

Orientation reversing involutions on 3-manifolds

大阪市大・理 小林 雅子 (Masako Kobayashi)

§1

Closed connected orientable 3-manifold M 上 orientation reversing involution τ をもつものについて、その fixed point set, $\text{Fix } \tau$, の topological type を調べます。

Smith theory により、 $\text{Fix } \tau$ の各 component は point か surface であり、 $\chi(\text{Fix } \tau) \equiv 0 \pmod{2}$ (χ は Euler characteristic) であることがわかります。一方、一般に compact ENR 上の $\mathbb{Z}_m$ action f について $\chi(\text{Fix } f) = L(f)$ ($L(f)$ は f の Lefschetz number) であることが知られています。(Tom Diek [1], Huang [2])。又、A. Kawauchi [3] により、 $\text{Tor } H_1(M; \mathbb{Z}) \cong A \oplus A$ or $\mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$ (A はある abelian gp), $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) \equiv 0 \pmod{2}$ iff $\text{Tor } H_1(M; \mathbb{Z}) \cong A \oplus A$ が証明されました。

さらにいくつかの $\text{Fix } \tau$ に関する何らかの不等式等を得て、 (M, τ) が与えられたときの $\text{Fix } \tau$ の topological type (genus 数, component 数など) の必要十分条件を得ることが目標です。

Theorem 1. 任意の (M, τ) について次が成立.

$$1) \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(Fix \tau; \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) + \beta(M)$$

($\beta(M)$ は M の first (integral) Betti number)

$$2) H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus^* \mathbb{Z} \oplus \bigoplus^* \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}}$$

(p_i : prime, $p_i = 2 \Rightarrow b_i \neq 1$) であるとき, $Fix \tau$ に含まれる nonorientable surfaces のうち odd genus のものの数は a を越えない.

又, 対象を rational homology 3-sphere S (つまり $H_1(S; \mathbb{Z})$ は有限) で involution τ をもつものに限ると, 容易に次が得られます.

Proposition 2. 任意の (S, τ) について次のいづれかが成立.

$$1) Fix \tau = S^2 \text{ (2-sphere), } S = S' \# (-S') \text{ (possibly } S' = S^3)$$

ここで S' は S' を $(-S')$ にうつす.

2) $Fix \tau$ は points と nonorientable surfaces からなる.

$\therefore$ Hemple [7] により $Fix \tau$ は genus 1 以上の orientable surface を含まない. もし $Fix \tau$ に S^2 が含まれていれば, $S - S^2$ は disconnected で, τ はその components を入れかえる.

又. Theorem 1 の Corollary として.

Corollary (S, τ) について. $\text{Fix } \tau$ が 2 つの isolated points から成る場合以外は. $\text{Fix } \tau$ に含まれる points の数は. $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z})$ を越えない.

次の定理は. "rational homology 3-sphere S with orientation reversing involution τ " については. 前述の定理の不等式が必要十分条件であることを示しています.

Theorem 3. 有限アベル群 G と. nonorientable surfaces $F_1, F_2, \dots, F_n$ が次の 1) ~ 5) を満たすならば. (S, τ) で $H_1(S; \mathbb{Z}) \cong G$, $\text{Fix } \tau = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \cup 2 - \sum_{i=1}^n \chi(F_i) \text{ points}$ となるものが存在する.

$$1) \sum_{i=1}^m \chi(F_i) \leq 2$$

2) ある有限アベル群 A について

$$G \cong A \oplus A \text{ 又は } \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A$$

$$3) \sum_{i=1}^m \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_i; \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} G \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$4) \sum_{i=1}^m \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_i; \mathbb{Z}_2) \equiv \dim_{\mathbb{Z}_2} G \oplus \mathbb{Z}_2 \pmod{2}$$

$$5) G \cong \bigoplus^s \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}} \quad (p_i: \text{prime}, p_i=2 \Rightarrow b_i \neq 1)$$

のとき. $F_1, \dots, F_n$ のうちの odd genus のものの数は

a を越えない。

§ 2

以下、Theorem 1 と 3 の証明の outline を示します。(Theorem 1 の 1) については [5] を、その他は [4] を参照してください。)

◦ Theorem 1, 1) の証明.

