilde{f}$ は十分統計(量)となる。統計(量) $\tilde{f}$ によつて, P を $(Y, \mathbb{C})$ 上に移した分布空間を Q_f とすると, 上のことは実験 $(X, \mathbb{B}, P)$ と $(Y, \mathbb{C}, Q_f)$ とが等価であることを示めしている。 $(Y, \mathbb{C}, Q_f)$ を $(X, \mathbb{B}, P)$ の表現と云うこともできる。

なお $\tilde{f}$ は最小十分統計量であることも証明される (Dynkin [11])。

次に Θ を実数空間とし (n 次元ユークリッド空間としてもよいが, 簡単のため $n=1$ とする) $f_\theta(x) > 0$, θ について連続微分可能とする。そのとき Y から R^Θ の中への対応

$$i: \tilde{f} \rightarrow \frac{d \log \tilde{f}}{d\theta} (= Z. \text{ とおく})$$

は $1:1$ であるから, i も十分統計(量)であつて, Z の統計空間も 1 つの表現である。この表現統計空間は $Z(\theta) \rightarrow E_\theta[Z(\theta)^2]$ によつて, Fisher の情報量に結びつく。

なお本講究録で草間氏は Y に別種の位相を入れて論じている。

§5 新しい統計空間の構成

(A) Truncated experiment. 与えられた統計空間 $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ および X の与えられた部分集合 Y に対して, $\mathcal{C} = \{C \cap Y : C \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{Q}_\theta = \{P_\theta(dx \cap Y) / P_\theta(Y) : P_\theta \in \mathcal{P}\}$ を作り, 新しく統計空間 $(Y, \mathcal{C}, \mathcal{Q}_\theta)$ を考えると, この空間を *truncated experiment* という, ただし Y は $\mathcal{B}$ 可測とする.

(B) 部分統計空間. 与えられた統計空間 $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ に対して, $\mathcal{B}$ の部分 σ 代数 $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ の要素 P の $\mathcal{C}$ への縮小 Q の全体 $\mathcal{Q}$ を用いて作られる新しい統計空間 $(X, \mathcal{B}, \mathcal{Q}_\theta)$ のこと.

(C) 合成統計空間, 周辺統計空間, 条件付統計空間 2つの可測空間 $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{C})$ の直積空間 $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C})$ 上の統計空間 $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \mathcal{P})$ が与えられたとする. このとき, $\mathcal{P}^X = \{P(dx \times Y) : P \in \mathcal{P}\}$ とおき, 新しい統計空間 $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ を考える. このとき $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$ のことを X に関する周辺統計空間という. さらに x を定めたとき $\mathcal{C}(\in \mathcal{C})$ の確率測度であり $\mathcal{C}$ を定めたとき x の $\mathcal{B}$ 可測関数である $Q_\theta(\mathcal{C}; x)$ が存在して

$$P_\theta(\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{B}} Q_\theta(\mathcal{C}; x) P_\theta(dx \times Y)$$

がなりたつとき, $\mathcal{Q}_\theta^Y = \{Q_\theta^Y(dy; x) : \theta \in \Theta\}$ とおく. $(Y, \mathcal{C}, \mathcal{Q}_\theta^Y)$ を与えられた x に対する条件付実験という.

もし与えられた x に対する条件付実験が Y に関する周辺実験に一致するとき, X に関する実験と Y に関する実験は独立であるといい, そうでないときそれらは従属であるという.

(D) 混合実験. 合成実験. $(X \times Y, B \times C, P)$ において Y に関する周辺実験の分布 $P_0(x \times dy)$ が θ に関係ないとき, X に関する周辺実験を与えられた y に対する条件付実験の混合実験という.

