

温度勾配のある平行壁面間の音の伝播を表す波動方程式と それに及ぼす壁の熱伝導の効果

大阪大学・基礎工学研究科 兵頭 弘晃(Hiroaki Hyodo)

杉本 信正(Nobumasa Sugimoto)

Graduate School of Engineering Science
Osaka University

1. はじめに

壁に囲まれた流路内の気体は、壁に温度勾配を与えたとき不安定化し発振することがある。このような現象は熱音響現象とよばれている。熱音響現象は、気体が発振すると熱源として存在したエネルギーが気体の運動エネルギーに変換されたことになり、原動機とみなすことができる。逆に気体を強制振動させると周りの壁面が冷える現象もある。これは振動によって熱を汲み上げるヒートポンプとみなすことができる。このことから現在、熱音響現象を利用した熱音響エンジンや冷却装置の開発が進められているが[1]、流体力学に基づいた理論的な取り扱いは多くなく、今後早急にその確立が必要である。

これまでの研究では、気体の粘性や熱伝導性による拡散効果が重要になる壁面に接した拡散層の厚さが管路の径に比べて十分薄いとすると境界層理論が展開され、不安定化が生じる臨界条件や非線形理論への拡張も試みられてきた[2-4]。この結果、境界層理論はタコニス振動やソンドハウス管での振動等の古典的な熱音響現象を定量的に記述できることが明らかになった。拡散効果は過去の状態に依存する履歴効果を発生させる。適当な温度勾配があれば境界層はその外部の主流部に対して仕事をすることによって気体を不安定化させるのである。境界層理論は、発振のメカニズムをある程度容易に説明できる利点を有している。

しかし、最近の熱音響式熱機関で用いられている薄い平板を積層したものや、多くの狭い管路の束からなるいわゆるスタック内においては、境界層理論は果たして適用できるかが興味のあるところである。最近、拡散層の厚さが管径に比べて薄いという制限を排除し、壁面の温度分布や変動の管軸方向の変化の代表長さが管径に対して十分長いという「細管近似」の下で、線形理論の範囲であるが一般的に成り立つ熱音響波動方程式が導出された[5]。この方程式は、温度が非一様な気体の中を伝播する超過圧に対する波動方程式に、拡散効果による壁面での摩擦力と熱流による履歴効果を考慮した微積分方程式で与えられる。

この方程式の導出では、平行な壁面で囲まれた一つの流路内や、一つの円管内の気体が想定され、壁面の熱容量が十分大きいと仮定して壁面の温度変動は無視されていた。しかし、実際のスタックでは狭い流路をいくつも束ねたようなものを使用しているので、壁面を構成する固体中の熱伝導性の効果は無視できなくなると予想される。例えば熱音響冷却装置には、ステンレスでできた薄い平板を数十分の一ミリ程度の間隔でいくつも並べたスタックを使用している。この場合は壁と流路の厚さは同程度であり、壁面は流体の変動に

よる影響を受けるはずである。そこで現実的なモデルを考えるためには、壁の温度変動を考慮し壁の熱伝導性がどの程度影響を及ぼすか明らかにしておく必要がある。

本研究では平行な平板を等間隔で周期的に配置した流路内の気体に対する熱音響波動方程式を導出する。気体と固体壁の熱的な結合を考慮し、固体壁も温度変動があるものとして考える。それによって壁の熱伝導性が方程式に及ぼす効果を明らかにする。また、導出した熱音響波動方程式を、短時間（いい換えれば拡散層が薄い場合）における振る舞いを近似する方程式、一方、長時間（いい換えれば拡散層が厚い場合）での振る舞いを近似する方程式をそれぞれ導出し、壁の熱伝導性の効果の表われ方を明らかにする。

2. 解析モデルと支配方程式

2. 1 スタックの解析モデル

図 1 に示すように平板が等間隔で配置された 2 次元流路を考える。固体壁の厚さは $2d$ 、板の間隔は $2H$ とし、壁面間の midpoint が原点 O となるように座標軸をとる。紙面に垂直な方向には一様であるとし、全ての流路内の気体は同じ挙動をするものと仮定する。

2. 2 パラメータ

この問題においてまず 3 つの長さスケールがある。1 つは代表径方向長さ H 、もう 1 つは代表軸方向長さ L または圧力攪乱の代表軸方向波長 a_0/ω 、そして粘性拡散層厚さ $\sqrt{\nu/\omega}$ または熱拡散層厚さ $\sqrt{\kappa/\omega}$ である。 a_0, ω は局所音速と代表角周波数、 ν は動粘度、 κ は熱拡散率である。これらより無次元パラメータ

$$\frac{H}{L} \equiv \lambda \ll 1, \quad \frac{\omega L}{a} \equiv \frac{1}{X} \leq O(1), \quad \frac{\sqrt{\nu/\omega}}{H} \equiv \delta = O(1) \quad (2.1)$$

