

液体薄膜の不安定性と崩壊

阪大 基エ 松内一雄

§1. はじめに

液体を単位体積当りの表面積が大きな霧状に分散させることは、1950年代より始まり現在に到るまで、燃烧工学、化学工学、農業工学等の応用分野における重要な研究課題となっている。この微粒化のメカニズムを流体力学的に明らかにし、水滴の大きさを決定し、窮極的にはそれを制御することに多大の努力が払われてきた。理論的には、主に二次元薄膜をモデルにして解析が進められてきた。この薄膜が崩壊し、微粒化するためには、ある種の攪乱に対して不安定を起す事が必要である。ところが、ごく最近まで、この不安定は一定速度で動く薄膜の不安定、すなわち、まわりの空気の影響による Kelvin-Helmholtz 型の不安定のみであった。理論的な研究のほとんどはこの種の不安定の解析であるが、現在までのところ薄膜崩壊については満足すべき結果は得られていない。しかし、最近になって静止薄膜でも弱い非線形表面張

カ波が変調不安定を起こす事が示された。⁶⁾ しかも、上下面の中心面に対し対称な波が反対称な波よりもより不安定であつて、この理論によって水滴化を説明し得る可能性が得られた。

ここで行うのは上で示された弱い非線形波に対する不安定の解析を振幅が任意の場合に拡張し、不安定の結果が、実際に薄膜の崩壊につながることを示すことにある。

§2. 問題の定式化

上下面の中心面に対称な波の分散関係式は無次元形で

$$\frac{\omega^2}{k^2} = k \tan k$$

と書ける。ただし、 ω 、 k はそれぞれ振動数と波数であり、代表長さとして薄膜厚さの二分の一、代表速さとして $(2T/\rho l)^{\frac{1}{2}}$ (T : 表面張力, ρ : 密度, l : 膜の厚さ) をとって無次元化している。以下の解析では長波長 ($k \ll 1$) を仮定する。このとき分散関係式は $\omega^2 \approx k^4$ と近似できるので、 $\xi = \mu x$, $\tau = \mu^2 t$ と座標および時間を縮めると便利である。ただし、座標 x は中心面から膜面に平行にとり、垂直に y をとる。また、 $\mu \equiv k^2$ であり、長波長を示す微小パラメータである。この座標系 (ξ, y, τ) で運動方程式および境界条件は次のように書ける。

$$\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} [\mu (\frac{\partial \phi}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2] = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} / [1 + \mu (\frac{\partial \eta}{\partial \xi})^2]^{\frac{3}{2}}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \mu \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{at } y=0. \quad (2.4)$$

ただし、 $\phi(\xi, y, \tau)$ は速度ポテンシャル、 $\eta(\xi, \tau)$ は中心面から割った表面の変位である (ref. 6 を参照)。

更に従属変数 ϕ, η を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(\xi, y, \tau; \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \phi_n(\xi, y, \tau), \\ \eta(\xi, \tau; \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \eta_n(\xi, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

この展開は μ の零次のオーダーからゆっくりした変化を考慮していて、同様な立場は $Alfvén$ 波⁷⁾、強い粘性の影響をうける重力波⁸⁾の問題にもみられる。(2.5)の展開を(2.1)～(2.4)に代入し、 μ で整理すると、若干の計算の後、連立方程式:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \eta_0 \right) = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} \quad (2.7)$$

を得る。以下では ϕ の指標は省略する。ここで、

$$\eta = 1 + \epsilon \hat{\eta}, \quad u = \epsilon \hat{u}, \quad (u = \frac{\partial \phi}{\partial \xi})$$

とおき、 ϵ (= 非線形の弱さを示すパラメータ) の自乗を無視する近似を行うと

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \hat{\eta}}{\partial \xi^4} = 0 \quad (2.6)$$