(E) 極限実験. 極限実験を考える際標本空間を共通にとつて考えることができる. それは例えば54で述べた表現統計空間を考えるなどの方法でその場合に reduce できるからである. 統計的実験列 $\{(X, B_n, P_{\theta n}, \theta \in \Theta)\}$ および同じく実験 $(X, B_0, P_0, \theta \in \Theta)$ が与えられたものとする. これらの実験に対して

(1) すべての自然数 n に対して σ 代数 A_n があり,

$$A_n \supset B_n, \quad P_{\theta n} \text{ が } A_n \text{ まで拡張され,}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots, \quad A_0 = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right]^{\sigma}$$

$$B_0 \subset A_0, \quad P_0 \text{ は } A_0 \text{ まで拡張される.}$$

ただし $[]^{\sigma}$ は $[]$ 内の集合族を含む最小の σ 代数.

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{\theta n} - P_0\|_{B_n} = 0$$

ただし $\|\mu\|_B$ は signed measure μ の B への縮小の全変分.

(3) Θ の点列 $\{\theta_i\}$, 正数列 $\{c_i\}$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$, に対して

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i P_{\theta_i n}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i P_{\theta_i}$$

とおくとき, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$ は対応するという. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$ が対応するとき, いかなる $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ に対しても

$$(\S) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |E_{\lambda_n}[f | B_n]| \lambda_n(dx) = \int_X |E_{\lambda}[f | B_0]| \lambda(dx),$$

ただし M_n は A_n 可測な有界関数の全体で, $E_{\lambda}[f | B]$ は確率測度 λ による与えられた B に対する条件付平均をあらわす.

を満すとき, 実験 $(X, B_0, P_0, \theta \in \Theta)$ を実験列 $\{(X, B_n, P_{\theta n}, \theta \in \Theta)\}$ の極限という.

$f \in M_n$ に対して

$$\begin{aligned} & \left| \int_X |E_{\lambda_n}[f | B_n]| \lambda_n(dx) - \int_X |E_{\lambda}[f | B_n]| \lambda(dx) \right| \\ &= \left| \left\| \int f \lambda_n(dx) \right\|_{B_n} - \left\| \int f \lambda(dx) \right\|_{B_n} \right| \\ &\leq \left\| \int f (\lambda_n - \lambda)(dx) \right\|_{B_n} = \left(\max_{x \in X} |f(x)| \right) \|\lambda_n - \lambda\|_{B_n} \\ &\leq \left(\max_{x \in X} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \|P_{\theta_i n} - P_{\theta_i}\|_{B_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ここで $\int f \lambda(dx)$ 等は f の不定積分を表わす. したがって上の $(\S)$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |E_{\lambda}[f | B_n]| \lambda(dx) = \int_X |E_{\lambda}[f | B_0]| \lambda(dx)$$

と同等である. なお M_n は L' 空間 $L'(X, A_n, \lambda)$ で稠密であ

るから, [8]の Theorem 2 から次の定理が得られる.

定理 5.1 実験 $(X, B_0, P_0, \theta \in \Theta)$ が実験列 $\{(X, B_n, P_{0n}, \theta \in \Theta)\}$ の極限であり, $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ が A_0 上で dominated であるとする. そのとき各 $(X, B_n, P_{0n}, \theta \in \Theta)$ が実験 $(X, A_n, P_{0n}, \theta \in \Theta)$ に対して十分であれば, $(X, B_0, P_0, \theta \in \Theta)$ は $(X, A_0, P_0, \theta \in \Theta)$ に対して十分である.

ここで定義された極限実験が LeCam [7] の定義した極限実験とどのような関係にあるかということはまだ一切明らかではない.

§ 6 標本空間上の変換群により不変な統計空間.

省略

§ 7 標本空間と母数空間との間の duality.

