

氏 名	はた やす し 幡 谷 泰 史
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1436 号
学位授与の日付	平 成 16 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Decaying solution of a Navier-Stokes flow without surface tension (表面張力無しのナビエ-ストークス流の減衰解)

論文調査委員 (主 査) 教授 西 田 孝 明 教授 井 川 満 教授 三 輪 哲 二

論 文 内 容 の 要 旨

非圧縮性粘性流体が、自由表面と固定境界とを伴う 3 次元帯状領域を占めるとき、小さい初期値に対し時間的大域解が存在することを示している。

底に当たる固定境界は水平な平面とし、その固定境界から上にある流体が、その上部を自由表面で限られているとする。非圧縮性粘性流体の運動は Navier-Stokes 方程式によって支配され、自由表面上では自由応力条件と力学的境界条件、固定境界上では密着境界条件を満たすものとする。流体には鉛直下向きに重力加速度 g が作用し、自由表面上で表面張力効果は無いのと仮定し、水平方向に周期境界条件を課す。この問題の平衡解は、流速が 0、圧力勾配が $(0, 0, -g)$ 自由表面の高さ η が一定である。このような設定の下で、初期条件が適当な関数空間の位相でこの平衡解に近ければ、時間方向に適当な重みを備えた関数空間 X^a において解が存在することを、逐次近似解が収束することによって証明している。

一般に自由表面を伴う自由境界値問題は、固定領域上の方程式系に変換して考察される。そのような記述方法の 1 つである Sylvester (1990) の領域の変換を用いるには、 η を (各時刻毎に) 三次元の空間変数の関数に拡張したときの滑らかさ (微分可能性) が、流速のそれと同等以上の滑らかさをもつ必要がある。一方でこの問題には表面張力がないので、 η の属する関数空間は、表面張力がある場合よりも広くならざるを得ず、流速と η とが同じ滑らかさを持つことを示すことは困難である。このような問題の定式化によって生じる困難を、本論文では関数空間 X^a に、時間方向に適切な減衰および増大の条件を導入することによって解決している。 X^a の時間変数に関する重みの入れ方は、流速と圧力には時間方向に有界性やいくつかの減衰の条件を満たすようなクラスを、自由表面 η には有界性やいくつかの減衰の条件とともに、空間変数の関数として最高階微分を含むノルムは $\sqrt{t}$ のオーダーで増大を許容するようなクラスを設定している。特に η について、(時間を止めるごとに) 空間変数の関数として流速と同じ滑らかさを持つクラスに入るので、時間方向にそのノルムは増大するが、Sylvester の変換を利用できるようにしてある。

解の存在を示す議論は、方程式の線形部と非線形部とに議論を分けている。線形系の議論は、力学的境界条件の移流項を主要部として扱うので、移流項を変数係数とみなした線形作用素に逆作用素が存在することを示し、その後、a priori 評価によって逆作用素が値域を X^a として有界作用素であることを示す。流速の最高階の微分の有界性と低階微分の減衰の条件から、自由表面 η の最高階の微分が高々 $\sqrt{t}$ のオーダーでしか増大していないことを導くことができ、この評価が本論文の中心となる評価になっている。その他に、いくつかの線形系の評価を組み合わせる必要があり、変数係数であるために評価の相互依存関係が複雑になるが、移流項の係数が小さいという仮定の下で、成立する評価を順に決めていくことが出来ている。

非線形項の積評価に関しては、非線形項が線形作用素の値域 Y^a の原点の近傍で連続かつ原点が二位の零点であり、 Y^a を部分空間として含む適当な空間 Y^{a-1} の原点の近傍で Lipschitz 連続であることを用いて、逐次近似解が X^a で収束することを示す。非線形項が属する空間 Y^a には、 X^a と同様に、時間方向に減衰の条件を課す必要がある。それぞれの非線形項

が Y^a に入ることの証明については、高階微分の有界性から低階微分の減衰が従うので、高階微分を含むノルムの有界性が議論の中心となっている。それらの積評価は、それぞれの非線形項に応じて対処されている。

論文審査の結果の要旨

自由表面を持った流体運動を考察するのに、非圧縮性粘性流体の運動は、ナヴィエ・ストークス方程式に従うとし、流体の下部は水平な底面で限られており、重力の作用のもと上部が自由表面で限られている時間発展の問題を非線形偏微分方程式系の初期値・境界値問題として定式化し、その時間大域的な可解性と解の時間的減衰の挙動を精密に解析している。自由表面問題の難しさは、方程式自身の半線形性に加え、流体を限っている自由境界を決定しなければならないと同時にその境界上で非線形の力学的条件を満たさなければならない事にある。さらに本論文では、自由表面が表面張力を持たず、応力が一定の大気圧に釣り合っている場合を取り上げている。これは、自然現象としてはスケールの大きい水の波等の場合に当たる。

表面張力を考慮した系の初期値・境界値問題の解析は、知られており、初期値が小さい場合に、大域的な解の存在とその時間的な減衰が証明されている。表面張力が無い場合には、非線形問題に関する数学としての結果は皆無であった。実際、この場合の特徴である、波数が大きくなるにつれて静止平衡状態で線形化した系の固有値問題の固有値に特異性が現れ、線形系の解の、従って非線形系の解の時間的減衰が極めて遅い事と、もう一つの特徴である自由表面の滑らかさが上がらない事とあいまって非線形問題の時間大域解を構成する事が、出来ていなかった。

本論文では先ず自由表面問題の始めの困難である時間と共に変化する流体の領域を、流体の表面を記述する未知関数を用いた変換によって、水平な帯状の定領域に変換する。この際、変換により同値な問題に移る事が必要で、そのためには、表面を表す未知関数と流体の速度が同じ微分可能性を持たなければならない。表面張力がある場合には、表面を表す未知関数は、流体の速度より微分可能性が一階高く、上述の数学解析が行われていた。今の場合、表面張力が無いために流体表面の未知関数の微分可能性が悪く、最良で両者の微分可能性は同じにしかない。

ところが、表面張力の無い結果現れる上述の特異性に依る困難を克服する方法としては、本論文による取り扱いしか残されていない。すなわち、この特異性が存在するにもかかわらず、解の滑らかさを犠牲にすれば、解の時間的な減衰を取り出せる事に着目した。しかしながら、これは上記の自由表面を表す未知関数の滑らかさへの要請に反する。

本論文では、解の滑らかさと時間的な増大・減衰度とに対応した正確な重みをつけて、この相反する要請を満たしうる関数空間を見いだして、解析の途中に現れる各種の偏微分作用素の精密な解析的評価を行うことにより、小さい初期値に対する結果として、目的の時間大域的な解の存在とその時間的な減衰の最良評価を得た。この論文は、以上の定式化での初めての解析結果であり、今後この自由表面問題の分岐問題等の解析を発展させるための基礎を与えるものである。

こうして、本論文は、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認められる。論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。