

量子座標環, PBW 基底と 3 次元反射方程式

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

阪大基礎工 尾角正人 (Masato Okado)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

神戸大理 山田泰彦 (Yasuhiko Yamada)

Department of Mathematics, Kobe University

1 序論: 4 面体方程式と 3 次元反射方程式

2 次元 (1 + 1 次元) の量子可積分系で中心的役割を果たすのは Yang-Baxter 方程式であり, 境界のある状況ではこれに反射方程式が加わる. これらは以下で与えられる.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad R_{21}K_2R_{12}K_1 = K_1R_{21}K_2R_{12}. \quad (1)$$

ここで V を適当なベクトル空間として, $R \in \text{End}(V \otimes V)$, $K \in \text{End}(V)$ であり, 前者は $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$, 後者は $\text{End}(V \otimes V)$ における等式である. 添え字は テンソル積 $V \otimes V \otimes V$ や $V \otimes V$ において非自明に作用する成分を表す. 例えば $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ とすると $R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$. また P_{ij} をテンソル積の左から i 番目と j 番目の成分を入れ換える線形演算子として $R_{21} = P_{12}R_{12}P_{12} = \sum_i b_i \otimes a_i$ という慣用的記法を用いている. 方程式 (1) は以下の様に図示される.

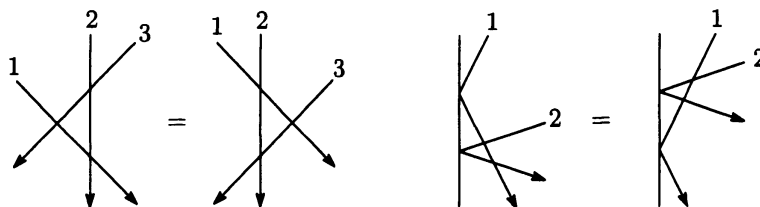


図 1: Yang-Baxter 方程式 (左図) と反射方程式 (右図).

矢印は 1 + 1 次元時空における粒子の世界線という自然な物理的解釈を持つ. 反射方程式の図では, 鉛直で矢印の無い線が境界 (反射壁) である. 各図は 2 体散乱振幅 R あるいは反射振幅 K の合成として得られる全振幅を表し, 等号はそれが素過程の順序に依らないことを表す. このような性質を持つ散乱は因子化散乱と呼ばれ, (1 + 1) 次元量子可積分系に特徴的な様相である. 右図の世界線のうち, 「反射後」に相当する部分を消し, 透過 (直進) する世界線に置き換えると, 形式的に左図に移行する. 記号 K は反射の図に似ていることから慣用化した様である. 一方 2 体散乱の記号は歴史的経路から X ではなく R (または S) が定着している.

Yang-Baxter 方程式と反射方程式の 3 次元版は四面体方程式 (Tetrahedron eq.) [12] と 3 次元反射方

程式 (3D Reflection eq.) [3] として知られ, 以下で与えられる.

$$\text{Tetrahedron eq. : } R_{124}R_{135}R_{236}R_{456} = R_{456}R_{236}R_{135}R_{124}, \quad (2)$$

$$\text{3D Reflection eq. : } R_{489}K_{3579}R_{269}R_{258}K_{1678}K_{1234}R_{654} = R_{654}K_{1234}K_{1678}R_{258}R_{269}K_{3579}R_{489}. \quad (3)$$

ここで V, W を適当なベクトル空間として $R \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$, $K \in \text{End}(W \otimes V \otimes W \otimes V)$ であり, (2) と (3) はそれぞれ $\text{End}(V^{\otimes 6})$ と $\text{End}(W \otimes V \otimes W \otimes V \otimes V \otimes W \otimes V \otimes V)$ における等式である. R と K の添え字はこれらのテンソル積のうち非自明に作用する成分を表す. また $R_{654} = P_{46}R_{456}P_{46}$ とおいた. (2) で空間 4,5,6 を自明化すると Yang-Baxter 方程式に移行する. (3) では V に該当する空間 2,4,5,6,8,9 を自明化すると Yang-Baxter 方程式に移行する. 3次元反射方程式の書き方は色々ある. 例えば (25) を見よ.

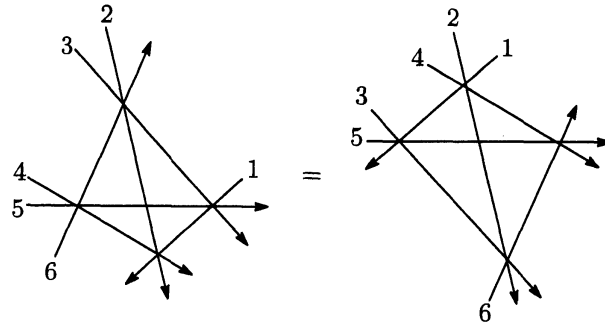


図 2: 四面体方程式 (2).