が導入される。細管近似とは $\lambda \ll 1$ の場合である。また壁の熱伝導を考慮したとき以下のパラメータが現れる：

$$K \equiv \frac{\kappa_s}{\kappa_e} = \frac{k_s / \rho_s c_s}{k_e / \rho_e c_e}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\rho_e c_p k_e}{\rho_s c_s k_s}} = \sqrt{K} \frac{k_e}{k_s}, \quad Ge \equiv \frac{d}{H} \sqrt{\frac{\kappa_e}{\kappa_s}} = \frac{d}{H} \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (2.2)$$

ここで下付き文字 e は気体の平衡状態での値とし、下付き文字 s は固体の値であることを示す。 K は気体と固体の温度拡散率の比、 ε は固体と気体の熱容量と熱伝導率の積の比の平方根、 Ge は d/H と K の平方根の組み合わせで表されているが、幾何パラメータである。

実際に使用される具体的な材料での ε と K の値の例を表 1 にまとめる。例として気体は空気とヘリウム、固体はステンレス鋼とセラミックスの組み合わせでのそれぞれの値を示した。 K はだいたい 1 のオーダーとみなせる場合が多い。ただしヘリウムとステンレスの組み合わせは除く。対して ε はどれも 10 の 3 乗から 4 乗分の 1 程度の小さい値をとる。ここで ε の値が小さいことは注目すべきである。固体の熱伝導性の効果を見捨てることは、 ε を見捨てることである。したがって、これを解析の漸近パラメータとする摂動展開で固体の熱伝導性の効果を取り入れる。

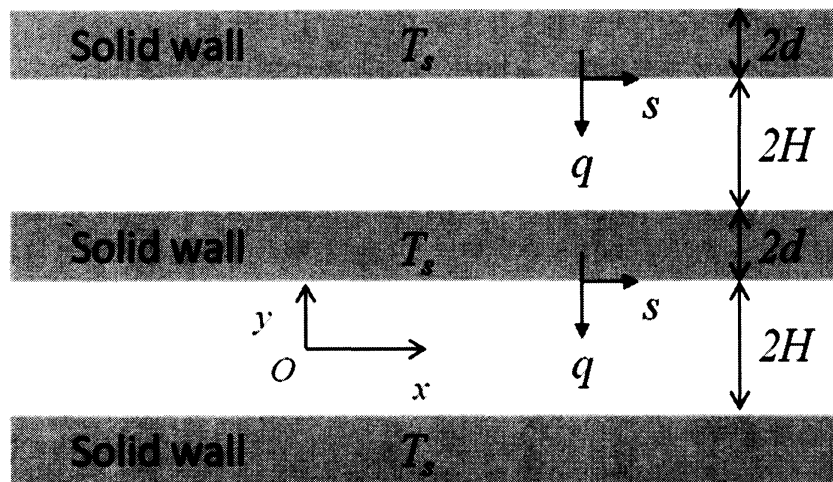


図 1. 平行な板を積層させたスタックの解析モデル

	K		ε	
	ステンレス鋼	セラミクス	ステンレス鋼	セラミクス
空気	0.161	3.64	6.30×10^{-4}	2.94×10^{-4}
ヘリウム	0.0194	0.437	1.40×10^{-3}	6.06×10^{-4}

表 1. 気体と固体の組み合わせによる K と ε の値の例

2. 3 支配方程式

まず壁面間の気体に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \left[\left(\mu_v + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \quad (2.4)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi, \quad (2.5)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho T}{\rho_e T_e}, \quad (2.6)$$

の支配方程式を立てる. 上から順に, 連続の式, ナビエ-ストークス方程式, エネルギー方程式, 状態方程式である. 気体の速度ベクトル, 圧力, 密度, 温度をそれぞれ (u, v) , p , ρ , T で表す. 式(2.4)の μ_v は体積粘性率, 式(2.5)における S , Φ はそれぞれエントロピーと粘性散逸関数である. 一方, 固体に対しては

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

の熱伝導の式を用いる。

いま平衡状態からの微小攪乱を考え（例えば $T = T_e + T'$ とおいて代入する。攪乱にはダッシュを付けて表す）線形化し、 x 方向代表長さが y 方向代表長さよりも十分長いとする細管（長波）近似を施すと支配方程式は次のように近似できる：

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_e v')}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_e u')}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu_e \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \quad (2.9)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{\partial p'}{\partial t} + k_e \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_e} + \frac{T'}{T_e}, \quad (2.12)$$

$$\rho_s c_s \frac{\partial T'_s}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T'_s}{\partial y^2}. \quad (2.13)$$

