

# Seifert surface に基づいた knot 補空間の foliation と Heegaard splitting

大阪大 理      合田 洋 (Hiroshi Goda)

## 1 Introduction

$K$  を  $S^3$  内の knot とする。  $R$  を  $\partial R = K$  となる compact orientable surface で closed component をもたないものとするとき、  $R$  は  $K$  の Seifert surface であるという。  $K$  が fibered knot であるとは、その exterior  $E(K)(= S^3 - \text{int} N(K))$  がある Seifert surface を fiber とする  $S^1$  上の fiber bundle になるときいう。また、その Seifert surface を fiber surface と呼ぶ。本稿では、knot 補空間の foliation 及び Heegaard splitting から得られる量で、fiber surface に対する値が共に 0 となるものを比較することを考える。

## 2 Preliminary

3-manifold theory, foliation 及び sutured manifold theory に関する用語等については [1], [3], [10], [11], [14] を参照して下さい。以下、

$M$ : a compact orientable 3-manifold.

$\mathcal{F}$ : a foliation on  $M$  such that

- (1) codimension 1,
- (2) transversely oriented,
- (3)  $\partial M$  は  $\mathcal{F}$  の leaf または  $\mathcal{F}$  に transverse.

とする。

定義 2.1.  $L$  を  $\mathcal{F}$  の leaf とする。  $L$  及び  $\mathcal{F}$  の depth を次の様に定める。

○  $L$  が depth 0 である  $\stackrel{\text{def}}{\iff} L$  は compact

○ depth  $j(\leq k)$  leaf が定まったとする。このとき、

$L$  が depth  $k+1$  である  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \overline{L} - L$  が a union of depth  $j(\leq k)$  leaves,

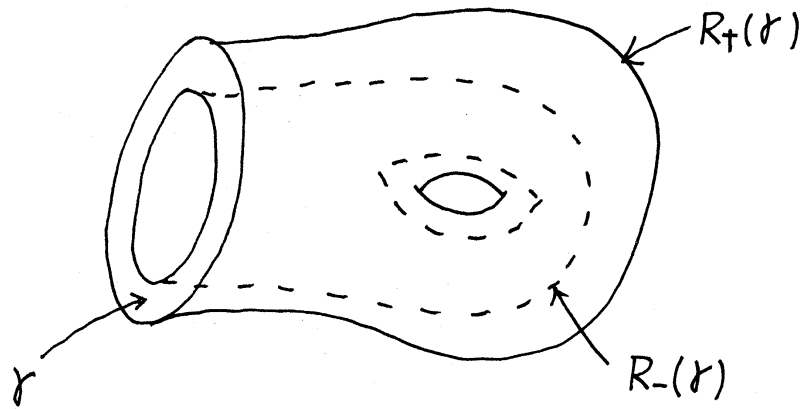
$\overline{L} - L$  は depth  $k$  leaf を含む

◦  $\mathcal{F}$  が depth  $k$  である  $\stackrel{\text{def}}{\iff} k = \max\{\text{depth}(L) \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F}\}$

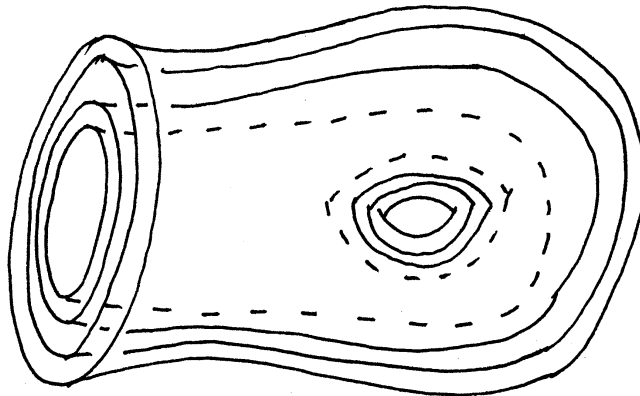
注意: leaf 及び foliation の depth は一般に定義できるとは限らない。

例 2.2.  $M = (\text{once punctured torus } T^\circ) \times I$ ,  $\gamma = \partial T^\circ \times I$  となる sutured manifold