となり、Taylor がすでに求めている結果と一致する。⁹⁾

§3. 定常解

(2.6)、(2.7) を満たす解のうちで

$$\eta = \eta(\zeta), \quad \phi = \phi(\zeta), \quad \text{ただし、} \zeta = \xi - C\tau$$

の形をした解を考えよう。これは形を変えずに速さ C で進む波を表わしている。上の式を (2.6)、(2.7) に代入し、積分を行うと、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{A^2 + C^2 \eta^2}{\eta} \right) + B \quad (3.1)$$

を得る。ただし、 A, B は積分定数である。この方程式は $C^2 A^2 \leq B^2$ を満たしている時のみ解をもつ。このとき、

$$C^2 G_1 G_2 = A^2, \quad C^2 (G_1 + G_2) = 2B,$$

によって G_1, G_2 を導くすると、(3.1) は

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = C^2 \frac{(\eta - G_1)(G_2 - \eta)}{\eta}, \quad G_1 \leq \eta \leq G_2 \quad (3.2)$$

と書ける。この方程式の解は楕円積分等を用いて書け、陰いおとなじうかなれをもった表面張力波特有の波列であることを示している。また、簡単な計算からこの波列の振動数を $\bar{\omega}$ とすると、

$$\bar{\omega} = \frac{2}{\pi} \sqrt{G_2} k^2 E(\bar{\alpha}), \quad \text{where } \bar{\alpha}^2 = \frac{G_2 - G_1}{G_2} \quad (3.3)$$

で表わされる、分散関係式を満たしている事がわかる。ただし、 $E(\bar{\alpha})$ は第二種の完全楕円積分であり、振幅の増加は位相速度 ($c = \bar{\omega}/k$) の減少へ導びき、この点に関しても表面張力波に特有の傾向をもっている事がわかる。

§4. 周期解の二、三の性質について

まず、定常ではない周期解の保存量を考えてみる。(2.6) から直接に

$$\frac{d}{d\xi} \int \eta d\xi = 0 \quad (4.1)$$

が得られ、質量の保存を表わしている。ただし、 $\int_L d\xi$ は一
波長にわたる積分である。また、運動量、エネルギーの保存も、
次のように得られる。

$$\frac{d}{dt} \int_L u \eta d\xi = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_L \left(\frac{1}{2} \eta u^2 + \frac{1}{2} \eta_\xi^2 \right) d\xi = 0. \quad (4.3)$$

第二式の一項目が運動エネルギーであり、二項目が表面張力に
よる表面エネルギーである。

次に、前節で得られた定常解が、変分原理からも導ばれる
事を示す。一定の速度で進む波をこの波に乗った座標から
考察する。ここで、一波長についてだけ考える。両端を固定
し、質量を一定に1で波形を自由に変え、

$$L = \int_L L' d\xi \quad \text{where} \quad L' = \frac{1}{2} \eta u_c^2 - \frac{1}{2} \eta_\xi^2$$

が停留値をもつとき波形はどうなるかを考える。上の式で u_c
は新しい移動座標系から測った速度とする。この変分問題は
次のように書ける。

$$\delta L = 0 \quad \text{for } M \text{ fixed.}$$

ただし、 δL は L の第一変分であり、 M は一波長にわたる質

量 η, η_3, η_3^2 である。長波長近似のもとでは $\eta u_c = \text{const.}$ ($=A$) とおけるので、この変分問題は Euler-Lagrange 方程式:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial L'}{\partial \eta_3} = \frac{\partial L'}{\partial \eta} + \lambda \quad (4.4)$$

に導く。ただし、 λ は Lagrange の未定乗数である。 $\lambda = C^2/2$ と選び、一同積分すると、(3.1) が得られる。また、 L' が ξ を陽に含んでいないので、よく知られた方法で、

$$\frac{1}{2} \eta u^2 + \frac{1}{2} \eta_3^2 = \frac{C^2}{2} (C_1^2 - C_2^2)^2 \quad (4.5)$$