境界条件は壁上ですべりなし条件から

$$u' = v' = 0 \quad \text{at } y = \pm H \quad (2.14)$$

となる。また温度と熱流束の連続より

$$T' = T'_s \quad \text{and} \quad -k_e \frac{\partial T'}{\partial y} = -k_s \frac{\partial T'_s}{\partial y} \quad \text{at } y = \pm H \quad (2.15)$$

さらに固体中の熱流束の条件から

$$-k_s \frac{\partial T'_s}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = H + d \quad (2.16)$$

が境界条件を与える。式(2.10)から圧力は断面にわたって一様であることが分かる。これらの支配方程式を流路断面にわたって平均化してまとめると、

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = \frac{1}{2H} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (a_e^2 s) + \frac{a_e^2}{c_p T_e} \frac{\partial q}{\partial t} \right] \quad (2.17)$$

が得られる。ここで s はせん断応力、 q は熱流束を表し、それぞれ

$$s = \mu_e \frac{\partial u'}{\partial y} \Big|_{y=H} - \mu_e \frac{\partial u'}{\partial y} \Big|_{y=-H}, \quad (2.18)$$

$$q = k_e \frac{\partial T'}{\partial y} \Big|_{y=H} - k_e \frac{\partial T'}{\partial y} \Big|_{y=-H} \quad (2.19)$$

と定義される。

3. 熱音響波動方程式の導出

式(2.17)においてせん断応力 s と熱流束 q を代入することで熱音響波動方程式が得られる。波動方程式の導出にはフーリエ変換による解法を用いる。フーリエ変換は次のように定義される

$$f\{u'\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x, y, t) e^{i\omega t} dt \equiv \hat{u}'(x, y, \omega) \quad (3.1)$$

また、その逆変換は

$$f^{-1}\{\hat{u}'\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}'(x, y, \omega) e^{-i\omega t} dt \equiv u'(x, y, t) \quad (3.2)$$

で定義される。

支配方程式にフーリエ変換を施して境界条件を課すことで u', T' を求めると

$$u' = -\frac{1}{\rho_e} \sigma^{-1} \frac{\partial p'}{\partial x} f, \quad (3.3)$$

$$\hat{T}' = \frac{\hat{p}'}{\rho_e c_p} f_p + \frac{1}{\rho_e \sigma^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x} \left(-\frac{\text{Pr}}{1-\text{Pr}} f + \frac{1}{1-\text{Pr}} f_p \right) + \varepsilon \hat{T}'_e \quad (3.4)$$

が得られる。ここで式中の $\sigma = -i\omega$ であり、また δ_e, f_p は

$$\delta_e(x) = \frac{1}{H} \left(\frac{\nu_e}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

$$f_p(x, y) = 1 - \frac{\cosh(y\sqrt{\text{Pr}}/H\delta_e)}{\cosh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)} \quad (3.6)$$

で定義される。また f は(3.6)式において $\text{Pr}=1$ とおいた場合である。式(3.4)の ε の付いた項が壁の熱伝導の効果により現れる項であり、以下のように定義される。

$$\varepsilon \hat{T}'_e = \frac{\varepsilon \hat{p}'}{\rho_e c_p} f_{KP} + \frac{\varepsilon}{\rho_e \sigma^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x} \left(-\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{1-\text{Pr}} f_K + \frac{1}{1-\text{Pr}} f_{KP} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.7)$$

ここで式中の f_K, f_{KP}, δ_s は

$$\begin{bmatrix} f_K(x, y) \\ f_{KP}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C_P \end{bmatrix} \frac{\cosh(y\sqrt{\text{Pr}}/H\delta_e)}{\cosh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)} \quad (3.8)$$

$$C = \frac{\tanh(1/\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s)}, C_P = \frac{\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s)} \quad (3.9)$$

$$\delta_s = \frac{1}{d} \left(\frac{\kappa_s}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

で定義される。また固体の温度については

$$\hat{T}'_s = \frac{\varepsilon \hat{p}'}{\rho_e c_p} f_{SP} + \frac{\varepsilon}{\rho_e \sigma^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x} \left(-\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{1-\text{Pr}} f_s + \frac{1}{1-\text{Pr}} f_{SP} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.11)$$

と表される. ここで式中の f_s, f_{SP} は

$$\begin{bmatrix} f_s(x, y) \\ f_{SP}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C_p \end{bmatrix} \frac{\cosh[(y-H-d)/d\delta_s]}{\cosh(1/\delta_e)} \quad (3.12)$$

で定義される. 得られた u', T' をせん断応力と熱流束の定義に代入すれば,

$$\hat{s} = 2\sqrt{\nu_e} \sigma^{-1/2} g(x, H) \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma \hat{q} = & \frac{2c_p T_e \sqrt{\nu_e}}{a_e^2} \left\{ -\frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \sigma^{3/2} \hat{p}' g_p(x, H) + \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \sigma^{-1/2} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x} \right. \\ & \times \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} g(x, H) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} g_p(x, H) \right] + \varepsilon \sigma \hat{q}_w, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\sigma \hat{q}_w = -C_p \sigma \hat{q} + O(\varepsilon), \quad (3.15)$$

$$g_p(x, y) = \frac{\sinh(y\sqrt{\text{Pr}}/H\delta_e)}{\cosh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)}. \quad (3.16)$$