$(M, \gamma)$  を考える。

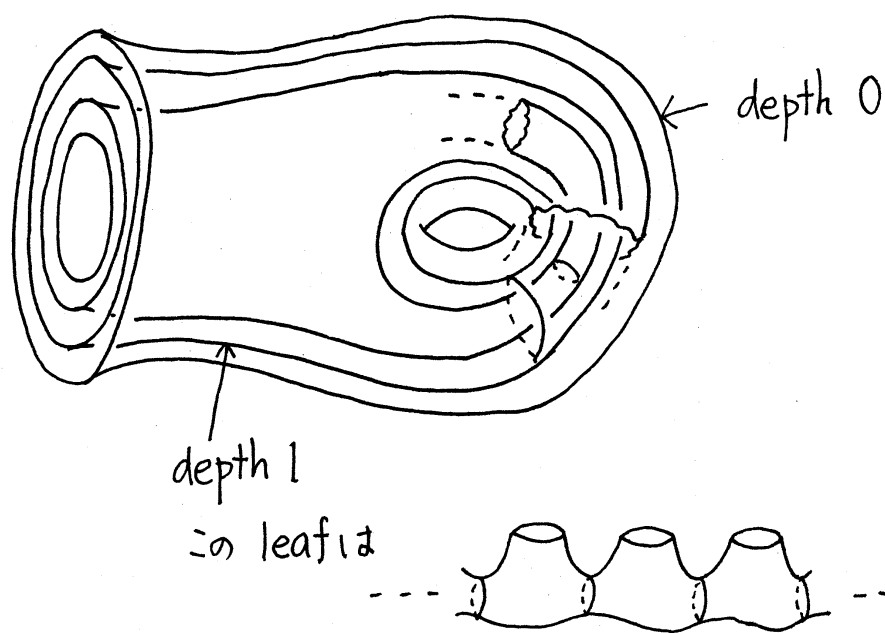


$\mathcal{F}_0$  を  $(M, \gamma)$  を  $T^\circ \times \{*\}$  で foliate したものとする。



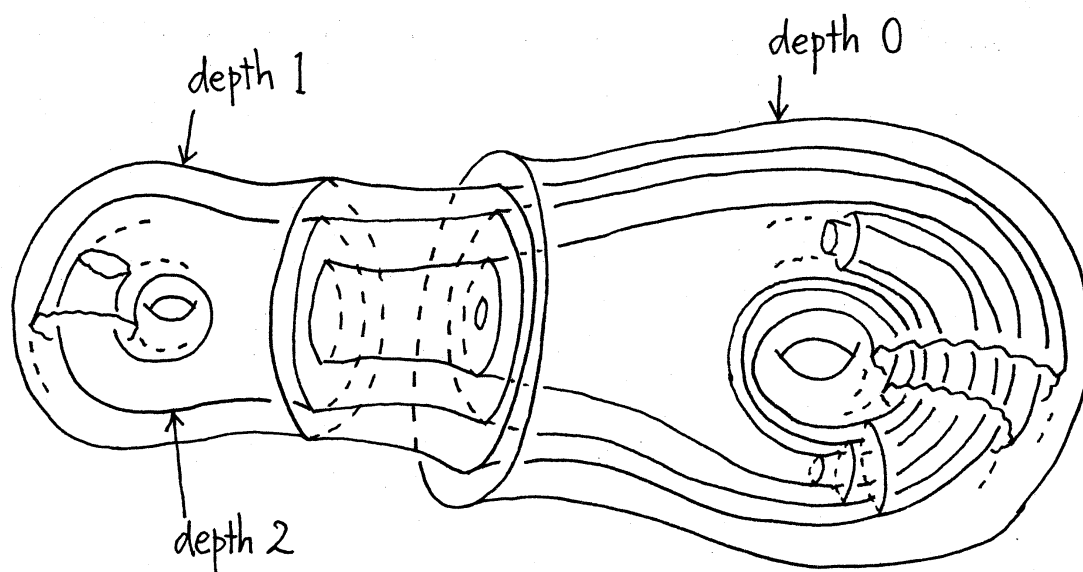
このとき,  $\text{depth}(\mathcal{F}_0) = 0$ 。