$i_*: H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z})$ を inclusion map から誘導される homomorphism とします。

$\ker i_*$ の元 x について、 M 内に 2-chain D で $[\partial D] = x$ となるものが存在しますか。 $D - \tau D$ は M 内の 2-cycle になることに注意して、 $\ker i_*$ の subgroup G を次のように定めます。

$$G = \left\{ x \in \ker i_* \mid \exists D: 2\text{-chain in } M \text{ s.t. } [\partial D] = x \wedge [D - \tau D] = 0 \in H_2(M; \mathbb{Z}) \right\}$$

$\phi: \ker i_* \rightarrow \ker i_*/G$ を canonical homomorphism とします。

各 $y \in \ker i_*/G$ について、 $\phi(\bar{y}) = y$ となる $\bar{y} \in \ker i_*$ をとると、 M 内の 2-chain D で $[\partial D] = \bar{y}$ となるものが存在するわけですが、 $[\partial(\tau D)] = y$ 、 $(D + \tau D) - \tau(D + \tau D) = 0$ であることから、 $\ker i_*/G \cong \bigoplus^m \mathbb{Z}_2$ (m はある自然数) であることがわかります。

と: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ を $\ker l_*^1 / G \cong \bigoplus^m \mathbb{Z}_2$ の basis とする.

M 内の 2-chains $D_1, D_2, \dots, D_m$ 1. $\phi([\partial D_i]) = \gamma_i$ ($i=1, 2, \dots, m$)

となるものが存在しますが. これらからなる 2-cycles

$[D_1 - \tau D_1], [D_2 - \tau D_2], \dots, [D_m - \tau D_m]$ は $(M; \mathbb{Z})$ 1. linearly

independent であることがわかります. よって $m \leq \beta_2(M)$

$= \beta_1(M)$ ($\beta_i(M)$ は M の i -th Betti number.)

一方 $G \leq 2H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z})$ であることがの方法で示せます.

G の各元 x について M 内の 2-chain D で $[\partial D] = x$ かつ

$[D - \tau D] = 0 \in H_2(M; \mathbb{Z})$. となるものが存在 M 内の

3-chain E 1. $\partial E = D - \tau D$ となるものが存在します. $D - \tau D$

と $\text{Fix } \tau$ との交わり方をよく見ると.

$$0 = [\partial(E \cap \text{Fix } \tau)]_2 = [x]_2 \in H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) / 2H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z})$$

となつてゐることがわかります.

以上のことと.

$$\text{Im } l_*^1 \cong H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) / \ker l_*^1 \cong H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) / G \ker l_*^1 / G$$

に注意すると.

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Im } l_*^1 \otimes \mathbb{Z}_2 &\geq \dim_{\mathbb{Z}_2} (H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) / G) \otimes \mathbb{Z}_2 - \dim_{\mathbb{Z}_2} (\ker l_*^1 / G) \otimes \mathbb{Z}_2 \\ &\geq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) - m \geq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) - \beta_1(M) \end{aligned}$$

$$\text{一方 } \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Im } l_*^1 \otimes \mathbb{Z}_2 \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2)$$

よって

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) + \beta_1(M)$$

• Theorem 1.2) の証明

N を $\text{Fix } \tau$ の τ -invariant regular neighborhood, $M' = M - \text{Int } N$ とすると $M = M' \cup N$ $\partial N = M' \cap N$ に関する Mayer-Vietoris 完全系列は次のようになります.

$$\rightarrow H_1(\partial N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} H_1(M'; \mathbb{Z}) \oplus H_1(N; \mathbb{Z}) \xrightarrow{J} H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow$$

$$\because I = (i_{1*}, i_{2*}) \quad i_1: \partial N \rightarrow M', i_2: \partial N \rightarrow N; \text{inclusion maps}$$

とよから、 $\text{Fix } \tau$ に含まれる odd genus の nonorientable surface F について $\text{Im}((i_2|_{\partial N(F)})_* : H_1(\partial(F); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(F; \mathbb{Z}))$ は $H_1(F; \mathbb{Z})$ の torsion part と交わらないことがわかります.