ここで g は(3.16)において $\text{Pr}=1$ とおいた場合である. これらを逆変換して式(2.17)に代入することで波動方程式が得られる. せん断応力と熱流束の式の中に現れる逆変換について以下のような定義される.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{-1} \left\{ \sigma^{-\frac{1}{2}} \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) \right\} = \Phi \left(\frac{\nu_e t}{\text{Pr} H^2} \right) h(t), \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{-1} \left\{ \sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s)} \tanh(1/\delta_e) \right\} = M_T(t) h(t), \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{-1} \left\{ \sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s)} \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) \right\} = M_D(t) h(t). \quad (3.19)$$

式中の $h(t)$ はステップ関数である. また Φ は次のように定義される.

$$\Phi \left(\frac{\nu_e t}{\text{Pr} H^2} \right) = \frac{2\sqrt{\nu_e}}{\sqrt{\text{Pr} H}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \frac{\nu_e t}{\text{Pr} H^2} \right] h(t). \quad (3.20)$$

また上式は次のようにも書ける

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G\left(\frac{\nu_e t}{\text{Pr} H^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-n^2 \frac{\text{Pr} H^2}{\nu_e t}\right) \right]. \quad (3.21)$$

式(3.18)、(3.19)中の $M_T(t)$, $M_D(t)$ の具体的な形については後で述べる.

これらの定義に基づいて逆変換すると s, q は

$$s = 2\sqrt{\nu_e} \mathcal{M}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} = 2c_p T_e \sqrt{\nu_e} \left\{ -\frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \mathcal{M}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_p\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \right] \right\} + \varepsilon \frac{\partial q_w}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_w}{\partial t} = 2c_p T_e \sqrt{\nu_e} \left\{ \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_D\left(\frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \mathcal{M}_T\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_D\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \right] \right\} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.24)$$

で表される. ここで汎関数 $\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_l$ は

$$\mathcal{M}_p[\phi(x, t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G[\nu_e(t-\tau)/\text{Pr} H^2]}{\sqrt{t-\tau}} \phi(x, \tau) d\tau, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{M}_l[\phi(x, t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} M_l(t-\tau) \phi(x, \tau) d\tau, \quad (l = D \text{ or } T) \quad (3.26)$$

で定義される. 式中の $\mathcal{M}$ は式(3.25)において $\text{Pr}=1$ とおいた場合である. 汎関数における下付き文字は気体の粘性拡散, 気体および固体の熱拡散の結合に由来する項であることを表し, T はそれら三つ巴の結合, D は気体と固体の熱拡散の二つ間の結合による項であることを示す. 求められた熱流とせん断応力を代入する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{H} \mathcal{M}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \right] + \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_p\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \\ - \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \mathcal{M}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_p\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) \right] = \varepsilon W, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$W = \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \left\{ \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_D\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \right\}$$

$$-\frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \mathcal{M}_T \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1-\text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_D \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] \Bigg\}. \quad (3.28)$$

上式が平行板間の気体に対する熱音響波動方程式である。壁の熱伝導による効果は W の項として現れる。式(3.27)の右边が 0 のときが壁の熱伝導を無視した場合の方程式に帰着する。壁の熱伝導による効果の式の形は汎関数の形は違うが(3.27)とよく似た形を示す。

4. 緩和関数の形

摩擦力 s や熱流 q は過去の状態に依存する履歴効果が表れることが分かった。例えば, s の現在の値は圧力勾配の過去の履歴によって決定され, 関数 G が過去の圧力勾配とせん断応力を関係付けている。ここで G や熱流の式に表れる M_T, M_D は緩和関数と呼ばれる。ここでは緩和関数の具体的な形を求める。

緩和関数 M_T は $\sigma = -(2n-1)^2 \pi^2 \nu_e / 4H^2$, $\sigma = -(2n-1)^2 \pi^2 \kappa_e / 4H^2$, $\sigma = -n^2 \pi^2 \kappa_s / d^2$ で単極を持つ。これより留数定理によって逆変換すれば

$$\begin{aligned} M_T(t) = & \frac{2\sqrt{\nu_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan[(n-1/2)\pi\sqrt{\nu_e/\kappa_e}]}{\tan[(n-1/2)\pi\sqrt{\nu_e/\kappa_e}Ge]} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \nu_e t}{4 H^2}\right] \\ & + \frac{2\sqrt{\kappa_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1/2)\pi\sqrt{\kappa_e/\nu_e}]}{\tan[(n-1/2)\pi Ge]} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \kappa_e t}{4 H^2}\right] \\ & - \frac{2\sqrt{\kappa_s}}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n\pi}{Ge}\right) \tan\left(\frac{n\pi}{\sqrt{\nu_e/\kappa_e} Ge}\right) \exp\left[-n^2 \pi^2 \frac{\kappa_s t}{d^2}\right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