次に  $\mathcal{F}_1$  を  $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$  を leaf とし、残りの所を次の様に foliate したものとする。



このとき、 $\text{depth}(\mathcal{F}_1) = 1$ 。

$\mathcal{F}_2$  を上の  $\mathcal{F}_1$  の copy を  $\gamma$  で張り合わせたものとする。



このとき、 $\text{depth}(\mathcal{F}_2) = 2$ 。

より一般には [12] を参照。

定義 2.3.  $\Sigma$  を  $M$  の submanifold とする。このとき、

$\Sigma$  が  $\mathcal{F}$  に transverse  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Sigma$  と交わる  $\mathcal{F}$  の全ての leaf と  $\Sigma$  は transverse  
に交わる

定義 2.4.  $\mathcal{F}$  が taut  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{F}$  の各 leaf に対して、transverse circle もしくは properly embedded transverse arc が存在する

以上の notation のもと 次のことが知られている。

定理 2.5 ([6]).  $K$ : a knot in  $S^3$ ,  $R$ : a minimal genus Seifert surface for  $K$  とする。このとき、 $E(K)$  上の taut finite depth foliation  $\mathcal{F}$  で  $R$  は  $\mathcal{F}$  の leaf,  $\mathcal{F} | \partial N(K)$  は circle で foliate されるものが存在する。

定義 2.6.  $(M, \gamma)$  を  $S^3$  内の sutured manifold とする。次の条件を満たす sutured manifold decomposition の列  $(M, \gamma) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_n} (M_n, \gamma_n)$  が存在するとき この  $(M, \gamma)$  は completely disk decomposable であるという。

- (1) 各  $D_i$  は disk,
- (2)  $M_n$  は connected,
- (3)  $\partial M_n$  は a union of spheres  $S_1, \dots, S_j$ ,
- (4)  $S_i \cap s(\gamma_n)$  は a simple closed curve for  $1 \leq i \leq j$ .

定理 2.7 ([4]).  $(M, \gamma)$  を ある Seifert surface  $R$  の complementary sutured manifold とする。いま  $(M, \gamma)$  が completely disk decomposable ならば、 $M$  上に taut foliation  $\mathcal{F}$  で多くとも depth 1,  $\mathcal{F} \pitchfork \gamma$ ,  $R(\gamma)$  は  $\mathcal{F}$  の compact leaf となるものが存在する。特に、 $\partial R$  が knot ならば、 $\mathcal{F} | \gamma$  は circle で foliate される。

### 3 Depth and handle number of Seifert surfaces in $S^3$

定義 3.1.  $S^3$  内の knot  $K$  の minimal genus Seifert surface  $R$  に対して、depth とは 次の様に定義されるものである。

$$d(R) = \min\{\text{depth}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } E(K) \text{ 上の taut foliation で } R \text{ は } \mathcal{F} \text{ の leaf, } \mathcal{F} | \partial N(K) \text{ は circle で foliate される。}\}$$

注意: Seifert surface に minimal genus という仮定がつくのは、次のことによる。

定理 3.2 ([15]).  $K$  を  $S^3$  内の knot とし、 $\mathcal{F}$  を ある Seifert surface  $R$  を leaf にもつ  $E(K)$  上の foliation とする。このとき、 $\mathcal{F}$  が taut ならば、 $R$  は  $K$  の minimal genus Seifert surface になる。

定義 3.3.  $(W, W')$  が complementary sutured manifold  $(M, \gamma)$  の Heegaard splitting である。

- $$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{aligned} &(1) \ W, W' \text{ は compression body,} \\ &(2) \ W \cup W' = M, \\ &(3) \ W \cap W' = \partial_+ W = \partial_+ W', \\ &(4) \ \partial_- W = R_+(\gamma), \partial_- W' = R_-(\gamma). \end{aligned}$$

compression body については [9] を 参照。

定義 3.4.  $S^3$  内の Seifert surface  $R$  に対して handle number とは 次の様に定義されるものである。

$$h(R) = \min \{ W \text{ の attaching 1-handle の数 } | (W, W') \text{ は } R \text{ の complementary sutured manifold の Heegaard splitting } \}$$

このとき 次のことがわかる。

命題 3.5. 次の 3 つは同値である。

- (1)  $R$  は fiber surface.
- (2)  $d(R) = 0$ .
- (3)  $h(R) = 0$ .