母数空間上の先験確率は統計学において重要な概念の一つである. これを考えるために, Θ にはその部分集合の σ 代数 $\mathcal{Q}$ を固定して考え, 標本分布 P_0 はすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $P_0(A)$ が θ の関数として $\mathcal{Q}$ 可測なものであるとする, ただし標本空間は X , 統計的構造は $\mathcal{A}$, 標本分布 P_0 は $\mathcal{A}$ 上の確率測度であるとしている. そこで $\mathcal{Q}$ 上の確率測度 μ (これを先験分布という) に関して, $(X \times \Theta, \mathcal{A} \times \mathcal{Q})$ 上の確率分布

$$\tilde{\mathbb{E}}(A \times \alpha) = \int_{\alpha} P_{\theta}(A) \mathbb{E}(d\theta), \quad \alpha \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A},$$

を定義する.

補題. 確率空間 $(Z, \mathcal{Z}, \nu)$ の $\mathcal{Z}$ の部分 σ 代数 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ に対して,

$$\text{すべての } G \in \mathcal{G} \text{ に対して } \nu(G | \mathcal{F}) = \nu(G | \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$$

ν -a.e.

がなりたつときまたそのときに限り

$$\text{すべての } F \in \mathcal{F} \text{ に対して } \nu(F | \mathcal{G}) = \nu(F | \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$$

ν -a.e.

証明は次の2つの式から明かである.

$$\int_{\mathcal{F}} \nu(G | \mathcal{F}) d\nu = \nu(F \cap G) = \int_{\mathcal{G}} \nu(F | \mathcal{G}) d\nu$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \nu(G | \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) d\nu &= \int_Z \nu(G | \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \nu(F | \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) d\nu \\ &= \int_{\mathcal{G}} \nu(F | \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) d\nu. \end{aligned}$$

この補題を確率空間 $(X \times \Omega, \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \tilde{\mathbb{E}})$, $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ の部分 σ 代数 $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ に応用すると

定理 7.1 すべての $B \in \mathcal{B}$, $\gamma \in \mathcal{C}$ に対して

$$\tilde{\mathbb{E}}(B \times \gamma | \mathcal{C} \times \mathcal{B}) = \tilde{\mathbb{E}}(B \times \gamma | (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}))$$

$$\tilde{\xi} - a.e.$$

がなりたつときまたそのときに限り

すべての $C \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathcal{B}$ に対して

$$\tilde{\xi}(C \times \beta | B \times C) = \tilde{\xi}(C \times \beta | (B \cap C) \times (B \cap C))$$

$$\tilde{\xi} - a.e.$$

この定理 7.1 の 2 つの同値な命題のいずれかがなりたつとき、次のような記号であらわす:

$$B : C \cong \mathcal{B} : C \quad (\xi)$$

またすべての ξ について上式がなりたつときは (ξ) を除く.

$\mathbb{C}$ を A の最小の部分 σ 代数 $\{\phi, X\}$ とし, $\mathcal{O}$ を $\mathcal{A}$ の最小の σ 代数 $\{\phi, \Theta\}$ とする. そのとき

$$\tilde{\xi}(A \times \Theta | \mathbb{C} \times \mathcal{A}) = P_{\theta}(A)$$

$$\tilde{\xi}(A \times \Theta | \mathbb{C} \times \mathcal{A}) = P_{\theta}(A | \mathbb{C})$$

$$\tilde{\xi}(X \times \beta | \mathbb{C} \times \mathcal{O}) = \xi(\beta)$$

$$\tilde{\xi}(X \times \beta | \mathbb{C} \times \mathcal{C}) = \xi(\beta | \mathbb{C})$$

$$\tilde{\xi}(A \times \Theta | \mathbb{C} \times \mathcal{O}) = \int_{\Theta} P_{\theta}(A) \xi(d\theta)$$

$$\tilde{\xi}(A \times \beta | \mathbb{C} \times \mathcal{O}) = \int_{\beta} P_{\theta}(A) \xi(d\theta)$$

$$\tilde{\xi}(A \times \Theta | A \times \mathcal{O}) = \text{posterior distr. } \xi(A | x)$$

が $\tilde{\xi} - a.e.$ で成立する. 故に $(\forall \xi: \xi(N) = 0)$ が $N = \phi$ のときは

$$\mathbb{C} \text{ が十分 } \sigma \text{ 代数} \iff A : \mathbb{C} \cong \mathcal{A} : \mathcal{O}.$$

$\mathbb{C}$ が ancillary $\Leftrightarrow \mathbb{C} : \mathbb{O} \cong \mathbb{A} : \mathbb{O}$.