が得られる。緩和関数 M_D は $\sigma = -(2n-1)^2 \pi^2 \kappa_e / 4H^2$ で 2 位の極を持つ。よって逆変換より

$$\begin{aligned} M_D(t) = & \frac{2\sqrt{\kappa_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi}{\tan[(n-1/2)\pi Ge]} \frac{\kappa_e t}{H^2} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \kappa_e t}{4 H^2}\right] \\ & + \frac{2\sqrt{\kappa_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ge}{\sin^2[(n-1/2)\pi Ge]} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \kappa_e t}{4 H^2}\right] \\ & - \frac{2\sqrt{\kappa_s}}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \tan^2\left(\frac{n\pi}{Ge}\right) \exp\left[-n^2 \pi^2 \frac{\kappa_s t}{d^2}\right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

が得られる。また $t \rightarrow 0$ の極限での緩和関数をそれぞれ,

$$M_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{H^2}{\nu_e t}\right) - 2 \exp\left(-\frac{H^2}{\kappa_e t}\right) + 2 \exp\left(-\frac{d^2}{\kappa_s t}\right) + \dots \right] \quad (4.3)$$

$$M_D(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 - 4 \exp\left(-\frac{H^2}{\kappa_e t}\right) + 2 \exp\left(-\frac{d^2}{\kappa_s t}\right) + \dots \right] \quad (4.4)$$

という形にも書くことができる。これは $t \rightarrow 0$ で発散し, 式(3.21)と同じようなふるまいをする。

緩和関数 M_T, M_D のグラフをプロットすると図 2 のようなグラフが得られる。

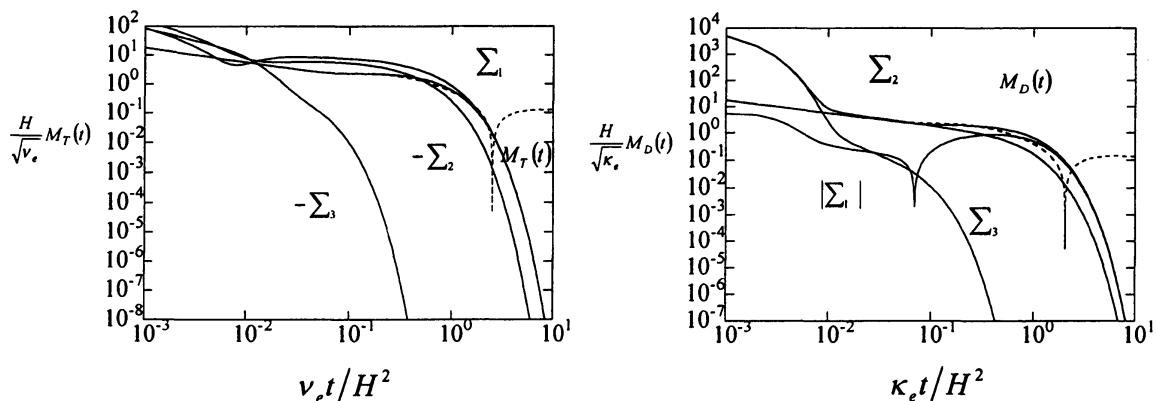


Fig2. 緩和関数 M_T, M_D の形

図 2 中の Σ_i ($i=1,2,3$) は $M_T(t), M_D(t)$ 式中の i 番目の和を示す。また破線はまた $t \rightarrow 0$ としたときの緩和関数でそれぞれ式(4.3), (4.4)をグラフにプロットした。 t が小さいときには式(4.1), (4.2)とそれぞれよく一致していることが確かめられる。

5. 波動方程式の近似

5.1 短時間近似での方程式

熱音響波動方程式はデボラ数を導入することでその短時間または長時間における振る舞いを近似することができる。デボラ数の定義は

$$De \equiv \frac{H^2/\nu_e}{t} \text{ or } \frac{H^2/\kappa_e}{t} \quad (5.1)$$

であり、デボラ数は時間 t に対する粘性拡散時間または熱拡散時間の大きさを示す。短時間近似とは $De \gg 1$ であり、長時間近似とは $De \ll 1$ としたときの近似である。

また拡散層厚さ δ_e を考えるとき、短時間では $\delta_e(x) = (\nu_e/\sigma)^{1/2}/H \ll 1$ となりつまり薄い拡散層の場合に対応し、長時間では $\delta_e(x) = (\nu_e/\sigma)^{1/2}/H \gg 1$ であり、厚い拡散層の場合と言い換えることができる。このデボラ数を用いると短時間において汎関数は前章で示したように緩和関数を近似すると、

$$\mathcal{M}(\phi) \approx \mathcal{M}_t[\phi(x,t)] \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \equiv \frac{\partial^{-1/2} \phi}{\partial t^{-1/2}} \quad (5.2)$$