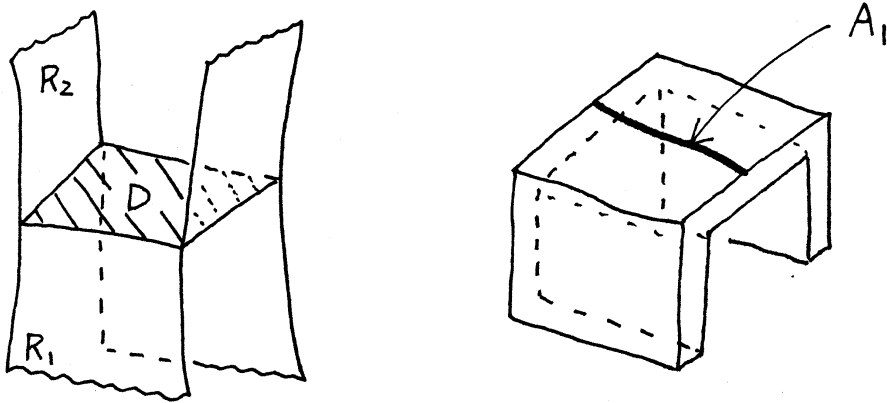
定理 3.6. 任意の 正整数  $k$  に対して、 $d(R_k) = 1$ ,  $h(R_k) = k$  となる Seifert surface  $R_k$  が 存在する。

#### 4 Proof

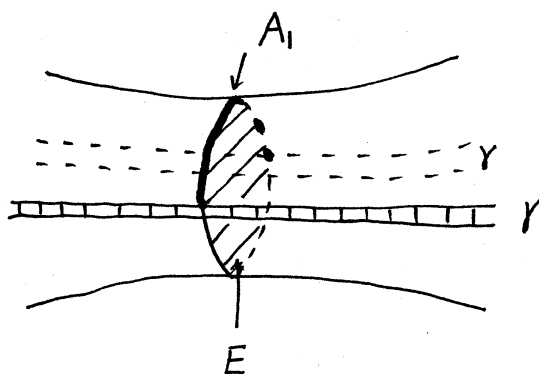
定理 3.6 の証明の為にいくつか定義をする。

$R$  を Seifert surfaces  $R_1, R_2$  を plumbing して得られる Seifert surface とし、 $D = R_1 \cap R_2$  とおく。

定義 4.1.  $R_1$  の marked sutured manifold とは次の様にして構成されるものである。まず、 $R_1$  の complementary sutured manifold を  $(M_1, \gamma_1)$ ,  $I_1$  を embedding  $D \subset R_1$  に対する  $D$  の core とする。すなわち、 $I_1$  は  $R_1$  内の properly embedded arc で  $D$  は  $R_1$  内で  $I_1$  の regular neighborhood になっているとする。 $I_1$  を  $R_1$  から  $R_2$  が attach している方向に押し出すことで、 $R(\gamma_1)$  内の properly embedded arc  $A_1$  が得られる。この sutured manifold と properly embedded arc の組  $(M_1, \gamma_1, A_1)$  を marked sutured manifold という。



定義 4.2.  $E$  が marked sutured manifold  $(M_1, \gamma_1, A_1)$  の product disk with  $A_1$  as an edge とは、 $E$  が  $M_1$  内の properly embedded disk で  $\partial E$  は  $s(\gamma_1)$  とちょうど 2 点で交わり、 $A_1 \subset \partial E$  となっているときいう。