が得られ、エネルギー密度が座標 ξ によらないことがわかる。

§5. 数値計算

すでに得られている結果⁶⁾ から、§3 で得られた定常波列はこの波列よりも大きい波長をもった攪乱に対して不安定を起こす事が示唆される。そこで、(2.6), (2.7) 式の初期値問題を数値的に解いてみる。初期波形としては

$$\text{Case (I)}: \quad SS(\xi; C_1, C_2, \lambda) = 0.05 \cos 2\pi \xi,$$

$$\text{Case (II)}: \quad SS(\xi; C_1, C_2, \lambda) = 0.01 \cos \frac{\pi}{3} \xi,$$

の二つの場合を考える。ただし、 S は山-谷の振幅が $G-C$, 波長が入である定常解であり、この計算では $C=0.5$, $G=1.5$, $\lambda=2$ と選んだ。また、定常解の残っている唯一の不定性は $\xi=0$ に谷が位置するようにして消去された。Case (I) は定常解に対し、second harmonic の攪乱が加わっており、この場合には計算時間内では安定であった。Case (II) は定常解に対し、振幅が 2%、波長が 3 倍の subharmonic な攪乱が加わっており、この場合には不安定を起す事が期待される。計算の結果、実際に不安定を起し、一番深い谷が徐々に深くなり、上下面は時間とともに接近する (図参照)。この不安定は有限時間 (今の場合、 $t=44$ の近く) できわめて急激な変化を示し、計算誤差も急激に増加する。この理由で、上下面がくっつくところまでは計算できなかった。

数値計算は leap-frog 法を用いて、(2.6)、(2.7) に対応する差分方程式を周期境界条件のもとで解いた。周期として、Case (I) は入をとり、Case (II) は 3 入をとった。

3.6. 結論

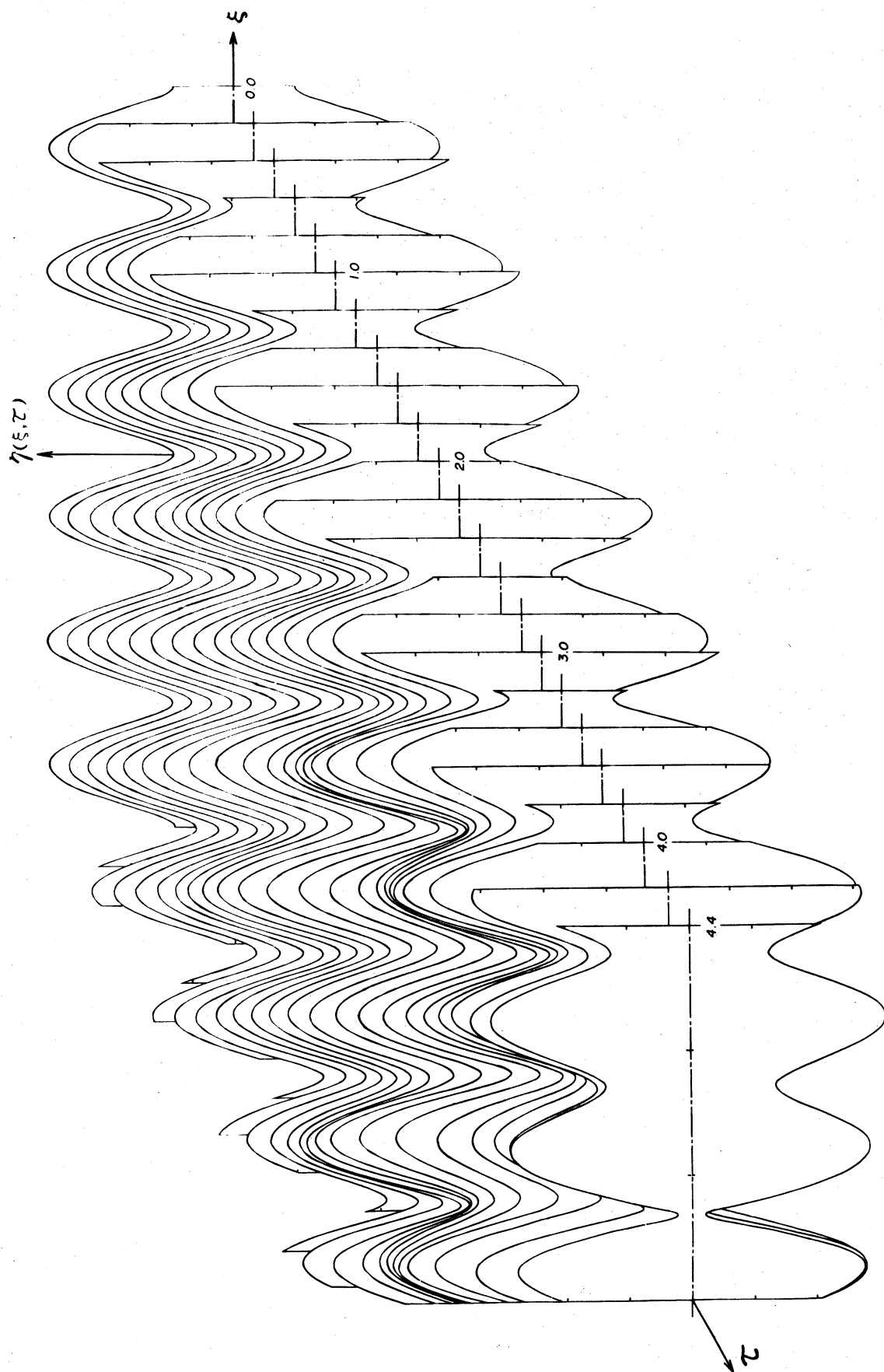
前の論文⁶⁾で得られた弱い非線形に対する解析を長波長ではあるが任意の振幅の場合に拡張した。この結果、弱い非線