3次元空間における string(直線) の運動の軌跡は世界面として表される. 以下では string は専ら並進するものとし, 世界面は平面である状況を考える. 基本相互作用として, 3本の string が描く世界面の交点に3体散乱振幅 R を割り当てる. 4面体方程式は4体散乱の因子化条件として A. B. Zamolodchikov により 1980 年に導入された. これまでに幾つもの解が知られている. 例えば [5] の序文の引用文献参照.

3次元反射方程式は以下の様に図示される.

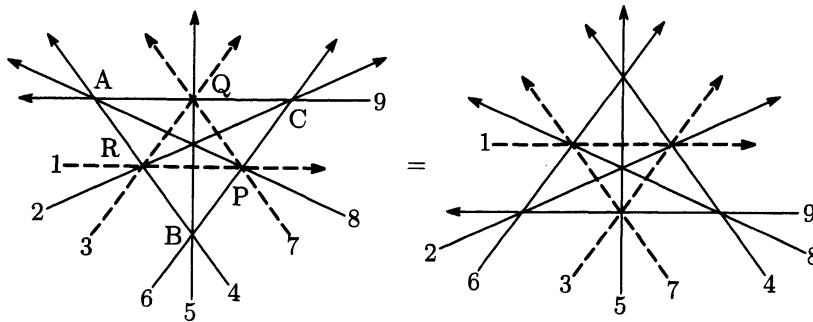


図 3: 3次元反射方程式 (3) の2次元射影.

左辺を描くには, まず1点で交わる3直線 (矢印) 8, 5, 2 をひき, それらの上に点 A, B, C をとる. A, C は交点より矢印の先側, B は矢印の手前側であれば任意にとってよい. 3三角形 ABC と直線 8, 5, 2 の交点を P, Q, R とする. 3三角形 ABC の辺を含む様に直線 4, 6, 9 を, 3三角形 PQR の辺を含む様に点線 1, 3, 7 をひき, 図の様に向き (矢印) をつける. 右辺は, 直線 4, 6, 9 と点線 1, 3, 7 が中心点を超

えて平行移動する様に点 A, B, C をとり直せばよい。3本の直線の交点に R を、2直線と2点線の交点に K を割り当てると3次元反射方程式 (3) となる。3次元反射方程式は3本の string の境界面での反射と3体散乱の組合せの全振幅が素過程の順序に依らないという因子化条件として、Isaev と Kulish により 1997 年に導入された。

図3はそのような散乱と反射が織りなす世界面を境界面へ射影したものであり、以下に述べる様に単純な幾何学的解釈を持つ。まず紙面を境界面と考える。図3の各点線に、それを共通の淵に持つ半平面の対を割り当てる。これは3次元空間を並進して境界面で反射される string の世界面であり、開いた薄い本を想起されたい。点線は本の背表紙に、反射前後の世界面は本の表紙と裏表紙に対応する。本の開きの角度は π 未満であれば任意であり、入射角 = 反射角から本は表紙側にも裏表紙側にも傾かずに机(境界面)の上に置かれている。String は3本あるので、そのような本が3冊ある。例えばそのうちの2冊は、その背表紙(点線3と点線7)が点 Q で交わる様に置かれている。(ここでの「本」は勿論重なり合うことができる。) この2冊の表紙と裏表紙の交線を机表面に射影したのが直線5と9である。背表紙の交点 Q に反射振幅 K_{3579} を割り当てる。 K_{1678}, K_{1234} も同様である。以上述べた3冊の本を机の表面に射影すると前パラグラフで述べた通りの作図になることは初等幾何の簡単な練習問題である。背表紙に対応する点線1, 3, 7は境界面上に存在するので(3)で K の添え字にだけ登場し、 R には現れない。境界面上の自由度を空間 W , その他を V に対応させると $K \in \text{End}(W \otimes V \otimes W \otimes V)$ となる。