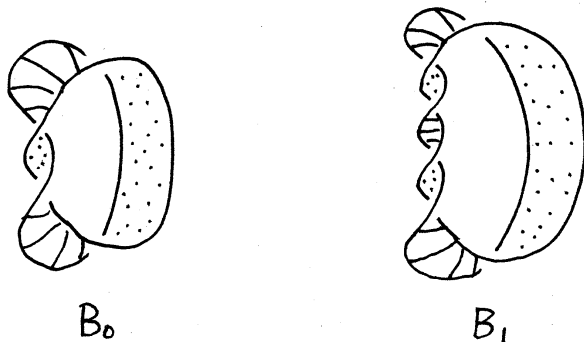


以上の notationのもと、次のことが知られている。

定理 4.3 ([9]).  $R$  を Seifert surfaces  $R_1, R_2$  を plumbing して得られる Seifert surface とし、 $R_1$  の maked sutured manifold を  $(M_1, \gamma_1, A_1)$  とする。いま、 $M_1$  内に product disk with  $A_1$  as an edge が存在するならば、 $h(R) = h(R_1) + h(R_2)$  が成立する。

◇ 定理 3.6 の 証明。

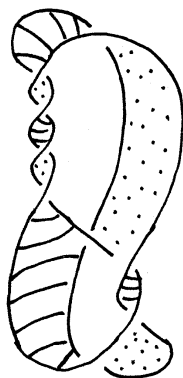
次の unknotted annulus with 1 or 2 full twists  $B_0, B_1$  を考える。



補題 4.4 (cf. [7]).  $h(B_0) = 0$ .

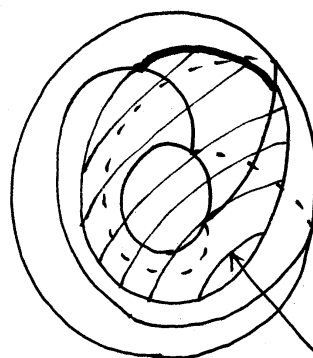
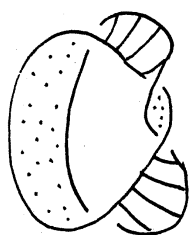
補題 4.5 (cf. [7]).  $h(B_1) = 1$ .

$B_0$  と  $B_1$  を 次図の様に plumbing したものを  $R_1$  とする。


 $R_1$ 

補題 4.6.  $h(R_1) = 1$ .

☹  $B_0$  に注目すると

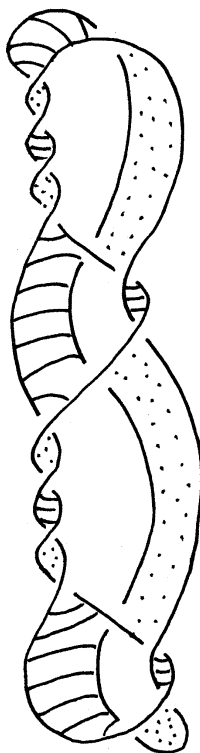


product disk

$\therefore$  Thm 4.3 より  $h(R_1) = 1$ .

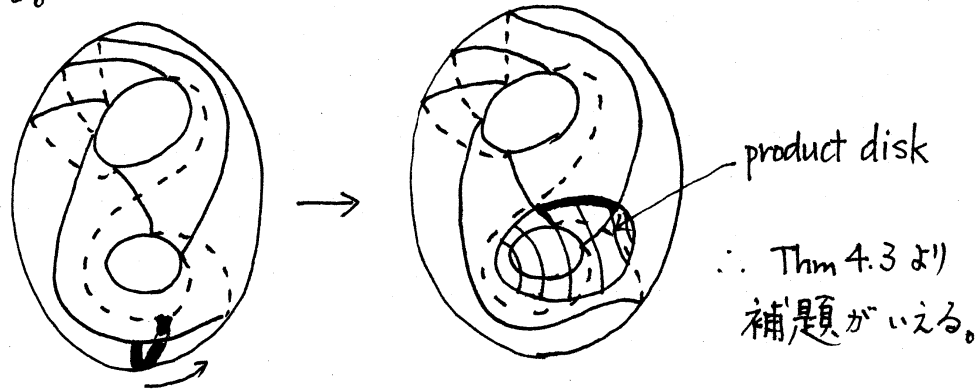
$R_1$  を下図の様に  $k$  個 plumbing したものを  $R_k$  とする。