と書ける。これを波動方程式に代入すれば

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{H} \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + (C + C_T) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (5.3)$$

$$C = 1 + (1-\varepsilon) \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}}, \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{\text{Pr} + \text{Pr}}} \quad (5.4)$$

を得ることができる。これは境界層近似により求められた式と同じ形である。この式にお

ける壁の熱伝導の効果は係数 C , C_T に ε の修正が入るのみとなる。

5. 2 長時間近似での方程式

長時間では波動方程式を $De \ll 1$ として近似すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} - (\gamma - 1) \text{Pr} \frac{\alpha}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \\ & + \frac{2}{5} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha H^2}{\nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right) - (1 + \text{Pr}) \frac{\alpha H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right] = \varepsilon w, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon w = & \frac{\varepsilon}{Ge} \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\alpha}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} - (\gamma - 1) \text{Pr} \left[2 - \text{Pr} Ge^2 \right] \frac{\alpha}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right. \\ & \left. - \left[\frac{11}{15} \text{Pr} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \text{Pr} Ge^2 \right] \frac{\alpha H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる。これが長時間での波動方程式を与える。ここで α は

$$\alpha = \frac{a_e^2 H^2}{3\gamma \nu_e} \quad (5.7)$$

で定義される拡散率である。壁の熱伝導による効果を表す(5.6)は(5.5)に比べて新しい形の項は入っていないが、その効果はパラメータ Ge によって現れるため、 ε に対して Ge が小さくなった場合にはその効果は無視できなくなる。例えば流路に対して壁の厚さを小さく取った場合、 Ge が小さくなり熱伝導の効果が大きくなる。

6. レゾナンスの場合

これまでの解析で壁の熱伝導の効果は ε を通して現れることが分かった。また ε は熱音響装置の材料において 10^{-3} から 10^{-4} 程度であることから、 ε の 1 次のオーダーでその効果を評価した。壁の熱伝導による効果は熱流に影響し、その結果新しい汎関数 $\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_l$ が現れ、その緩和関数 $M_T(t), M_D(t)$ は粘性拡散と気体と固体の熱拡散の組み合わせによる効果が表れることが示された。緩和関数 $M_T(t), M_D(t)$ は 3 種類の指数関数の和から成る。パラメータ Ge は任意に選べるので指数関数の係数が発散する場合があります、そのとき ε による展開は有効ではなくなる。このとき壁の効果は ε のオーダーではなくなり、一種のレゾナンスが発生するとみなせる。

ここからはレゾナンスが起こる場合の方程式の修正について考察する。レゾナンスが起きるとき ε の展開は無効であるから、温度 $\hat{T}'$ の式 (3.4) 式において

$$f_p(x, y) = 1 - \frac{1}{A} \frac{\cosh(y\sqrt{\text{Pr}/H\delta_e})}{\cosh(\sqrt{\text{Pr}/\delta_e})}, \quad (6.1)$$

$$A = 1 + \varepsilon \frac{\tanh(\sqrt{\text{Pr}/\delta_e})}{\tanh(1/\delta_s)} = 1 + \varepsilon C_p \quad (6.2)$$

と定義を置き換える。また熱伝導の効果 $\varepsilon \hat{T}'_e$ の式(3.7)については

$$f_K = \frac{1}{A} \frac{\tanh(1/\delta_s) \cosh(y\sqrt{\text{Pr}}/H\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s) \cosh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)} \quad (6.3)$$

で置き換える。また式(3.7)中の f_{KP} は 0 と置く。また壁の温度 $\hat{T}'_s$ については f_s , f_{sp} を $A^{-1}f_s$, $A^{-1}f_{sp}$ で置き換えることになる。また(3.15)は

$$\sigma \hat{q}_w = -\frac{2c_p T_e \sqrt{v_e}}{a_e^2} \left[\frac{1}{1-\text{Pr}} \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \sigma^{-1/2} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x} \frac{C_p}{A} g(x, H) \right] \quad (6.4)$$

で置き換えられる。よってレゾナンスの場合には熱流の式が修正され、波動方程式導出時、式(3.17)は $1/A$ で修正される。よって熱流の逆変換は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{-1} \left\{ \frac{\sigma^{-\frac{1}{2}}}{1 + \varepsilon \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) / \tanh(1/\delta_s)} \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) \right\} \quad (6.5)$$

の変換を評価しなければならない。ここで $\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)$, $\tanh(1/\delta_s)$ は単極をもたない。よって新しく $\tanh(1/\delta_s) + \varepsilon \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) = 0$ となる極を探す。これには 2 つのケースが考えられる。