最近3次元反射方程式に関して以下の進展 [5, 6] があった。

- (i) 量子座標環の表現論による解。
- (ii) 双有理変換版, 組合せ論的類似。
- (iii) 量子展開環の PBW 基底の遷移行列との関係。

本稿では主に (i) について述べ、(iii) に簡単に触れる。なお (i) は Isaev-Kulish による方程式の提唱以来初めての解である。

2 量子座標環とその表現

$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 環とし、対応する Lie 群上の関数環の q 変形 (量子座標環とも呼ぶ) [2, 8, 10] を $A_q(\mathfrak{g})$ と書く。以下 q は generic とする。最も簡単な例として $A_q(\mathfrak{sl}_2)$ は生成元 $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ と関係式

$$\begin{aligned} t_{11}t_{21} &= qt_{21}t_{11}, & t_{12}t_{22} &= qt_{22}t_{12}, & t_{11}t_{12} &= qt_{12}t_{11}, & t_{21}t_{22} &= qt_{22}t_{21}, \\ [t_{12}, t_{21}] &= 0, & [t_{11}, t_{22}] &= (q - q^{-1})t_{21}t_{12}, & t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21} &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

により定義される。 $A_q(\mathfrak{g})$ は量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の双対に対応し、Hopf 代数の構造を持つ。特に今の例では余積は $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$ で与えられる。

$\text{Osc}_q = \langle \mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k} \rangle$ を q -boson (Oscillator), 即ち関係式

$$\mathbf{k} \mathbf{a}^+ = q \mathbf{a}^+ \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \mathbf{a}^- = q^{-1} \mathbf{a}^- \mathbf{k}, \quad \mathbf{a}^- \mathbf{a}^+ = 1 - q^2 \mathbf{k}^2, \quad \mathbf{a}^+ \mathbf{a}^- = 1 - \mathbf{k}^2 \quad (5)$$

を満たす結合代数とする。 Osc_q は Fock 空間 $\mathcal{F}_q = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}(q)|m\rangle$ に

$$\mathbf{k}|m\rangle = q^m|m\rangle, \quad \mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \mathbf{a}^-|m\rangle = (1 - q^{2m})|m-1\rangle \quad (6)$$

により既約に作用する。今後 $\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k}$ を $\text{End}(\mathcal{F}_q)$ の元と見なす。 $A_q(\mathfrak{sl}_2)$ は次の表現を持つ。

$$\pi : \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu \mathbf{a}^- & \alpha \mathbf{k} \\ -q\alpha^{-1} \mathbf{k} & \mu^{-1} \mathbf{a}^+ \end{pmatrix}. \quad (7)$$

ここで α, μ は 0 でない任意パラメータである. 以下では本質的役割をしないので専ら $\alpha = \mu = 1$ とする.

定理 1. ([10])

- (i) $A_q(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図の頂点 i に付随する表現 π_i を持つ.
- (ii) $A_q(\mathfrak{g})$ の既約表現は $\mathfrak{g}$ のワイル群 $W(\mathfrak{g})$ の元と 1:1 対応する.
- (iii) 単純鏡映による簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W(\mathfrak{g})$ に対応する既約表現は $\pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{i_r}$ に同値.

注. (i) 頂点 i に付随する $\mathfrak{g}$ の sl_2 部分代数を $sl_{2,i}$ とするとき, π_i は $A_{q_i}(sl_{2,i}) \hookrightarrow A_q(\mathfrak{g})$ により (7) を経由する表現のこと. ここで $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2}$. 以下 π_i を基本表現と呼ぶ. (ii), (iii) 正確には (7) の μ (極大トーラスの元に対応) と α の自由度を除外するとこの主張が成り立つ. 詳しくは [10] 参照のこと. 以下 $\pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{i_r}$ を $\pi_{i_1, \dots, i_r}$ と略記する.

定理 1 の系として以下が成り立つ.

$$s_{i_1} \cdots s_{i_r} = s_{j_1} \cdots s_{j_r} \text{ が簡約表示ならば } \pi_{i_1, \dots, i_r} \simeq \pi_{j_1, \dots, j_r}. \quad (8)$$

特に同型写像 (以下 intertwiner と呼ぶ) が定数倍を除いて一意的に定まる.

3 A 型の場合：四面体方程式

$A_q(sl_n)$ は生成元 t_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) と関係式

$$t_{ik}t_{jk} = qt_{jk}t_{ik} \ (i < j), \quad t_{ki}t_{kj} = qt_{kj}t_{ki} \ (i < j), \quad [t_{ik}, t_{jl}] = \begin{cases} 0 & (i < j, k > l), \\ (q - q^{-1})t_{jk}t_{il} & (i < j, k < l) \end{cases}$$

及び 量子行列式 $= 1$, 即ち $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-q)^{\ell(\sigma)} t_{1\sigma_1} \cdots t_{n\sigma_n} = 1$ により定義される. ここで $\ell(\sigma)$ は置換 σ の長さである. 余積は $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$ で与えられる. 前節の (4) は $n = 2$ に該当する.