($i_2|_{\partial N(F)}$ は $\partial N(F) \rightarrow F$ という double covering map となり、 τ によることに注意)

よって $H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}) \cong H_1(N; \mathbb{Z})$ の subgroup τ . $\text{Fix } \tau$ に含まれる odd genus の nonorientable surface の torsion part を含む group は、 $\text{Im } I$ に含まれない。すなわち、 $\ker J$ に含まれないこととなります。よって主張が成立します。

• Theorem 3 の証明

まず構成の基本となる manifold with involution を考えます。

$$\textcircled{1} (P^3, \tau) : P^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} / \{(x, y, z) \sim (-x, -y, -z) \mid (x^2 + y^2 + z^2 = 1)\}$$

$$\tau: P^3 \rightarrow P^3 \text{ を } \tau(x, y, z) = (-x, -y, -z) \text{ で定義すると.}$$

$\text{Fix } \tau$ は P^2 1 つと 1 点 $(0, 0, 0)$ からなります。

$$\textcircled{2} (M(p), \tau) : \text{a.t. } H_1(M(p); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{2p} \oplus \mathbb{Z}_{2p} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Fix τ は a Klein bottle と 2 points.

M_1 を solid torus, τ_1 を M_1 上の orientation-reversing involution
 1 fixed point set が 2 点からなるものとして.

M_1 内の closed curve k を $k \cap \tau(k) = \emptyset$. かつ $[k] = b$
 $\in H_1(M_1; \mathbb{Z})$ (b は $H_1(M_1; \mathbb{Z})$ の generator となるようにとり
 ます (図参照).

$M_1 - \text{Int } N(k \cup \tau(k))$ に 2 つの solid torus V_1, V_2 を.

∂V_1 の meridian が $\partial N(k)$ 上の $PC-b$ ($\in H_1(M_1 - \text{Int } N(k \cup \tau(k)))$) を
 表わす curve に. ∂V_2 の meridian が $\partial N(\tau(k))$ 上の $PC'+b$
 を表わす curve に同-視されるように貼り合わせ. できた
 manifold を $M_2 (= (M_1 - \text{Int } N(k \cup \tau(k))) \cup V_1 \cup V_2)$ とすると
 M_2 には τ_1 から自然に誘導される ori. rev. involution τ_2 が
 あります. (c, c' は $\text{Int } N(k \cup \tau(k))$ を M_1 から取り除くこ
 とで新しくできた homology の generators, 図参照)

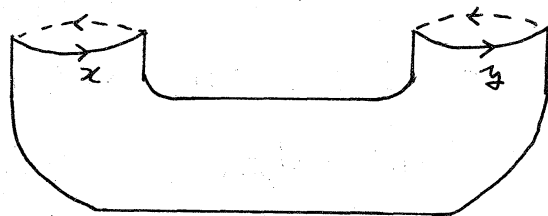
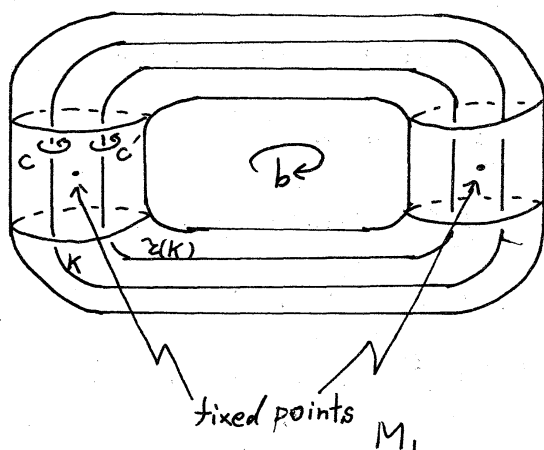
さらに. $\partial M_2 (= \partial M_1)$ には free involution が働いている

$$\text{ここに注意して. } M_3 = \partial M_2 \times I / (x, 1) \sim (\tau_2|_{\partial M_2}(x), 1) \quad (I = [0, 1])$$

とすると. M_3 は Klein bottle 上の twisted I-bundle であり.

$$M(p) := M_2 \cup_\# M_3 \quad h: \partial M_3 (= \partial M_2 \times 0) \rightarrow \partial M_2 : \text{identity}$$

とすると $M(p)$ は τ_2 から誘導される ori. rev. involution τ
 をもつことかわかります.