($\mathbb{C}$ のすべての要素 C に対して $P_0(C)$ が $\mathbb{O}$ に無関係であるとき, $\mathbb{C}$ は ancillary σ -algebra という. Basu [12] をみよ).

$\mathbb{B}$ と $\mathbb{C}$ が独立 $\Leftrightarrow \mathbb{B} : \mathbb{C} \cong \mathbb{A} : \mathbb{A}$.

すべての $B \in \mathbb{B}$ について $P_0(B)$ は $\mathbb{B}$ 可測

$\Leftrightarrow \mathbb{B} : \mathbb{O} \cong \mathbb{A} : \mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$ が parametrically sufficient ($\forall A \in \mathbb{A} : P_0(A)$ が $\mathbb{B}$ 可測なこと. Kudō [13], Barankin [14],

Barankin-Kudō [15] をみよ)

$\Leftrightarrow \mathbb{A} : \mathbb{O} \cong \mathbb{A} : \mathbb{B}$

したがって $\mathbb{B}$ が parametrically sufficient であるための必要十分条件は, 母数空間と標本空間を逆に考えたとき, $\mathbb{B}$ が十分な代数となることである.

なお ($\forall \xi : \xi(N) = 0$) と $N = \emptyset$ とが同等であるための1つの十分条件については Barankin-Kudō [16] をみよ.

REFERENCES

- [1] Blackwell, D. and Girshick, M.A.: Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley & Sons, 1954.
- [2] Kudō, H.: Dependent experiments and sufficient statistics, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 4(1953), pp.151-163.
- [3] LeCam, L.: Sufficiency and approximate sufficiency, Ann. Math. Stat. 35(1964), pp.1419-1455.
- [4] Sacksteder, R.: A note on statistical equivalence, Ann.

Math. Stat. 38(1967), pp.787-794.

- [5] Basu, D. and Ghosh, J.K.: Sufficient statistics in sampling from a finite universe, 36th Session of I.S.I. 1967.
- [6] Morimoto, H.: 本講究録掲載論文.
- [7] LeCam, L.: Limits of experiments, Unpublished. 1971
- [8] Kudō, H.: On an approximation to a sufficient statistic including a concept of asymptotic sufficiency, Journ. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. I, 17(1970), 273-290.
- [9] Berger, A.: Remark on separable spaces of probability measures, Ann. Math. Stat. 22(1951), pp.119-120.
- [10] Halmos, P.R. and Savage, L.J.: Applications of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Stat. 20(1949), pp.225-241.
- [11] Dynkin, E. B.: On sufficient and necessary statistics for families of probability distributions, Doklady Acad. Nauk SSSR 75(1950), pp.68-90 (英訳は Amer. Math. Soc., Selected Translation in Math. Stat. and Prob. 1(1961), pp.17-40.)
- [12] Basu, D.: The family of ancillary statistics, Sankhya 21 (1959), pp.247-256.
- [13] Kudō, H.: On partial prior information and the property of parametric sufficiency, Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. I, 1965.
- [14] Barankin, E.W.: Sufficient parameters: solution of the minimal dimensionality problem, Ann. Inst. Stat. Math. 12(1960), pp.91-118.
- [15] Barankin, E.W. and Kudō, H.: A general theorem on sufficiency, unpublished. 1965
- [16] Barankin, E.W. and Kudō, H.: A remark on universal measurability with respect to a subalgebra induced by a statistic, unpublished. 1966