$n = 3$ の場合を考えよう. $W(sl_3) = \langle s_1, s_2 \rangle$ であり, 二つの基本表現は以下の様に与えられる.

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{a}^- & \mathbf{k} & 0 \\ -q\mathbf{k} & \mathbf{a}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\pi_1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^- & \mathbf{k} \\ 0 & -q\mathbf{k} & \mathbf{a}^+ \end{pmatrix} (\pi_2). \quad (9)$$

Coxeter 関係式 $s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1$ により同型 $\pi_{212} \simeq \pi_{121}$ が成り立つ. そこで $\Phi \in \text{End}(\mathcal{F}_q^{\otimes 3})$ を以下の条件で特徴づけられる intertwiner とする. ($|a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |c\rangle$ を $|a, b, c\rangle$ と略記する.)

$$\pi_{212}(g) \circ \Phi = \Phi \circ \pi_{121}(g) \quad (\forall g \in A_q(sl_3)), \quad \Phi(|0, 0, 0\rangle) = |0, 0, 0\rangle \text{ (規格化)}. \quad (10)$$

ここで例えば $\pi_{212}(g)$ とは $(\pi_2 \otimes \pi_1 \otimes \pi_2)(\Delta(g))$ で $\Delta(t_{ij}) = \sum_{k,l} t_{ik} \otimes t_{kl} \otimes t_{lj}$ の意味である. 今後も同様に略記し, intertwiner は全て「真空」に 1 倍で作用, つまり $|0, 0, \dots, 0\rangle \mapsto |0, 0, \dots, 0\rangle$ となる様に規格化を定める. Φ は以下の明示式を持つ. ([4, 1])

$$R := \Phi P_{13}, \quad R|i, j, k\rangle = \sum_{a, b, c} R_{ijk}^{abc} |a, b, c\rangle, \quad (11)$$

$$R_{ijk}^{abc} = \delta_{i+j, a+b} \delta_{j+k, b+c} \sum_{\lambda, \mu \geq 0, \lambda+\mu=b} (-1)^\lambda q^{i(c-j)+(k+1)\lambda+\mu(\mu-k)} \begin{bmatrix} i, j, c+\mu \\ \mu, \lambda, i-\mu, j-\lambda, c \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$(q)_i = \prod_{j=1}^i (1 - q^j), \quad \begin{bmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1}^r (q^2)_{i_m}}{\prod_{m=1}^s (q^2)_{j_m}} & \forall i_m, j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

なお [4] の式には誤植があり, [1] では量子座標環とは別の文脈で記述されている. (12) における因子 $\delta_{i+j, a+b} \delta_{j+k, b+c}$ により, R は有限次元行列の無限直和になっている. また以下の関係式が成り立つ.

$$R^{-1} = R, \quad R_{ijk}^{abc} = R_{kji}^{cba}, \quad (q^2)_a (q^2)_b (q^2)_c R_{ijk}^{abc} = (q^2)_i (q^2)_j (q^2)_k R_{abc}^{ijk}, \quad (13)$$

$$R_{ijk}^{abc} \in \mathbb{Z}[q], \quad R_{ijk}^{abc}|_{q=0} = \delta_{i, b+(a-c)_+} \delta_{j, \min(a, c)} \delta_{k, b+(c-a)_+}. \quad (14)$$

ただし $(y)_+ = \max(0, y)$ である.

例 2. 行列要素 R_{314}^{abc} で 0 でないものを全て列挙する.

$$\begin{aligned} R_{314}^{041} &= -q^2(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8), & R_{314}^{132} &= (1-q^6)(1-q^8)(1-q^4-q^6-q^8-q^{10}), \\ R_{314}^{223} &= q^2(1+q^2)(1+q^4)(1-q^6)(1-q^6-q^{10}), & R_{314}^{405} &= q^{12}, \\ R_{314}^{314} &= q^6(1+q^2+q^4-q^8-q^{10}-q^{12}-q^{14}). \end{aligned}$$

定理 3. ([4]) R は四面体方程式 (2) を満たす.