1 つ目のケースは $\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) \sim \varepsilon^{-1}$ のときであり、単極は $\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)$ の極の近くにある。それは $\sigma = -\left\{ (2n-1)^2 \pi^2 / 4 - \varepsilon (2n-1) \pi / \tan[(n-1/2)\pi Ge] + O(\varepsilon^2) \right\} \kappa_e / H^2$ で与えられ、このときの逆変換は

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{\kappa_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{Ge}{\sin^2[(n-1/2)\pi Ge]} + O(\varepsilon^2) \right\}^{-1} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \frac{\kappa_e t}{H^2} - \varepsilon \frac{(2n-1)\pi}{\tan[(n-1/2)\pi Ge]} \frac{\kappa_e t}{H^2} + O(\varepsilon^2) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

で与えられる。2 つ目のケースとして $\tanh(1/\delta_s) \sim \varepsilon$ のときで、単極は $\tanh(1/\delta_s)$ のゼロ点の近くにある。それは $\sigma = -n^2 \pi^2 \left[1 - 2\varepsilon \tan(n\pi/Ge) / n\pi + O(\varepsilon^2) \right] \kappa_s / d^2$ で与えられ、このときの逆変換は

$$\varepsilon \frac{2\sqrt{\kappa_s}}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \left(\frac{n\pi}{Ge} \right) \exp \left[-n^2 \pi^2 \frac{\kappa_s t}{d^2} + 2\varepsilon n\pi \tan \left(\frac{n\pi}{Ge} \right) \frac{\kappa_s t}{d^2} + O(\varepsilon^2) \right] \quad (6.7)$$

で与えられる。よって(6.5)の逆変換は(6.6)と(6.7)の和である。これを ε の一次のオーダーまで展開した場合これまでに導出した緩和関数を用いて $\Phi - \varepsilon M_D$ と書ける。これはレゾナンスが起こっていないときの緩和関数である。

熱流を求めるには、先ほどの $\hat{q}_w$ により

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^{-1} \left\{ \frac{\sigma^{-\frac{1}{2}}}{1 + \varepsilon \tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) / \tanh(1/\delta_s)} \frac{\tanh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e) \tanh(1/\delta_e)}{\tanh(1/\delta_s)} \right\} \quad (6.8)$$

も必要となる。これは(6.5)に加えて $\tanh(1/\delta_e)$ の極も入ることになるので3つのタイプの極がある。

式(6.6)と(6.7)より、ある Ge の値に対して $\tan[(n-1/2)\pi Ge]$ が0となるか、 $\tan[n\pi/Ge]$ が発散するときに ε の係数は発散する。これがレゾナンスである。例えば $Ge=2$ のレゾナンスでは $\cosh(\sqrt{\text{Pr}}/\delta_e)$ のゼロ点が $\sinh(1/\delta_s)$ のゼロ点と一致し、 $\kappa_e/H^2 = 4\kappa_s/d^2$ で与えられる。このとき式(6.5)の極は $\sigma = -[(n-1/2)^2\pi^2 \pm (2n-1)\pi\sqrt{\varepsilon/Ge} + \dots]\kappa_e/H^2$ で与えられ、このときの逆変換は以下で与えられる。

$$\frac{2\sqrt{\kappa_e}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} \frac{\kappa_e t}{H^2}\right] \cosh\left[(2n-1)\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Ge}} \frac{\kappa_e t}{H^2}\right] + O(\varepsilon). \quad (6.9)$$

レゾナンスがない場合と比べ、緩和は $\cosh$ 中の $\sqrt{\varepsilon}$ のオーダーだけ遅くなる。

レゾナンスの場合には拡散において壁の効果は ε のオーダーでなくなるという点で通常の拡散とは異なるといえる。 $\sqrt{\varepsilon}$ が大きいほどその違いは際立つ。

図3には $\varepsilon=0.01$ に対しレゾナンスなしでの緩和関数 $\Phi - \varepsilon M_D$ を $Ge=1.5, 2.5, 3.5, 4.5$ に対してプロットした。 t が小さいうちは曲線は $1/\sqrt{\pi t}$ 上に乗るのだが、 t が大きくなると Ge の値が大きいほど緩和が遅くなるのが分かる。図4には $\varepsilon=0.2$ に対してレゾナンスが起こる場合と起こらない場合の緩和関数をプロットした。レゾナンスが起こらないときの緩和関数を $Ge=1.95, 2.05$ に対し $\Phi - \varepsilon M_D$ をプロットし、レゾナンスの場合 $Ge=2.0$ の緩和関数は(6.9)式をプロットした。緩和が遅くなるのが分かる。緩和関数 $M_T(t)$, $M_D(t)$ に対してレゾナンスの起こる条件は以下のとおりである

$$\tan[(n-1/2)\pi\sqrt{\text{Pr}Ge}] = \tan[(n-1/2)\pi Ge] = 0, \quad (6.10)$$

$$\cot[n\pi/Ge] = \cot(n\pi/\sqrt{\text{Pr}Ge}) = \cot[(n-1/2)\pi\sqrt{\text{Pr}}] = \cot[(n-1/2)\pi/\sqrt{\text{Pr}}] = 0 \quad (6.11)$$