例.  $k=2$

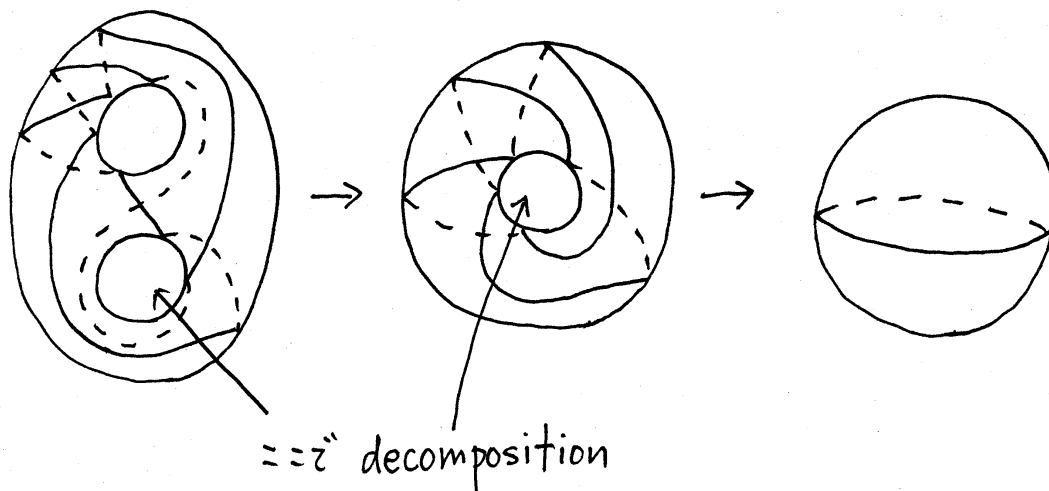


補題 4.7.  $h(R_k) = k$ .

☺  $R_1$  の marked sutured manifold  
をみる。



補題 4.8.  $R_k$  の complementary sutured manifold は completely disk decomposable. ☺ 例].  $R_1$  の complementary sutured manifold



以上、補題 4.7 及び 補題 4.8, 定理 2.7 より定理 3.6 が いえる。

#### 参考文献

- [1] C.Camacho, A.L.Neto: Geometric Theory of Foliations, BIRKHÄUSER.
- [2] J.Cantwell, L.Conlon: Depth of knots, Topology and its Appl. 42 (1991) 277-289.
- [3] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Differential Geometry 18 (1983) 445-503.
- [4] D.Gabai: Foliations and genera of links, Topology 23 (1984) 381-394.

- [5] D.Gabai: Genera of the arborescent links, Mem.Amer.Math.Soc.,vol.59, No.339, 1986.
- [6] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Differential Geometry 26 (1987) 479-536.
- [7] 合田 洋: Seifert surface と Heegaard splitting, 津田塾大数学 計算機科学研究所報 2, 3・4 次元多様体と結び目理論 (1991) 114-129.
- [8] 合田 洋: Some cancelling disk pair and the handle number of Seifert surfaces in  $S^3$ , 研究集会 結び目理論とその応用 報告集 (賢島) (1991) 51-54.
- [9] H.Goda: On handle number of Seifert surfaces in  $S^3$ , to appear Osaka.J.Math.
- [10] G.Hector, U.Hirsch: Introduction to the Geometry of Foliations Part A,B, Braunschweig, Wiesbaden.
- [11] J.Hempel: 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, 1976.
- [12] T.Nishimori: Behavior of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math.J. 29 (1977) 255-273.
- [13] 小林 毅: D.Gabai による, knot complement 上の foliation の構成, 数理研講究録 577, Foliations and K-theory (1985) 164-194.
- [14] 田村 一郎: 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976.
- [15] W.Thurston: A norm for the homology of three-manifolds, Mem.Amer.Math.Soc., vol.59, No.339, 1986.