証明. $A_q(sl_4)$ を考える. ワイル群 $W(sl_4) = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ の単純鏡映は $s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1, s_3 s_2 s_3 = s_2 s_3 s_2, s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1 = s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$ を満たす. 最後の等式是最長元の 2 種類の簡約表示である. 従って (8) から $A_q(sl_4)$ 加群の intertwiner として以下の関係式を満たす $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}$ が一意的存在する.

$$\pi_{212} \circ \Phi^{(1)} = \Phi^{(1)} \circ \pi_{121}, \quad \pi_{323} \circ \Phi^{(2)} = \Phi^{(2)} \circ \pi_{232}, \quad \pi_{123121} \circ \Phi^{(3)} = \Phi^{(3)} \circ \pi_{323123}. \quad (15)$$

また $s_1 s_3 = s_3 s_1$ であるが, これに対応する $\pi_{13} \simeq \pi_{31}$ の intertwiner は単に成分の入れ替え P_{12} である. 関係式 $s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1 = s_3 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$ は $s_1 s_3 = s_3 s_1, s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1, s_3 s_2 s_3 = s_2 s_3 s_2$ の組み合わせにより導かれる. これに対応して $\Phi^{(3)}$ は $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ と P の合成により構成できるが, そのやり方には以下の 2 通りがある.

<u>123121</u> $\Phi_{456}^{(1)}$	<u>123121</u> P_{34}
<u>123212</u> $\Phi_{234}^{(2)}$	<u>121321</u> $\Phi_{123}^{(1)}$
<u>132312</u> $P_{12} P_{45}$	<u>212321</u> $\Phi_{345}^{(2)}$
<u>312132</u> $\Phi_{234}^{(1)}$	<u>213231</u> $P_{23} P_{56}$
<u>321232</u> $\Phi_{456}^{(2)}$	<u>231213</u> $\Phi_{345}^{(1)}$
<u>321323</u> P_{34}	<u>232123</u> $\Phi_{123}^{(2)}$
<u>323123</u>	<u>323123</u>

(16)

下線はその右側に書いてある intertwiner が非自明に作用する成分を表す. $\Phi^{(3)}$ の一意性から

$$P_{34} \Phi_{456}^{(2)} \Phi_{234}^{(1)} P_{12} P_{45} \Phi_{234}^{(2)} \Phi_{456}^{(1)} = \Phi_{123}^{(2)} \Phi_{345}^{(1)} P_{23} P_{56} \Phi_{345}^{(2)} \Phi_{123}^{(1)} P_{34}. \quad (17)$$

$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ を特徴づける (15) は (10) と同じである事は容易に確認できる. よって (11) から $\Phi_{ijk}^{(1)} = \Phi_{ijk}^{(2)} = \Phi = R_{ijk} P_{ik}$ であり, (17) に代入して P_{ij} 達を相殺すれば四面体方程式 (2) が得られる. $\square$

四面体方程式の解という意味で R を「3 次元 R 行列」と呼ぶ. (2) で $V = \mathcal{F}_q$ に該当する. Intertwiner として (11) の様に Φ と R を併用しているが, 通常の量子 R 行列の場合にも R と $\check{R}$ を導入すると便利であった事を想起されたい.

4 C型の場合: 3次元反射方程式

量子座標環 $A_q(sp_{2n})$ には所謂 RTT 関係式等による記述 [8] がある. 本稿で扱うのは $A_q(sp_6)$ の場合であり, 生成元 t_{ij} ($1 \leq i, j \leq 6$) を持ち, 余積は A 型と形式的に同じ式 $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$ で与えられる. 関係式的具体形については [5, sec.3] を参照のこと. 基本表現 π_1, π_2, π_3 による $(t_{ij})_{1 \leq i, j \leq 6}$ の像は, (7) の α, μ に相当するパラメータの自由度を除くと以下の様になる.

$$\begin{aligned} & \pi_1 \quad \begin{pmatrix} a^- & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -qk & a^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^- & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & qk & a^+ \end{pmatrix}, \quad \pi_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^- & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -qk & a^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^- & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qk & a^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^- & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 K & A^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで $A^\pm, K$ は Osc_{q^2} の生成元であり, (5) で q を q^2 に置き換えた関係式を満たす. π_1, π_2 は $\mathcal{F}_q$, π_3 は $\mathcal{F}_{q^2}$ 上の表現になることに注意する.

ワイル群 $W(sp_6) = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ の単純鏡映の関係式 $s_1 s_3 = s_3 s_1$, $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, $s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2$ と (8) から同型

$$\pi_{13} \simeq \pi_{31}, \quad \pi_{121} \simeq \pi_{212}, \quad \pi_{2323} \simeq \pi_{3232} \quad (18)$$

が成り立つ. 左側の二つの intertwiner が P_{12} と $\Phi = RP_{13}$ で与えられる事は定理 3 の時と同様に容易に示せる. ここで R は 3次元 R 行列 (11) である. 第3式の intertwiner を Ψ とすると

$$\Psi : \mathcal{F}_q \otimes \mathcal{F}_{q^2} \otimes \mathcal{F}_q \otimes \mathcal{F}_{q^2} \rightarrow \mathcal{F}_{q^2} \otimes \mathcal{F}_q \otimes \mathcal{F}_{q^2} \otimes \mathcal{F}_q, \quad \pi_{3232} \circ \Psi = \Psi \circ \pi_{2323} \quad (19)$$