--<-- は --> と同視される

$$\partial M_2 \times 1 / \sim \subset M_3$$

$H_1(M(p) : \mathbb{Z})$ を調べるため. $H_1(M_3 : \mathbb{Z}) \cong H_1(\partial M_2 \times 1 / \sim : \mathbb{Z})$
の generators を上図のようにとると.

$$H_1(M(p) : \mathbb{Z}) \cong \langle b, c, c', x, y : pc - b = 0, pc' + b = 0$$

$$2x + 2y = 0, 2x = c_1 + c_2, x + y = b \rangle$$

$$\cong \langle c, x : 2pc = 0, 2px = 0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z}_{2p} \oplus \mathbb{Z}_{2p}.$$

となり、得ます。

さて、Theorem 3 の証明です。与えられた nonori. surfaces $F_1, F_2, \dots, F_n$ のうち odd genus のものの数を n' とすると、条件 2) ~ 5) より、与えられた群 G は

$$G \cong \bigoplus \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\alpha} (\mathbb{Z}_{2p_i} \oplus \mathbb{Z}_{2p_i}) \oplus B \oplus B$$

(ただし $\alpha = \frac{1}{2} ((\sum_{j=1}^n \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(F_j : \mathbb{Z}_2)) - n')$ 、 B はある有限アーベル群)

となり、得ることもわかります。

τ : n' 個の (P^3, τ) の copies と、先に定義した
 $(M(p_1), \tau), (M(p_2), \tau), \dots, (M(p_d), \tau)$ を準備します。
 この manifolds の connected sum を考えるのです。connected sum
 を行なうために (とり除く) 3-ball B を τ -invariant であって
 $B \cap \text{Fix } \tau = 2\text{-disk}$ となるように選ぶと、与えた manifold
 に τ ori. rev. involution がはいるように connected sum をすると
 できます。しかもその fixed points set は、元の 2 つの manifold 内
 の fixed point set の 2-dim component を connected sum したものと
 なっています。

よってこの操作を適当な所で行なうことで、 n 個の
 manifolds with involution $(N_1, \tau_1), \dots, (N_n, \tau_n)$ で $\text{Fix } \tau_j = F_j$
 $\cup 2 - \chi(F_j)$ points となるものを得ることもできます。
 さらにこの manifolds の connected sum を各 involution の isolated
 fixed point の近傍で (うまく) 行なうことにより、(connected)
 manifold M' with involution τ' かつ $H_1(M'; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n'} \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^d (\mathbb{Z}_{p_i} \oplus \mathbb{Z}_{2p_i})$
 かつ $\text{Fix } \tau' = \bigcup_{j=1}^n F_j \cup 2 - \sum_{i=1}^n \chi(F_j)$ points を得ることもでき
 ます。あとは、 $H_1(M''; \mathbb{Z}) \cong B$ である manifold を考え、

$M = M'' \# M' \# (-M'')$ を involution をもつように、うまく
 作れば求める manifold が与えられたことになります。

(おもしろは [5], [6] 参照)

証明終

— 追 記 —

最近、一般の manifolds with orientation reversing involution についての fixed points set の topological type の必要十分条件を得ましたので、結果のみ述べます。 ([6])

Prop. 1 任意の (M, τ) について のいづれかが成立

- (1) $M - \text{Fix } \tau$ は disconnected であり $\text{Fix } \tau$ は orientable surfaces からなる.
- (2) $M - \text{Fix } \tau$ は connected.

Theorem 2. $M - \text{Fix } \tau$ が disconnected となる (M, τ) について次が成立.

- (1) m を $\text{Fix } \tau$ の component 数 とするとき

$$m + \frac{1}{2} (\dim H_1(\text{Fix } \tau : \mathbb{Z})) \leq \beta(M) + 1$$

- (2) $m + \frac{1}{2} (\dim H_1(\text{Fix } \tau : \mathbb{Z})) \equiv \beta(M) + 1 \pmod{2}$

Theorem 3. 有限生成アベル群 G と orientable surfaces $E_1, E_2, \dots, E_m$ が条件 1) ~ 3) を満たすならば、 (M, τ) で $H_1(M : \mathbb{Z}) \cong G$ かつ $\text{Fix } \tau = \bigcup_{i=1}^m E_i$ となるものが存在する.