形の場合に得られた不安定が、今の場合にも起こり、初期にはほぼ一様に分布していたエネルギーは一番深い谷のところに集中し、やがてある「有限」時間で解は急激に発散する。このエネルギー集中は（具体的な形では示していないが）主に速度 u の局所的な増加によっている。この不安定の定性的な説明は非線形の役割と分散効果との役割を考える事によってなされ得る。すなわち、非線形による「つつたち」によって波の前面が急勾配になり、後面はゆるやかになる。またこの結果、前面での群速度 Ω は増加し（ $\because d\Omega/dk > 0$ ）、後面では減少する。したがって、群速度の役割から考えて、谷にエネルギーの集中することの説明される。

こうして得られた「爆発的」な不安定の存在は薄膜崩壊に対する強い支持を与えている。

References

- 1) H.B.Squire: Brit.J.appl.Phys. 4 (1953) 167.
- 2) W.W.Hagerty and J.F.Shea: J.appl.Mech. 22 (1955) 509.
- 3) C.J.Clark and N.Dombrowski: Proc.Roy.Soc. A329 (1972) 467.
- 4) G.D.Crapper, N.Dombrowski and G.A.D.Pyott: Proc.Roy.Soc. A342 (1975) 209.
- 5) G.D.Crapper, N.Dombrowski and W.P.Jepson: Proc.Roy.Soc. A342 (1975) 225.
- 6) K.Matsuuchi: J.Phys.Soc.Japan 37 (1974) 1680.
- 7) T.Kakutani and H.Ono: J.Phys.Soc.Japan 26 (1969) 1305.
- 8) T.Kakutani and K.Matsuuchi: J.Phys.Soc.Japan 39 (1975) 237.
- 9) G.I.Taylor: Proc.Roy.Soc. A253 (1959) 296.



$\eta(\xi, \tau)$ の変化 ($0 \leq \tau \leq 4.4$). 初期波形は攪乱の波長分が書いてある。最深の谷は $\tau = 0$ で $\xi = 0$ に位置している。