で特徴づけられる. Ψ の明示式を与えよう. まず

$$K = \Psi P_{14} P_{23} \in \text{End}(\mathcal{F}_{q^2} \otimes \mathcal{F}_q \otimes \mathcal{F}_{q^2} \otimes \mathcal{F}_q), \quad K|i, j, k, l\rangle = \sum_{a, b, c, d} K_{ijkl}^{abcd} |a, b, c, d\rangle \quad (20)$$

により K を導入する.

定理 4. ([5])

$$\begin{aligned} K_{ijkl}^{abcd} &= \delta_{a+b+c, i+j+k} \delta_{b+2c+d, j+2k+l} \frac{(q^4)_i}{(q^4)_a} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{(-1)^{\alpha+\gamma}}{(q^4)_{c-\beta}} q^{\phi_1} \\ &\times K_{a, b+c-\alpha-\beta-\gamma, 0, c+d-\alpha-\beta-\gamma}^{i, j+k-\alpha-\beta-\gamma, 0, k+l-\alpha-\beta-\gamma} \left[\begin{matrix} k, c-\beta, j+k-\alpha-\beta, k+l-\alpha-\beta \\ \alpha, \beta, \gamma, b-\alpha, d-\alpha, k-\alpha-\beta, c-\beta-\gamma \end{matrix} \right], \quad (21) \\ \phi_1 &= \alpha(\alpha+2c-2\beta-1) + (2\beta-c)(b+c+d) + \gamma(\gamma-1) - k(j+k+l). \end{aligned}$$

ここで和は $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ にわたる有限和である. (21) の右辺の K の行列要素は次の表示を持つ.

$$\begin{aligned} K_{ij0l}^{ab0d} &= \delta_{a+b, i+j} \delta_{b+d, j+l} \sum_{\lambda} (-1)^{m+\lambda} \frac{(q^4)_{a+\lambda}}{(q^4)_a} q^{\phi_2} \left[\begin{matrix} j, l \\ \lambda, l-\lambda, b-\lambda, j-b+\lambda \end{matrix} \right], \quad (22) \\ \phi_2 &= (a+i+1)(b+l-2\lambda) + b-l. \end{aligned}$$

ここで和は $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ にわたる有限和である.

R と同様に K も有限次元行列の無限直和になっている. 更に K は以下の性質を持つ [5].

$$K^{-1} = K, \quad (q^4)_a (q^2)_b (q^4)_c (q^2)_d K_{ijkl}^{abcd} = (q^4)_i (q^2)_j (q^4)_k (q^2)_l K_{abcd}^{ijkl}, \quad (23)$$

$$K_{ijkl}^{abcd} \in \mathbb{Z}[q], \quad K_{ijkl}^{abcd}|_{q=0} = \delta_{i,a'} \delta_{j,b'} \delta_{k,c'} \delta_{l,d'}, \quad a' = x+a+b-d, \quad b' = c+d-x - \min(a, c+x), \quad (24)$$

$$c' = \min(a, c+x), \quad d' = b+(c-a+x)_+, \quad x = (c-a+(d-b)_+)_+.$$

例 5. 行列要素 K_{2110}^{abcd} で 0 でないものを全て列挙する.

$$\begin{aligned} K_{2110}^{1300} &= q^8(1-q^8), & K_{2110}^{2110} &= -q^4(1-q^8+q^{14}), \\ K_{2110}^{2201} &= -q^6(1+q^2)(1-q^2+q^4-q^6-q^{10}), & K_{2110}^{3011} &= 1-q^8+q^{14}, \\ K_{2110}^{3102} &= -q^{10}(1-q+q^2)(1+q+q^2), & K_{2110}^{4003} &= q^4. \end{aligned}$$

定理 6. ([5]) 3次元 R 行列 R と K は次の 3次元反射方程式を満たす.

$$R_{456} R_{489} K_{3579} R_{269} R_{258} K_{1678} K_{1234} = K_{1234} K_{1678} R_{258} R_{269} K_{3579} R_{489} R_{456}. \quad (25)$$

性質 (13) により $R_{456} = R_{654}^{-1}$ なので, (25) は $R_{456} \times (3) \times R_{456}$ に他ならない. (3) で $V = \mathcal{F}_q$, $W = \mathcal{F}_{q^2}$ に該当する.