- 1) ある $\mathcal{A}$ -モジュール群 A について $\text{Tor } G \cong A \oplus A$
- 2) $m + \sum_{i=1}^m g(E_i) \leq \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} + 1$ ($g(E_i)$ は E_i の genus)
- 3) $m + \sum_{i=1}^m g(E_i) \equiv \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} + 1 \pmod{2}$

Def. $\tau_* : H_1(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ を線型変換とみなすと、その固有値は ± 1 である ($\because \tau_*^2 = \text{identity}$)。そこで、 $\beta_+(\tau, M)$ を固有値 $+1$ に対する固有空間の次元とする。

Theorem 4. $M\text{-Fix } \tau$ が connected となる (M, τ) について、

次の成立。

- 1) $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\text{Fix } \tau; \mathbb{Z}_2) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} (\text{Tor } H_1(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2) + 2\beta_+(\tau, M)$
- 2) $\chi(\text{Fix } \tau) = 2(1 + \beta_-(M) - 2\beta_+(\tau, M))$
- 3) $\text{Fix } \tau$ に含まれる orientable surfaces の数は $\beta_-(M) - \beta_+(\tau, M)$ を越えない
- 4) $G \cong \bigoplus^s \mathbb{Z} \oplus \bigoplus^a \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i}^{b_i}$ (p_i : prime, $p_i=2 \Rightarrow b_i \neq 1$) であるとき、 $\text{Fix } \tau$ に含まれる odd genus の nonorientable surfaces の数は a を越えない

Theorem 5. G を有限生成 $\mathcal{A}$ -モジュール群、 X を p 個の points と、orientable surfaces $E_1, E_2, \dots, E_m$ と nonorientable surfaces $F_1, F_2, \dots, F_n$ の disjoint union とする。もし、

ある自然数 k について G, X が 次の 1) ~ 6) を満たすならば, (M, τ) で $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong G$ かつ $\text{Fix } \tau = X$ となるものが存在する.

$$1) \text{ Tor } G \cong A \oplus A \text{ or } \mathbb{Z}_2 \oplus A \oplus A \quad (A \text{ はあるアーベル群})$$

$$2) \sum_{j=1}^n c(F_j) \equiv \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Tor } G \oplus \mathbb{Z}_2 \pmod{2}$$

($c(F_j)$ は F_j の non orientable genus)

$$3) 2 \sum_{i=1}^m g(E_i) + \sum_{j=1}^n c(F_j) \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} \text{Tor } G \oplus \mathbb{Z}_2 + 2k.$$

$$4) \chi(X) = 2(1 + \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} - 2k)$$

$$5) m \leq \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes \mathbb{Q} - k$$

$$6) G \cong \bigoplus^s \mathbb{Z} \oplus \bigoplus^a \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i^{b_i}} \quad (p_i: \text{prime } p_i=2 \Rightarrow b_i \neq 1)$$

であるとき, X に含まれる odd genus の nonorientable surfaces の数は a を越えない.

References

- [1] T. tom Dieck : Transformation groups and representation theory, Lecture notes in Math. 766, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.
- [2] W.-H. Huang : Equivariant method for periodic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974), 175-183.

- [3] A. Kawauchi : On 3-manifolds admitting orientation
-reversing involutions, J. Math. Soc. Japan, 33
(1981), 571 - 589.
- [4] M. Kobayashi : Rational homology 3-spheres with
orientation reversing involution, preprint.
- [5] _____ : Fixed point sets of orientation reversing
involutions on 3-manifolds, to appear in Osaka J. Math.
- [6] _____ ; Orientation reversing involutions on
closed 3-manifolds (仮題) , 準備中
- [7] J. Hempel ; Orientation reversing involutions and the first
Betti number for finite coverings of 3-manifolds,
Invent. Math., 67 (1982), 133 - 142.