Ge は x により変化するので流路のどこかでレゾナンスが起こると考えられる。

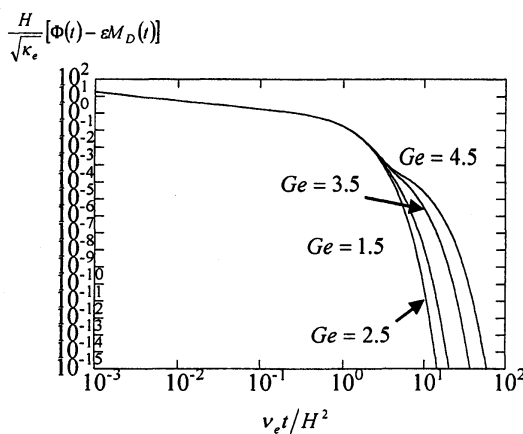


図.3 レゾナンスでない場合の緩和関数

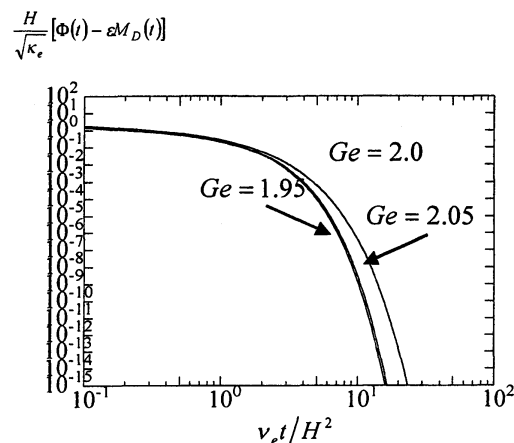


図.4 レゾナンスの場合の緩和関数

7. 結論

本研究において平板が等間隔で周期的に重なったスタック流路内の気体に対する熱音響波動方程式と、それに及ぼす壁の熱伝導性の効果を明らかにした。熱伝導性を無視した熱音響波動方程式に対して熱伝導性の効果による項を付け加えた。その効果はパラメータ ε を通じて現れる。それは気体の熱容量に熱伝導率をかけたものと固体壁の熱容量に熱伝導率をかけたものの比の平方根をとったものである。通常固体の熱容量のほうがはるかに大きいので、 ε は小さい値をとるのでこの効果は小さいように思える。しかし ε のほかに幾何パラメータ Ge が現れることが分かった。解析では ε による漸近展開を用いて式を展開していたが、幾何パラメータ Ge が特定の値をとるときにレゾナンスが起こり、展開が破綻する。この場合の熱伝導性の効果はもはや ε のオーダーに留まらず、 $\sqrt{\varepsilon}$ のオーダーと大きくなり、通常の拡散とは異なることが明らかになった。またレゾナンスが起きる場合以外でも Ge の値が大きくなると緩和が遅くなるということも分かった。

デボラ数によって短時間と長時間における近似波動方程式を導出した。長時間において ε/Ge の大きさが大きくなる、つまり Ge が小さい値をとるとき壁の熱伝導による効果が大きくなる。しかし短時間においては係数部に ε の修正項が現れるがその効果は小さいとみなせる。結論として、壁の熱伝導の効果は ε が小さければ無視できる。しかし幾何パラメータとの関係によって壁の熱伝導の効果は強まって無視できない場合が起こることが予想される。

本講究録の内容は論文[7]に出版予定である。

参考文献

- [1] G.W.Swift: Thermoacoustic: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators, Acoustical Society of America (2002).
- [2] 杉本信正：境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析，ながれ，**24**，381-393 (2005).
- [3] N. Sugimoto & M. Yoshida: "Marginal condition for the onset of thermoacoustic oscillations of a gas in a tube", *Phys. Fluids*, **19**, 074101 (2007).
- [4] N. Sugimoto & D. Shimizu: "Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube", *Phys. Fluids*, **20**, 104102 (2008).
- [5] D. Shimizu & N. Sugimoto: "Numerical study of thermoacoustic Taconis oscillations", *J. Appl. Phys.*, **107**, 034910 (2010).
- [6] N. Sugimoto: "Thermoacoustic-wave equation for gas in a channel and tube subject to temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **658**, pp.89-116,2010.
- [7] N. Sugimoto & H. Hyodo: "Effects of heat conduction in wall on thermoacoustic-wave propagation" *J. Fluid Mech.*, 印刷中.