証明. 定理 3 と同様である. ワイル群 $W(sp_6)$ の最長元の二つの簡約表示とそれに伴う $A_q(sp_6)$ 加群の同型

$$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1, \quad \pi_{123212323} \simeq \pi_{323212321} \quad (26)$$

を考える. 最長元の簡約表示を Coxeter 関係式を用いて書き換える過程に対応して, (18) の intertwiner P, Φ, Ψ の合成により上の同型を 2通りのやり方で構成できる.

123212323	Ψ_{6789}	123212323	Φ_{456}^{-1}
123213232	P_{56}	123121323	$P_{34} P_{67}$
123231232	Ψ_{2345}	121323123	Φ_{123}
132321232	Φ_{567}^{-1}	212323123	Ψ_{3456}
132312132	$P_{12} P_{45} P_{78}$	213232123	Φ_{678}^{-1}
312132312	Φ_{234}	213231213	$P_{23} P_{56} P_{89}$
321232312	Ψ_{4567}	231213231	Φ_{345}
321323212	Φ_{789}^{-1}	232123231	Ψ_{5678}
321323121	$P_{34} P_{67}$	232132321	P_{45}
323121321	Φ_{456}	232312321	Ψ_{1234}
323212321		323212321	

従って intertwiner の一意性から

$$\begin{aligned} & \Phi_{456} P_{34} P_{67} \Phi_{789}^{-1} \Psi_{4567} \Phi_{234} P_{12} P_{45} P_{78} \Phi_{567}^{-1} \Psi_{2345} P_{56} \Psi_{6789} \\ &= \Psi_{1234} P_{45} \Psi_{5678} \Phi_{345} P_{23} P_{56} P_{89} \Phi_{678}^{-1} \Psi_{3456} \Phi_{123} P_{34} P_{67} \Phi_{456}^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ. $\Phi_{ijk} = R_{ijk} P_{ik}$, $\Psi_{ijkl} = K_{ijkl} P_{il} P_{jk}$ を代入して P_{ij} 達を相殺すると (25) が得られる. $\square$

3次元反射方程式の解という意味で K を「3次元 K 行列」と呼ぶ.

5 PBW 基底の遷移行列との関係

量子展開環 $U_q(sl_3)$ の部分代数 $U_q^+ = U_q^+(sl_3) = \langle e_1, e_2 \rangle$ を考える. ここで e_1, e_2 は Chevalley 生成元であり, q -Serre 関係式

$$e_1^2 e_2 - (q + q^{-1}) e_1 e_2 e_1 + e_2 e_1^2 = 0, \quad e_2^2 e_1 - (q + q^{-1}) e_2 e_1 e_2 + e_1 e_2^2 = 0 \quad (27)$$

を満たす. $A = (a, b, c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ に対して $\bar{A} = (c, b, a)$ とし,

$$E_A = e_1^{(a)} e_{12}^{(b)} e_2^{(c)} \in U_q^+, \quad E'_{\bar{A}} = \chi(E_A) = e_2^{(c)} e_{21}^{(b)} e_1^{(a)} \in U_q^+, \quad (28)$$

$$e_i^{(a)} = \frac{e_i^a}{[a]_q!} \quad (i = 1, 2, 12, 21), \quad e_{12} = \frac{e_1 e_2 - q e_2 e_1}{q^{-1} - q}, \quad e_{21} = \frac{e_2 e_1 - q e_1 e_2}{q^{-1} - q} \quad (29)$$

とおく. ここで χ は $\chi(e_1) = e_1, \chi(e_2) = e_2$ を満たす U_q^+ の反代数射である. また $[a]_q! = [a]_q [a-1]_q \cdots [1]_q$, $[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ という記号を用いた.

$\{E_A | A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3\}$ および $\{E'_{\bar{A}} | A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3\}$ は共に U_q^+ の PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) 基底として知られている. Lusztig [7] に従い遷移行列 $\gamma = (\gamma_{ijk}^{abc})$ を

$$E_A = \sum_B \gamma_B^A E'_B, \quad \text{i.e.,} \quad e_1^{(a)} e_{12}^{(b)} e_2^{(c)} = \sum_{i,j,k} \gamma_{ijk}^{abc} e_2^{(c)} e_{21}^{(b)} e_1^{(a)} \quad (30)$$

により定義する.

定理 7. ([9]) R を 3 次元 R 行列 (11) とすると $\gamma = R$. 行列要素 (12) で書くと $\gamma_{ijk}^{abc} = R_{ijk}^{abc}$.

R の明示式 (12) における因子 $\delta_{i+j, a+b} \delta_{j+k, b+c}$ は $E_{a,b,c}$ と $E'_{k,j,i}$ のウェイトの一致条件と同値である.

類似の結果はランク 2 の $\mathfrak{g}$ について一般的に成立する [6]. ここでは sp_4 の場合の結果を述べるに始める. $U_q^+ = U_q^+(sp_4) = \langle e_1, e_2 \rangle$ を $U_q(sp_4)$ の部分代数とする. q -Serre 関係式は以下のとおり.

$$e_1 e_2^2 - (q^2 + q^{-2}) e_2 e_1 e_2 + e_2^2 e_1 = 0, \quad e_2 e_1^3 - (q^2 + 1 + q^{-2}) e_1 e_2 e_1^2 + (q^2 + 1 + q^{-2}) e_1^2 e_2 e_1 - e_1^3 e_2 = 0.$$

$A = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ に対して $\bar{A} = (d, c, b, a)$ とし, PBW 基底 $E_A, E'_{\bar{A}}$ を次の様に定義する.

$$E_A = e_2^{(a)} e_{12}^{(b)} e_{112}^{(c)} e_1^{(d)} \in U_q^+, \quad E'_{\bar{A}} = \chi(E_A) = e_1^{(d)} e_{211}^{(c)} e_{21}^{(b)} e_2^{(a)} \in U_q^+, \quad (31)$$

$$e_i^{(a)} = \frac{e_i^a}{[a]_q!} \quad (i = 1, 12, 21), \quad e_i^{(a)} = \frac{e_i^a}{[a]_{q^2}!} \quad (i = 2, 112, 211), \quad (32)$$

$$e_{12} = e_1 e_2 - q^2 e_2 e_1, \quad e_{112} = \frac{e_1 e_{12} - e_{12} e_1}{q + q^{-1}}, \quad e_{21} = e_2 e_1 - q^2 e_1 e_2, \quad e_{211} = \frac{e_{21} e_1 - e_1 e_{21}}{q + q^{-1}}. \quad (33)$$

ここで χ の定義は sl_3 の場合と同じである. $E_A, E'_{\bar{A}}$ は [11] の E_2^A, E_1^A で $v = q^{-1}$ としたものに等しい. (30) と同様に遷移行列 $\gamma = (\gamma_{ijkl}^{abcd})$ を定義する. すなわち,

$$e_2^{(a)} e_{12}^{(b)} e_{112}^{(c)} e_1^{(d)} = \sum_{i,j,k,l} \gamma_{ijkl}^{abcd} e_1^{(d)} e_{211}^{(c)} e_{21}^{(b)} e_2^{(a)}.$$

定理 8. ([6]) K を 3 次元 K 行列 (定理 4) とすると $\gamma = K$. 行列要素で書くと $\gamma_{ijkl}^{abcd} = K_{ijkl}^{abcd}$.

K の明示式 (21) における因子 $\delta_{a+b+c, i+j+k} \delta_{b+2c+d, j+2k+l}$ は $E_{a,b,c,d}$ と $E'_{l,k,j,i}$ のウェイトの一致条件と同値である.

定理 7 と定理 8 により PBW 基底の遷移行列の明示式が与えられた事になる. また性質 (14) と (24) は Lusztig の結果 [7, Prop.2.3] と整合する事がわかる.

(2013 年 1 月 31 日提出)

参考文献

- [1] V. V. Bazhanov and S. M. Sergeev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, J. Phys. A: Math. Theor. **39** 3295–3310 (2006).
- [2] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), pp798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987).
- [3] A. P. Isaev and P. P. Kulish, *Tetrahedron reflection equations*, Mod. Phys. Lett. A**12** 427–437 (1997).
- [4] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky, *2-Categories and Zamolodchikov tetrahedron equations*, Proc. Symposia in Pure Math. **56** 177–259 (1994).
- [5] A. Kuniba and M. Okado, *Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions*, J. Phys. A: Math.Theor. **45** (2012) 465206 (27pp).
- [6] A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, in preparation.
- [7] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** 447–498 (1990).
- [8] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** 193–225 (1990).
- [9] S. M. Sergeev, *Tetrahedron equations and nilpotent subalgebras of $\mathcal{U}_q(sl_n)$* , Lett. Math. Phys. **83** 231–235 (2008).
- [10] Y. S. Soibelman, *Selected topics in quantum groups*, Int. J. Modern Phys. A**7** Suppl. **1B** 859–887 (1992).
- [11] N. Xi, *Canonical basis for type B_2* , J. Alg. **214** 8–21 (1999).
- [12] A. B. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, Soviet Phys. JETP **79** 641–664 (1980).